

**Thèse de Doctorat**

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Polytechnique Hauts-De-France

et de l'INSA Hauts-de-France

Discipline : Automatique et Productique

**Présentée et soutenue par Hajer SRIHI**

**Le 21/12/2023, à Valenciennes**

**École doctorale**

École Doctorale Polytechnique Hauts-de-France (ED PHF n°635)

**Unité de recherche**

Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines (LAMIH – UMR CNRS 8201)

**Titre en français**

**Stratégies de Stabilité en Position Assise chez les Personnes Vivant avec  
une Lésion de la Moelle Épineuse : de l'estimation utilisant des modèles  
descripteurs quasi-LPV à la validation expérimentale**

**JURY**

**Présidente du jury**

SIMONEAU, Emilie. Professeur, LAMIH, Valenciennes, France

**Rapporteurs**

MORERE, Yann. Maître des conférences, LCOMS, Metz, France.

MANAMANNI, Nouredine. Professeur, CReSTIC, Reims, France

**Examineurs**

SIMONEAU, Emilie. Professeur, LAMIH, Valenciennes, France

REZZOUG, Nasser. Maître des conférences, Institut P', Poitiers, France

**Directeurs de thèse**

GUERRA, Thierry-Marie. Professeur, LAMIH, Valenciennes, France

PUDLO, Philippe. Professeur, LAMIH, Valenciennes, France

**Co-encadrant**

NGYUEN Anh-Tu, Maître des conférences, LAMIH, Valenciennes, France



PhD Thesis



Submitted for the degree of Doctor from Université Polytechnique Hauts-De-France  
and INSA Hauts-De-France

Subject: Automation and Production

**Presented and defended by Hajer SRIHI**

**On 21/12/2023, Valenciennes**

#### Doctoral school

Doctoral School Polytechnique Hauts-de-France (ED PHF n°635)

#### Research unit

Laboratory of Industrial and Human Automation control Mechanical engineering and Computer science  
(LAMIH – UMR CNRS 8201)

#### Title in English

**Sitting Stability Strategies in People with Spinal Cord Injury: from the  
Estimation using Quasi-LPV Descriptor Models to Experimental Validation**

#### JURY

##### Jury President

SIMONEAU, Emilie. Professor, LAMIH, Valenciennes, France

##### Reviewers

MORERE, Yann. Assistant professor, LCOMS, Metz, France

MANAMANNI, Nouredine. Professor, CReSTIC, Reims, France

##### Examiners

SIMONEAU, Emilie. Professor, LAMIH, Valenciennes, France

REZZOUG, Nasser. Assistant professor, Institut P', Poitiers, France

##### Thesis directors

GUERRA, Thierry-Marie. Professor, LAMIH, Valenciennes, France

PUDLO, Philippe. Professor, LAMIH, Valenciennes, France

##### Co-supervisor

NGYUEN Anh-Tu, Assistant professor, LAMIH, Valenciennes, France

# SOMMAIRE GÉNÉRAL

ABRÉGÉ	5
ABSTRACT	7
PREAMBULE	10
REMERCIEMENTS	13
ABRÉVIATIONS	16
NOTATIONS	16
SYMBOLES	17
INTRODUCTION GÉNÉRALE	18
CHAPITRE 1 : LA LESION MEDULLAIRE : IMPACT SUR LE CONTROLE POSTURAL ET MODELISATION BIOMECHANIQUE	23
I. Introduction	24
II. La position assise chez les sujets asymptomatiques	24
III. La position assise chez les sujets lésés médullaires	29
IV. La modélisation de la station assise	40
V. Conclusion du chapitre 1	48
CHAPITRE 2 : LE MODÈLE S3S-2D	50
I. Introduction	51
II. Présentation du modèle S3S-2D	51
III. La loi de contrôle du modèle S3S-2D	54
IV. L'observateur global discret du modèle S3S-2D	70
V. L'observateur global continu du modèle S3S-2D	72
VI. Conclusion du chapitre 2	84
CHAPITRE 3 : LE MODÈLE S3S-2D DECOMPOSE	86
I. Introduction	87
II. Le modèle S3S-2D décomposé en continu	87
III. Le problème d'observation à entrées inconnues	89
VI. La validation expérimentale de l'observateur décomposé en continu	101
V. Le modèle S3S-2D décomposé en discret	104
VI. Conclusion du chapitre 3	115
CHAPITRE 4 : LE MODELE T2A-2D	116
I. Introduction	117
II. Le modèle T2A-2D	117

III. La stabilisation par retour d'état du modèle T2A-2D	121
IV. Le problème d'observation à entrées inconnues	127
V. La cascade des PI-observateurs du modèle T2A-2D	129
VI. Les essais en simulation et avec des données réelles	132
VII. Conclusion du chapitre 4	139
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	140
I. Contributions	140
II. Perspectives de Recherche	142
CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES	146
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	147
TABLE DES FIGURES	161
LISTE DES TABLEAUX	163
ANNEXE	164

## ABRÉGÉ

La lésion médullaire conduit à une perte partielle ou complète de l'activité musculaire et des fonctions sensorielles en dessous du niveau lésionnel, cette atteinte de la moelle épinière entraîne une réduction drastique de la stabilité posturale en position assise et par conséquent un risque de chute élevé (Boswell-Ruys et al., 2010 ; Nelson et al., 2010).

Les conséquences de la lésion médullaire sont importantes et d'ordre sensori-motrices, cardio-vasculaires, respiratoires et digestives. L'impact de la lésion sur le système stabilisateur vertébral conduit à de nouvelles stratégies de stabilisation, en cas de perturbation, qui sont différentes des stratégies mise en œuvre par les sujets asymptomatiques. Ces stratégies qui viennent compenser l'absence d'un contrôle sous-lésionnel sont basées essentiellement sur les mouvements des membres supérieurs.

La compréhension de ces stratégies ainsi que la quantification des efforts articulaires qui en résultent sont nécessaires afin d'évaluer l'impact de la lésion et proposer des nouvelles techniques facilitant le maintien de la stabilité. L'un des enjeux est de savoir « retourner » vers les variables qui génèrent ces efforts, les couples articulaires, données qui ne sont pas mesurées et ne sont pas mesurables. Une manière de le faire, alternative à la « classique » dynamique inverse, a été exploitée dans les travaux précédents (Blandeau, 2018). Elle consiste, à partir d'un modèle biomécanique, à utiliser des techniques d'observation pour reconstruire ces entrées inconnues. Le formalisme utilisé est un formalisme dit de Takagi-Sugeno qui permet de décrire de façon polytopique des systèmes non linéaires. La description utilisée est de type descripteur, car elle se prête bien aux modèles mécaniques en diminuant la complexité des conditions obtenues (Estrada-Manzo, 2015).

Une campagne d'essais réalisée au CRIR de Montréal (Blandeau, 2018) a permis de recueillir de nombreuses données sur la posture assise des personnes lésées médullaires. Seule une partie de ces essais a pu être exploitée car le modèle « Seated-3-segments » (S3S-2D) utilisé ne permettait pas de décrire toutes les situations rencontrées, par exemple une dissymétrie dans les mouvements des bras.

Il y a plusieurs challenges :

- Enrichir les modèles existants, notamment le modèle S3S-2D (Blandeau, 2018) sachant qu'une résolution « directe » avec un observateur issu de ce type de modèle est déjà proche des limitations des solveurs actuels.
- Arriver à des solutions qui sont pertinentes (a minima qui utilisent les modèles biomécaniques sans simplification), compatibles avec les possibilités des solveurs et suffisamment génériques pour ne pas demander de refaire une étude complète si on ajoute des degrés de liberté supplémentaires.

Dans l'esprit de ces challenges, des propositions d'observateurs non linéaires mis en cascade sont faites. Pour montrer le bien-fondé de l'approche, les résultats sont d'abord comparés à l'existant (S3S-2D) avant d'être étendus à des modèles utilisant des degrés de liberté supplémentaires dont « Trunk-2-arms » (T2A-2D) pour lesquels la méthodologie précédente ne peut apporter de solutions. T2A-2D permet notamment d'exploiter des essais impliquant une dissymétrie dans les mouvements de membres supérieurs. Il reste dans les étapes suivantes à introduire les rotations, notamment au niveau

des épaules pour se rapprocher des mouvements réels effectués par le sujet. La méthodologie utilisée semble parfaitement adaptée pour réaliser cette extension.

Enfin, un mannequin équipé de tous les actionneurs et capteurs nécessaires permettant de reproduire les mouvements d'une personne en position assise sera utilisé avec cette fois-ci la possibilité de valider les couples articulaires reconstruits, en les comparant directement à ceux produits.

**Mots clés :** control postural, contrôle, observation, LMI, modélisation mécanique.

## ABSTRACT

Spinal cord injury leads to a partial or complete loss of muscular activity and sensory functions below the level of injury, this damage to the spinal cord leads to a drastic reduction in postural stability in a sitting position and consequently a high risk of falling (Boswell-Ruys et al., 2010; Nelson et al., 2010).

The consequences of the injury are significant and are sensorimotor, cardiovascular, respiratory and digestive. The impact of the injury on the vertebral stabilizing system leads to new stabilization strategies, in case of disturbance, which are different from the strategies implemented by asymptomatic subjects. These strategies, which compensate for the lack of sublesional control, are essentially based on the movements of the upper limbs.

Understanding these strategies as well as quantifying the resulting joint forces are necessary in order to assess the impact of the injury and propose new methods facilitating the control of seated stability.

One of the challenges is knowing how to return to the variables that generate these efforts, the joint torques, data which are not measured and cannot be measured. A way of doing that, an alternative to the “classic” inverse dynamics, has been exploited in previous work (Blandeau, 2018). It consists, from a biomechanical model, of using observation techniques to reconstruct these unknown inputs. The formalism used is a so-called Takagi-Sugeno formalism in order to describe nonlinear systems in a polytopic manner. The description used is of descriptor type, because it lends itself well to mechanical models by reducing the complexity of the conditions obtained (Estrada-Manzo, 2015).

A test campaign carried out at the CRIR in Montreal (Blandeau, 2018) made it possible to collect numerous data on the sitting posture of people with spinal cord injuries. Only part of these tests could be analyzed because the “Seated-3-Segments” (S3S-2D) model used is not able to describe all the situations encountered, for example asymmetry in arm movements.

There are several challenges:

- Enriching existing models, in particular the S3S-2D model (Blandeau, 2018), knowing that the “direct” resolution with an observer from this type of model is already close to the limitations of current solvers.
- Arrive at solutions which are relevant (at a minimum which use biomechanical models without simplification), compatible with the possibilities of the solvers and sufficiently generic so are not to require redoing a complete study if additional degrees of freedom are added.

To fulfil these challenges, proposals for cascaded nonlinear observers are made. To show the merits of the approach, the results are first compared to the existing one (S3S-2D) before being extended to models using additional degrees of freedom including “Trunk-2-Arms” (T2A-2D) for which the previous methodology cannot provide solutions. T2A-2D make it possible in particular to exploit tests involving asymmetry in upper limbs movements. In the following stages, it remains to introduce rotations, particularly at the level of the shoulders to approximate the real movements carried out by the subject. The methodology used seems perfectly suited to carry out this extension.

Finally, a mannequin equipped with all the necessary actuators and sensors to reproduce the movements of a person in seated position will be used, this time with the possibility of validating the reconstructed joint torques, by directly comparing them to those produced.

**Keys words:** Postural control, Control, Observation, LMI, Mechanical modeling

« Ma mère est la seule à savoir que le fait que je m’abstienne de mon plat préféré n’a rien à voir avec la satiété mais plutôt avec la tristesse et que le fait que je dors beaucoup n’a rien à voir avec la somnolence mais plutôt avec le fait de m’éteindre.

Elle seule sait que ma voix basse et mon salut calme dès que j’entre dans la maison signifient que ma journée a été mauvaise.

Elle seule sait que ce sourire timide c’est l’amour, cette étincelle c’est la séparation, l’indifférence est le désir et que mon départ signifie l’oubli.

Elle est la seule à connaître le tourbillon qui existe dans mes profondeurs.

Elle est la seule à avoir été témoin de mes défaites et de mes réussites.

Elle est la seule à savoir que le chemin n’a jamais été facile.

J’ai découvert au loin que je ressemble beaucoup à ma mère l’imitant dans chaque détail de la journée.

Préparant la nourriture exactement comme elle fait avec le même dosage.

Utilisant ses phrases qu’elle répétait constamment.

Même les actions que je critiquais auparavant je me retrouve aujourd’hui noyée en elle.

Nous sommes une copie de nos mères, peu importe à quel point nous essayons d’apparaître différentes ». Al-Arwah al-Mutamarrida Gibran Kahlil Gibran.

« On aime sa mère presque sans le savoir, sans le sentir, car cela est naturel comme de vivre ; et on ne s’aperçoit de toute la profondeur des racines de cet amour qu’au moment de la séparation dernière. Aucune autre affection n’est comparable à celle-là, car toutes les autres sont de rencontre, et celle-là est de naissance » Guy de Maupassant, Fort comme la mort.

Je t’aime maman



*« Pour dépasser les clivages, permettre à une complicité de s'établir et à une histoire en commun de s'écrire, notre société a besoin de mots et de concepts partagés, inclusifs, en cohérence avec le droit de tous au patrimoine social, sans toutefois gommer la diversité et la spécificité des situations »*

Charles Gardou, « La société inclusive, parlons-en ! », Érès, 2012

## PREAMBULE

D'après les statistiques officielles du ministère de l'enseignement supérieur établies en 2019, 28% des chercheurs sont des femmes. En 2021, les organismes de recherche ne comptaient que 38% de chercheuses. Au sein des établissements d'enseignement supérieur et de recherche, les femmes occupent 63% des postes non-enseignants et seulement 39% des ingénieurs de recherche. Si les femmes représentent 53% des chercheurs en sciences humaines, elles ne constituent que 22% des chercheurs en mathématique et informatique. En 2023 les chiffres du CNRS en début d'année indiquent que 34.5% des chercheurs sont des femmes. Ce pourcentage évolue lentement depuis des années et la représentation des femmes dans les domaines scientifiques peine à progresser (Mauger, 2023).

La sous-représentation des femmes dans les domaines scientifiques est d'autant plus visible en milieu professionnel où on trouve 63% des enseignantes chercheuses en langues et littérature contre 23% des enseignantes chercheuses en mathématique et informatique. Ce phénomène est appelé « le tuyau percé », plus on monte dans la hiérarchie moins les femmes sont présentes (Marry et al., 2004).

Cette inégalité de genre est bien flagrante notamment à cause de la persistance des stéréotypes ainsi que les préjugés sexistes qui persuadent les jeunes filles depuis leur enfance qu'elles ne sont pas faites pour les domaines scientifiques malgré leur potentiel remarquable.

Cette disparité ne date pas d'aujourd'hui, l'histoire nous amène à remarquer par exemple qu'en Grèce Antique de nombreuses femmes ont travaillé au côté de Pythagore et pourtant tous les travaux étaient publiés sous le nom de Pythagore. Les femmes ont longtemps été absentes des disciplines scientifiques. Au XVII<sup>ème</sup> siècle, les femmes étaient exclues des écoles d'ingénieurs car celles-ci étaient vues comme des écoles naturellement masculines (Trouche, 2020).

Les contraintes commencent depuis l'enfance où les jeux de la science sont rangés au rayon « garçon » et les poupées au rayon « fille », ce qui indique explicitement aux filles que la science n'est pas pour elles et les pousse donc à opter pour une carrière littéraire ou des parcours médicaux en leur attribuant les rôles de « care » (le soin). Les métiers de la femme s'inscrivent donc dans le prolongement des fonctions « naturelles » et ménagères (Perrot, 2020). Ces métiers lui sont réservés car elle possède des qualités innées et une souplesse physique et orale (Perrot, 2001).

Ainsi une élève douée en science sera considérée comme normale parce que les filles sont de nature laborieuses et sérieuses alors qu'un élève doué en science sera qualifié d'intelligent et étiqueté « bon élève » et donc son orientation sera plus aisée (Osborn, 2000).

Dans leur ouvrage « L'intelligence artificielle, pas sans elles », Aude Berheim et Flora Vincent soulignent un manque de filles dans les sections qui concernent l'avenir de la société comme l'intelligence artificielle, l'environnement et l'informatique. Aujourd'hui en France, il n'y a que 10% de femmes pour concevoir les algorithmes et malheureusement dans la recherche la concentration des hommes a pour effet d'avoir occulté pendant des décennies des problèmes spécifiques aux femmes comme l'endométriose, l'infertilité féminine et l'infarctus chez la femme (Moghaddam, 2020).

Isabelle Vauglin astrophysicienne et présidente de l'association femme et science affirme que les femmes sont invisibilisées ; elles font des tâches essentielles mais moins visibles (responsable pédagogique, adjointe de direction ...) et pour les statuts prestigieux, un réseautage masculin existe

car un chef va spontanément penser à diriger sa succession vers des hommes qui lui ressemblent (Mauger, 2023).

Le dernier rapport du sexisme en France montre que 15% des femmes ont dû renoncer à choisir des carrières majoritairement composées d'hommes (Mauger, 2023). La crainte de ne pas y trouver sa place, de s'y sentir mal à l'aise ou l'inquiétude d'être harcelée sont les raisons fondamentales justifiant ce choix. Des jeunes étudiantes affirment également qu'elles devaient faire le choix entre avoir des enfants et progresser dans leur carrière et que les contraintes familiales font de sortes qu'elles avancent moins vite. Cette forme d'auto-censure due à l'éducation genrée montre que dans un couple hétérosexuel c'est souvent la femme qui sacrifie sa carrière lors de l'arrivée d'enfants, ce qui forme un cercle sexiste auto-entretenu (Ashcraft, 2001). Les métiers de la femme qualifiés comme « bien pour la femme » doivent obéir à des critères sociétaux et doivent également permettre à la femme d'assurer sa double fonction, professionnelle (mineure) et domestique (primordiale) (Perrot, 2020).

Les études de l'observatoire des inégalités démontrent que si les femmes sont présentes elles le sont dans une moindre proportion que les hommes qui dominent (Bollé, 2002). Les hommes sont par exemple les plus invités par les journaux et on trouve plus d'articles cités par des hommes que par des femmes.

Il s'agit de l'effet Matilda qui consiste à nier et à minimiser l'implication des femmes dans les découvertes pour en donner le mérite aux hommes. Ainsi, les femmes sont sous représentées dans les métiers scientifiques. En particulier cela est dû à un manque, voire une absence de liberté et de considération.

Aujourd'hui, le statut a évolué : les femmes sont plus autonomes, libres et émancipées. Ces écarts se sont un peu réduits. On voit une participation progressive de la femme dans les formations d'ingénieurs par exemple. François Poulain de La Barre a écrit : « Les femmes sont aussi nobles, aussi parfaites et aussi capables que les hommes. Mais cela ne peut être établi qu'en refusant deux sortes d'adversaires : le premier est la pensée vulgaire, le second est l'ensemble de presque tous les savants ». Le principe républicain de l'égalité stipule que lorsqu'une jeune femme ou un jeune homme se présente à une filière éducative ou à un emploi, leurs candidatures doivent être traitées de la même manière indépendamment de leurs sexes. Dans le cas inverse, il s'agit bien d'une discrimination.

Les types de violences faites aux femmes ont également été soulignés et mis en évidence depuis quelques années que ça soit de la violence sexuelle, du harcèlement ou de l'outrage sexiste. La convention d'Istanbul publiée le 17 Novembre 2017 indique que ces formes graves de violence constituent une violation des droits humains et un obstacle à la réalisation de la parité.

Les universités et les laboratoires de recherche ont mis en place des cellules de parité pour lutter contre les violences sexistes et sexuelles et augmenter la visibilité de la femme scientifique ainsi que son intégration dans les structures de recherche. Le LAMIH UMR CNRS 8201 est un exemple concret, une cellule égalité parité a été créée pour promouvoir la parité des genres et veiller aux questions liées à la discrimination dans le but de favoriser le bien-vivre ensemble. Ainsi, la cellule propose des événements de sensibilisation et des actions pour motiver les jeunes étudiantes à la recherche et lutter contre les comportements non admissibles. Le LAMIH est parmi les unités de recherche en France qui possède une représentation féminine à tous les niveaux.

Des femmes scientifiques talentueuses ont obtenu le prix Nobel comme Marie Curie, Irène Joliot-Curie et plus récemment la physicienne Anne L'Huillier en 2023. La femme aujourd'hui dirige, ordonne et

exécute. Cependant, il reste encore un long chemin à parcourir pour atteindre la parité idéale. Tous les acteurs sociaux doivent contribuer à libérer le talent caché et inexploité chez les femmes en commençant par valoriser les travaux des femmes scientifiques dans les entreprises et les laboratoires de recherche. Plusieurs associations se développent de nos jours afin de lutter contre la discrimination de genre. L'association femmes et sciences créée en 2000 est un exemple concret. Elle vise à renforcer l'image de la femme scientifique en rétablissant la vérité sur les clichés développés par la société sur la femme dans le domaine de la science. L'association femmes et sciences honore et soutient chaque année via le prix national Thierry Célérier femmes et sciences, une jeune femme en situation du handicap à développer une activité scientifique ou un projet professionnel.

Respect aux femmes scientifiques porteuses du handicap où le double système d'inégalité se présente : une discrimination combinant genre et handicap d'où la double peine (Pistorius, 2020).

La femme scientifique en particulier en situation du handicap a toujours été synonyme de la femme la moins capable et la moins rentable. Atteindre la parité scientifique doit englober aussi les femmes en situation du handicap afin de créer une société inclusive sans exclusion et sans exclusivité. Le rapport de APF France Handicap (Association des Paralysés de France) intitulé « STOP aux stéréotypes, aux inégalités et aux violences » publié en 2019 souligne que 50% des femmes en situation du handicap ont le sentiment d'avoir subi une discrimination dans l'accès ou le maintien dans l'emploi en raison d'une « mauvaise image », une préemption d'incapacité ou des compétences sous-considérées. Un témoignage choquant de X atteinte d'une déficience physique et âgée de 35 ans affirme : « On me demande de venir à un entretien, puis en me voyant, on me dit qu'il y a une erreur, qu'il n'y a pas d'embauche prévue... Que des moyens détournés, parce que je ne suis pas gaulée comme un mannequin... Regardée de la tête aux pieds parce qu'obèse avec des jambes difformes. Recalée pour des travaux parce que ne correspond pas commercialement à l'image... ».

Les femmes en situation du handicap font face au rejet, à la fuite ou encore à l'évitement juste parce qu'elles sont différentes, suscitent de l'inquiétude, de la compassion ou de l'incompréhension (Pistorius, 2020). Lutter contre cette exclusion, cette culture qui produit chez elles des formes d'autocensures et changer cette attitude permettraient de leur offrir la possibilité de vivre décemment et d'être pleinement un actionneur en première ligne et non seulement un effecteur.

Il est important que les femmes trouvent leur place dans les disciplines scientifiques parce qu'elles sont capables et elles ont un formidable potentiel. Nul ne doute que des longues années seront encore nécessaires pour infléchir les préjugés et les actions qui désavantagent les femmes. Ce problème de fond est difficile à résoudre car il touche au poids des stéréotypes sociaux de genre et à des éléments dits organisationnels facilitant l'accès masculin à un modèle de carrière défini (Bian et al., 2017).

« Il ne s'agit pas d'être parfait. Il ne s'agit pas de savoir où mène notre route. Accepter d'être reconnu et entendu, de s'approprier son histoire singulière, de faire résonner sa voix véritable est une force. Et être disposé à rencontrer et à écouter l'autre est une grâce. Voilà quel est, à mes yeux, le chemin de notre devenir » (Michelle Obama, Devenir)

Selon Charles Gardou, Il n'y a ni vie minuscule ni vie majuscule il y a une vie partagée et commune. Une alliance, une communauté une union entre des compagnons, le fait d'exclure un seul d'entre eux engendre un appauvrissement de tissu communautaire.

La science n'est pas une discipline masculine, c'est une discipline universelle et le jeu de tout le monde.

Vers une parité scientifique idéale incluant les femmes en situation du handicap ...

# REMERCIEMENTS

Ce mémoire est le fruit de nombreuses années de travail. Une période riche en échanges et partage dont la finalité n'aurait pas été possible sans la participation de nombreuses personnes.

Je souhaite en premier lieu remercier chaleureusement mes directeurs de thèse Thierry-Marie Guerra et Philippe Pudlo qui m'ont encadré tout au long de cette aventure scientifique avec beaucoup de passion et de bienveillance. Qu'ils soient aussi remerciés pour leur gentillesse, leur disponibilité et pour les nombreux conseils stimulants qu'ils m'ont prodigués. Mes mots ne seront jamais à la hauteur du soutien qu'ils m'avaient accordé, j'aimerais ainsi leur exprimer ma gratitude et ma reconnaissance. Ce remerciement est une façon de vous honorer et de vous montrer à quel point vous avez été des directeurs magnifiques et des personnes formidables avec qui j'ai partagé des années inoubliables de ma carrière scientifique.

Je remercie les membres du jury Yann Morère et Nouredine Manamanni en qualité de rapporteurs et Emilie Simoneau et Nasser Rezzoug en qualité d'examinateurs pour les conseils pertinents et les remarques constructives quant à la relecture du manuscrit.

Je remercie professeur Laurent Dubar qui en plus de m'avoir accueilli dans son établissement dans des conditions excellentes, m'a fourni tous les éléments dont j'ai eu besoin pour mener à bien mes travaux de recherche et s'est assuré de mon intégration dans l'équipe. Je le remercie vivement pour sa réactivité et ses conseils judicieux vis-à-vis de l'élaboration de mon projet professionnel.

Je remercie les professeurs Jimmy Lauber, Yves Sallez, Serge Debernard et tous les membres du département automatique de m'avoir accueilli chaleureusement durant mes années de thèse, pour les conseils avisés et l'encadrement bienveillant.

Je remercie énormément Antoine Déquidt et Mathias Blandeau avec qui j'ai travaillé énormément à élaborer les modèles mécaniques et le paramétrage biomécanique, sans leur aide précieuse la tâche aurait été bien plus pénible. Ces personnes n'ont pas hésité à prendre de leur temps pour m'aider dans mes travaux de recherche et en répondant à toutes mes questions. C'est donc tout naturellement que je souhaite les remercier.

Je remercie Thierry Poulain et Gérard Conreur pour les nombreuses fois où je les ai sollicités pour des soucis informatiques et ils ont répondu favorablement, sans hésitation et avec un grand sourire. Je les salue pour leurs capacités extraordinaires et leurs expertises.

J'adresse mes sincères remerciements à Sébastien Delprat de m'avoir mis en contact avec Thierry-Marie Guerra pour mon projet de thèse et qui m'a appris, quand j'étais son étudiante, à aimer l'automatique et ses lois et surtout à choisir mon parcours d'automaticienne. Je remercie Anh-Tu Ngyuen pour les conseils stimulants et l'énergie positive.

Je remercie tout le personnel pédagogique et administratif (Isabelle, Mélanie, Josèphe, Katia, Sabine, Bénédicte, Maureen, Corrine, Christelle, Marie-Hélène ...) de l'université Polytechnique Hauts-De-France et du LAMIH pour la qualité de la formation dont j'ai bénéficié et l'attention particulière.

Je remercie mes amis scientifiques : Laura, Eugénie, Emilie, Kaouther, Amel, Valentien, Vinicius, Julia, Marie-Pierre et Bako pour les jolis moments conviviaux qu'on a partagés ensemble durant les restos-Off.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Daniel Coutellier d'avoir forcé la décision pour que je rejoigne l'ENSIAME dans le cadre d'une mobilité internationale depuis mon école d'origine l'ENIM à Monastir en 2016. Je remercie également Dominique Deneux d'avoir eu la gentillesse et l'amabilité de me chercher de l'aéroport de Paris Orly le 8 Septembre 2017 et surtout d'avoir eu la patience de m'attendre dans un climat pluvieux et un retard de 4 heures de vol.

Je remercie l'association femmes et sciences en particulier Marie-Noëlle Célérrier et Sylvaine Turc-Chièze pour l'encouragement et le soutien moral. Je garde pour toujours l'honneur de la Co-lauréate du prix Thierry Célérrier promotion 2022, ce prix me motive aujourd'hui à élargir le périmètre de mes activités sociales et scientifiques pour être à la hauteur de cette distinction prestigieuse.

Je remercie mes collègues avec qui j'ai partagé mon bureau tout au long de ma thèse : Ilyes, Michael, Shijie, Masoud, Marcia et Mohamed pour les beaux souvenirs et les moments inoubliables qu'on a vécus ensemble.

Un grand merci aux cellules handicap de l'UPHF : Redoine Abdoune relais handicap étudiants et Maria-Stella Piccigallo relais handicap personnels pour la réactivité, l'écoute et la prise en charge personnalisée et confidentielle.

Je remercie les agents de sécurité de l'UPHF qui m'ont suivi durant ma Co-diplomation ENSIAME-IAE sur les campus des Tertiales et du Mont Houy avec la fameuse phrase « Mais rassure-moi c'était bien toi ce matin de l'autre côté ! »

Je remercie mes rééducateurs (Delphine en Kinésithérapie, Anne-Sophie en ergothérapie, Esteban en activité physique adaptée, Bénédicte et Aude en Psychomotricité) sans oublier mes aides-soignants Mathieu, Maxime et Sylvie et mes infirmières Sophie, Suzy et Sandrine.

Je remercie infiniment ma famille pour le soutien émotionnel sans faille, l'amour, la patience et les sacrifices interminables. Ma mère mon ange gardien pour l'amour infini et l'encouragement continu, mon frère pour le soutien moral et les conseils judicieux et mon père pour l'oreille attentive et la confiance.

Je remercie chaleureusement mon époux pour l'avis critique, l'inspiration et l'amour inconditionnel qu'il me porte.

Une mention spéciale à mon chat « Simon » pour le réconfort qu'il m'a apporté pendant toutes ces longues nuits d'écriture.

Dans l'impossibilité de citer tous les noms, j'adresse mes remerciements à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont permis par leurs conseils et leurs savoir-faire à la réalisation de ce mémoire.

Avec un grand amour pour le LAMIH, l'UPHF et Valenciennes (59) ...



*« Une société inclusive est une société sans privilèges, sans exclusivités ni exclusions. Sans hiérarchisation. Sans ligne Maginot pour se protéger de ceux qui font l'épreuve d'un dysfonctionnement de leur corps ou de leur esprit, et épuisent leurs forces à résister au danger de néantisation. Ils n'ont pu choisir leur destin ; ils l'auraient souhaité mais ils n'ont pas eu cette latitude. Nul n'a le droit de les dépouiller de leur part légitime du patrimoine commun ; de les priver du droit à avoir des droits »*

## ABRÉVIATIONS

COM : Centre de Masse  
CRIR : Centre de Recherche Interdisciplinaire en Réhabilitation  
DDL : Degré de Liberté  
GAS : Globalement et Asymptotiquement Stable  
LMÉ : Lésion de la Moelle Épineuse  
LMI : Inégalités Linéaires Matricielles  
LPV : Linéaire à Paramètres Variant  
LTI : Linéaire à Temps Invariant  
LTV : Linéaire à Temps Variant  
MI : Membres Inférieurs  
MS : Membres Supérieurs  
OEI : Observateur à Entrées Inconnues  
PI : Proportionnel Intégral  
PMR : Personne à Mobilité Réduite  
q-LPV : quasi LPV  
T-S : Takagi-Sugeno  
S239 : Sujet numéro 239  
SNC : Système Nerveux Central

## NOTATIONS

Sommes convexes de matrices :

$$A_h = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i, \quad A_h^{-1} = \left( \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i \right)^{-1}, \quad A_{hv} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) v_j(z) A_{ij}$$

$$A_{hv^-} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k)) v_j(z(k-1)) A_{ij}.$$

L'astérisque (\*) est utilisé dans les expressions matricielles pour représenter les transposées des éléments symétriques. Pour les expressions linéaires, il représente la transposée des éléments situés à gauche du signe précédent, par exemple :

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (*) \\ B & C \end{bmatrix}, \quad A + B + A^T + B^T + C = A + B + (*) + C$$



## SYMBOLES

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$	L'ensemble des matrices réelles de dimensions $n \times m$
$A^T$	Transposé de la matrice $A$
$A^{-1}$	Inverse de la matrice symétrique $A$
$A > 0$	$A$ est une matrice symétrique définie positive
$A_i$	ième colonne de la matrice $A$
$I_n$	Matrice identité de dimension $n$
$I$	Matrice identité de dimension appropriée
$0_n$	Matrice à termes nuls de dimension $n$
$\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)$	Valeurs propres max et min de la matrice symétrique $A$
$\ a\  = \sqrt{a^T a}$	Norme 2 du vecteur $a \in \mathbb{R}^n$
$diag(A_1 \ A_2)$	Bloc diagonal d'une matrice composé des matrices $(A_1 \ A_2)$
$Rang(A)$	Rang de la matrice $A$

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

« Handicap est un mot, être handicapée est une réalité à plusieurs dimensions » (Hamonet, 2003)

## 1. Contexte et motivation

La notion du « Handicap » trouve son origine en 1660 dans l'expression « Hand In Cap » (la main dans le chapeau) désignant un jeu du XVI<sup>ème</sup> siècle au Royaume-Uni. Il s'agit d'un jeu répandu à Londres qui consiste à échanger des objets personnels de valeur inégale entre deux personnes. En France, le terme handicap a été adopté dans les années 1950 pour éviter le terme « incapacité » jugé comme un terme qui dévalorise la personne handicapée. Ensuite, le handicap a été conceptualisé à travers trois notions : le désavantage, l'incapacité et la déficience. La déficience se définit comme des altérations fonctionnelles, organiques ou corporelles qui résultent d'une maladie ou d'un trouble. L'incapacité appréhende la réduction (totale ou partielle) des activités volontaires et souligne les limites des capacités permettant d'accomplir ces activités. Le désavantage est une résultante de l'incapacité et de la déficience. La déficience est donc extériorisée, l'incapacité est objectivée tandis que le désavantage est socialisé (OMS, 1988).

D'après la Loi du 11 février 2005, art. 14 « Constitue un handicap, toute limitation d'activité ou restriction de participation à la vie en société subie dans son environnement par une personne en raison d'une altération substantielle, durable ou définitive d'une ou plusieurs fonctions physiques, sensorielles, mentales, cognitives ou psychiques, d'un polyhandicap ou d'un trouble de santé invalidant. ».

Le nombre des personnes en situation du handicap ne cesse d'augmenter et ceci s'explique par l'augmentation des maladies chroniques notamment les maladies de longue durée et le vieillissement de la société. L'organisation mondiale de la santé a recensé en 2023 plus de 1.3 milliard de personnes handicapées dans le monde. Une personne sur 6 est donc atteinte d'une forme de handicap, soit 16% de la population mondiale. 20% d'entre elles vivent avec des difficultés fonctionnelles au quotidien.

Certaines pathologies et atteintes musculaires provoquent une forme de handicap. Dans ce manuscrit, on se focalise sur une atteinte particulière de la moelle épinière appelée la lésion médullaire. La lésion médullaire engendre une perte partielle ou totale de la motricité et de la sensibilité en dessous du niveau lésionnel. La perte ou l'affaiblissement du contrôle musculaire et du retour sensoriel impacte négativement la stabilité posturale assise (Kirshblum et al., 2011). La réduction drastique du contrôle postural augmente les risques de chutes et des blessures associées (Xiang et al., 2006 ; Brotherton et al., 2007 ; Nelson et al., 2010). L'entraînement à préserver un équilibre assis figure parmi les priorités physiothérapeutiques dans le protocole de réadaptation. Étant donnée que l'activité locomotrice est réduite (voire quasiment perdue) en dessous du seuil lésionnel, les sujets blessés médullaires adoptent une position assise dans la majorité des exercices quotidiens et utilisent le fauteuil roulant pour assurer leurs déplacements. Aussi, le choix du fauteuil roulant doit se faire de manière judicieuse et appropriée afin d'équilibrer la position assise et de prévenir les complications morphologiques, physiologiques et cutanées susceptibles d'apparaître durant la phase post-lésionnelle. La récupération motrice et en particulier la récupération fonctionnelle est la première priorité des patients médullo-lésés. Celle-ci est prise en considération dans le protocole de réadaptation afin de maximiser l'autonomie lors des exercices quotidiens, maintenir les acquis et prévenir la raideur des muscles situés en dessous du seuil lésionnel. Les sujets médullo-lésés sont amenés à réapprendre différemment les

compétences de base telles que se laver, se vêtir mais aussi apprendre à utiliser les nouvelles technologies adaptatives (fauteuil roulant, ventilateurs mécaniques, ...). Ce réapprentissage s'accompagne de nombreuses complications d'ordre moteur, digestif et urologique ce qui affecte négativement la qualité de vie (Tulsky et al., 2015). La prise en charge des patients médullo-lésés est un continuum qui débute à la phase initiale et se poursuit tout au long de la vie du patient (Sow-Courant, 2019). Les objectifs de cette prise en charge, par le biais d'un projet précoce et individualisé, sont l'amélioration du pronostic vital et fonctionnel et la réintégration sociale et professionnelle. Cette prise en charge englobe la sollicitation des muscles sous-lésionnelles, la préservation d'un état orthopédique correcte et le renforcement du tronc et des membres supérieurs. Les patients lésés médullaires ont besoin d'apprendre des nouvelles techniques nécessaires à l'autonomie pour assurer les gestes de la vie quotidienne et le maniement du fauteuil roulant (Sow-Courant, 2019).

Pour répondre à ces besoins et afin de compenser la perte du contrôle musculaire engendrée par la lésion, les sujets lésés médullaires développent des nouvelles stratégies compensatoires pour se stabiliser en position assise en présence d'une perturbation (Milosevic et al., 2017). La stratégie de stabilisation est choisie en fonction des capacités résiduelles post-lésionnelles mais traduit également une posture permettant au sujet de se sentir en sécurité vis-à-vis de la perte d'équilibre (John et al., 2010). Les nouvelles stratégies de stabilisation adoptées, basées en particulier sur la sollicitation des membres supérieurs, mettent en évidence des efforts produits volontairement et passivement (Blandeau, 2018). La connaissance de ces efforts permettrait de mieux comprendre l'importance des différentes contributions afin de proposer, dans des futurs travaux, des techniques aidant au maintien de la stabilité assise. La détermination des efforts articulaires générés permet aux rééducateurs de suivre de près l'évolution du patient médullo-lésé et de l'orienter à apprendre des nouvelles stratégies (basée notamment sur ses capacités résiduelles) afin d'équilibrer sa position assise. Ces efforts internes concrétisent le progrès individuel et permettent de référencer les interventions prouvées efficaces.

Les efforts internes recherchés, en particulier les couples articulaires, ne sont pas mesurables directement à moins d'utiliser des capteurs invasifs qui sont éthiquement proscrits.

La méthode de la modélisation biomécanique permet d'accéder à des grandeurs mécaniques non accessibles expérimentalement comme ces efforts articulaires. Elle s'appuie sur des hypothèses et offre la possibilité de tester de nombreux paramètres morphologiques, biomécaniques et environnementaux (Jones et al., 2019).

Cette thèse poursuit la voie initiée dans les travaux de thèse de Mathias Blandeau en 2018. Le parti-pris était qu'un modèle de type biomécanique permettait de pouvoir reproduire les mouvements de personnes lésées médullaires. De cette reproduction des mouvements, pouvaient alors être extraites les variables non mesurables directement, et notamment les couples articulaires. La validation de cette méthodologie, alternative à la dynamique inverse, a d'abord été faite sur un modèle très simple de posture assise, le modèle « Head 2 Arms and Trunk » (H2AT).

Le H2AT s'apparente à un pendule inverse représentant le tronc auquel est associé un segment qui se déplace linéairement selon une articulation prismatique (censé représenter les mouvements de la tête et des 2 bras, figure 1). L'intérêt de ce modèle a été de comprendre comment mettre en place la méthodologie générale, qui restera identique dans notre cas et qui se décompose selon les étapes suivantes (une fois qu'un modèle biomécanique est disponible et renseigné) :

1. Partie simulation : les modèles reproduisant la posture assise des personnes lésées médullaires sont instables en boucle ouverte, une étape de stabilisation est nécessaire pour réaliser des simulations. Le domaine de stabilisation sera forcément « faible » puisque le tronc (entrée principale en termes de couple appliqué) n'est pas (ou peu) mobilisable pour la commande. Néanmoins, la tâche est facilitée par le fait que la commande mise en œuvre est de type retour d'état. Effectivement, l'humain utilise des boucles pour réaliser ses mouvements qui suppose une connaissance de l'état de toutes les variables internes.
2. Partie simulation : une fois le modèle stabilisé, mettre en œuvre un observateur sur la base du modèle biomécanique étudié, en prenant soin de ne pas « réduire » le modèle (ni linéarisation, ni simplification) afin de conserver toutes ses propriétés. Cet observateur doit de plus « remonter » aux entrées non mesurées que sont les couples articulaires. Il faut ensuite garantir la convergence de l'erreur d'état en n'utilisant que les mesures d'angle articulaire.
3. Partie essais expérimentaux : montrer que la méthodologie permet d'obtenir des états et des couples articulaires « cohérents » avec les essais réalisés. Idéalement, il faudrait pouvoir accéder à une validation complète incluant une connaissance des couples produits. Impossible à réaliser sur un humain, un mannequin complètement équipé serait une solution parfaite.

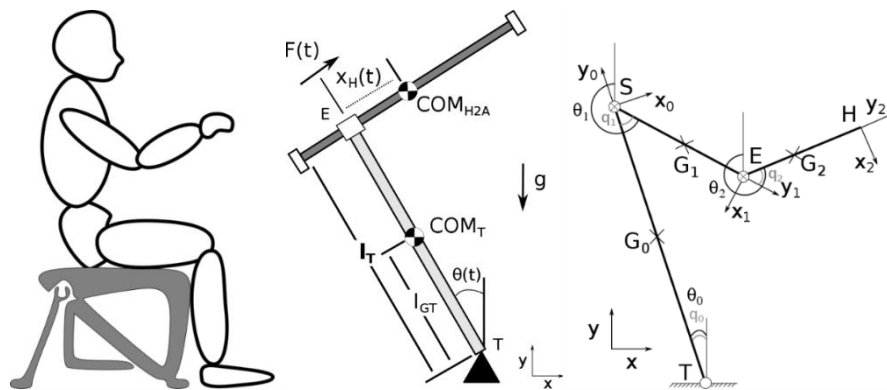


Figure 1: posture assise, les modèles H2AT (centre) et S3S-2D (droite) (Blandeau, 2018)

Cette méthodologie suppose donc de garder des modèles non linéaires. Pour ce faire une description selon un formalisme dit quasi-LPV (Linéaire à Paramètres Variants) (Boyd et al. 1994) ou de Takagi-Sugeno (Takagi et Sugeno, 1985) est utilisée. Elle correspond à décrire les modèles non linéaires de façon exacte dans un compact de l'espace d'état à partir de modèles dits polytopiques. Cette version polytopique des modèles non linéaires permet alors de faire appel à des outils de résolution numérique efficaces basés sur des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). Le nombre de sommets du polytope est directement lié à la complexité du modèle, il croît en  $2^{nl}$  si  $nl$  représente le nombre de non linéarités à traiter pour le modèle. Il faut noter de suite une limitation importante : les solveurs ne sont compatibles qu'avec un nombre de LMI et d'inconnues à chercher « raisonnables » (ce qualificatif sera explicité sur les conditions mises en œuvre dans le manuscrit).

Cette méthodologie a ensuite été appliquée sur un modèle plus proche d'une réalité anatomique baptisé « Seated-3-Segments » (Blandeau, 2018) et donc plus complexe. Il s'agit d'un triple pendule inverse tronc, bras et avant-bras (figure 1). Sur ce modèle, un observateur de type PI (Koenig et Mammar, 2002) synthétisé dans le domaine discret a été obtenu (Blandeau, 2018) et testé sur des données expérimentales. Nos travaux démarrent à partir de ces résultats avec une première remarque importante : la synthèse par contraintes LMI du PI-observateur discret flirte avec la limite des solveurs

actuels. Le nombre de sommets du polytope pour le modèle S3S-2D est  $2^7 = 128$  qui correspond également au nombre de contraintes LMI, les matrices sont de taille 12 et le nombre de variables à rechercher est 14004. Ce qu'indique cette remarque est qu'il est impossible d'enrichir le modèle S3S-2D en rajoutant des degrés de liberté (deuxième bras, rotations etc.) en adoptant la même stratégie de synthèse des observateurs.

## 2. Les Objectifs de la thèse

Sachant que le modèle S3S-2D suppose une symétrie des bras et est restreint au plan sagittal, il ne peut pas expliquer et reproduire l'ensemble des stratégies possibles utilisées par les personnes lésées médullaires en position assise. L'objectif principal de cette thèse est de pouvoir enrichir les modèles précédents pour pouvoir analyser d'autres types de mouvements notamment des mouvements asymétriques observés dans le cadre expérimental des travaux de Blandeau (2018). La méthodologie générale (points 1 à 3 évoqués précédemment) est conservée et le principal challenge est de savoir comment éviter les problèmes numériques dus aux solveurs, tout en garantissant des observateurs bâtis sur des modèles non linéaires de plus en plus complexes.

Le premier chapitre présente le cadre bibliographique de l'étude. Il présente une description du rachis et son rôle dans le maintien du contrôle postural. Il présente également les conséquences de la lésion médullaire sur le système stabilisateur et souligne la différence entre la position assise asymptomatique et la position assise chez les sujets blessés médullaires. On évoque également dans le premier chapitre l'approche de la dynamique inverse qui permet d'estimer les efforts articulaires, ses avantages et ses limites, et on présente les premiers modèles de la stabilité assise, issus des travaux de Blandeau (2018), où l'estimation des efforts articulaires a été faite via une approche alternative à la dynamique inverse basée sur les observateurs.

Le chapitre 2 rappelle d'abord les apports précédents des travaux de Mathias Blandeau (2018). Il balaye la méthodologie décrite précédemment : obtention du modèle, stabilisation par une loi de commande par retour d'état et obtention d'un PI-observateur permettant de reconstruire l'état et les entrées non mesurées (les couples articulaires). La synthèse avait été réalisée dans le domaine discret pour « contourner » le problème difficile des variables de prémisse non mesurées. La première contribution du travail est de proposer une synthèse dans le domaine continu qui permet de résoudre sur le modèle S3S-2D ce problème de variables de prémisse non mesurées. En dehors de l'intérêt effectif d'avoir résolu le problème en continu, la méthode utilisée dans le cadre de ce passage en continu sera utile et réutilisée pour les modèles plus complexes. Bien entendu, les observateurs obtenus sont parfaitement alignés sur ceux synthétisés dans le cas discret et donnent des résultats en tous points similaires, aussi bien en simulation que sur les données expérimentales.

Le problème de l'enrichissement du modèle S3S-2D ne pouvant pas suivre la même synthèse, dû à la complexité du problème à résoudre, le chapitre 3 développe une nouvelle approche. Celle-ci est basée sur une décomposition en cascade du modèle. Pour la valider, on a décidé de repartir de l'existant c'est-à-dire du modèle S3S-2D. La décomposition en cascade est parfaitement exacte pour le modèle, mais son intérêt est de permettre de découpler le problème d'observation en 2 sous-problèmes distincts qui eux réduisent de façon importante la complexité du problème à résoudre. Néanmoins, il reste à démontrer qu'il y a bien convergence asymptotique de l'erreur de convergence de l'état global (c'est-à-dire sur le modèle complet S3S-2D) quand on utilise cette cascade de 2 observateurs. Un résultat théorique est donné dans ce sens, sous des hypothèses de bornitude. Enfin, comme pour le

chapitre précédent les résultats de simulation et sur données expérimentales coïncident parfaitement avec ceux des observateurs globaux, en discret et en continu.

Munis de la méthodologie globale et cette possibilité d'utiliser des observateurs en cascade, le chapitre 4 propose d'étendre le modèle S3S-2D en rajoutant un deuxième bras, modèle appelé « Trunk-2-arms » (T2A-2D) avec 5 degrés de liberté. L'extension utilise alors un troisième observateur et on montre à nouveau que la convergence de l'état global du modèle T2A-2D est garantie par les observateurs en cascade. Ce nouveau résultat permet donc de tester de nouvelles stratégies des personnes lésées médullaires, notamment celles qui ont des stratégies dissymétriques des membres supérieurs.

Les résultats obtenus permettent d'envisager maintenant le rajout de nouveaux degrés de liberté (rotations par exemple) avec une certaine confiance. Ce point ainsi qu'une validation possible avec un mannequin complètement instrumenté font l'objet du chapitre conclusion et perspectives.

# **CHAPITRE 1 : LA LÉSION MEDULLAIRE : IMPACT SUR LE CONTROLE POSTURAL ET MODELISATION BIOMECHANIQUE**

I. Introduction	24
II. La position assise chez les sujets asymptomatiques	24
II.1. Le rachis vertébral	26
II.2. Le modèle de la stabilité vertébrale	28
III. La position assise chez les sujets lésés médullaires	29
III.1. La lésion de la moelle épinière	29
III.2. Les conséquences de la LME	30
III.3. La position assise chez les sujets vivant avec une LME	33
III.4. Les stratégies compensatoires chez les sujets vivant avec une LME	34
III.5. L'optimisation de l'équilibre assis chez les sujets vivant avec une LME	37
IV. La modélisation de la station assise	40
IV.1. La Dynamique inverse	40
IV.2. Les modèles en chaînes segmentaires	42
IV.3. L'approche d'estimation par observation	43
IV.3.1. Le modèle H2AT	45
IV.3.2. Le modèle S3S-2D	47
V. Conclusion du chapitre 1	48

## I. Introduction

La posture est le maintien du corps dans une position déterminée (Pelissier et al., 1993). Elle caractérise les différentes positions et orientations des segments constitutifs du corps humain dans l'espace (Pérennou, 2012). La posture définit aussi une position particulière des segments les uns par rapport aux autres à un instant donné (Massion, 1994 ; Winter, 1995) et elle dépend de l'ensemble des processus neurophysiologiques qui contrôlent une activité motrice.

Le contrôle postural est défini par les mécanismes nerveux qui régulent les variations d'attitudes de la posture, qu'ils soient d'ordre intentionnels ou non. Le contrôle postural peut se référer au maintien d'une position d'une partie du corps (ou du corps entier) en respect soit à une référence externe comme l'environnement soit au corps lui-même (Massion et al., 1998). Le contrôle postural possède deux objectifs : le premier correspond au maintien de l'équilibre, ceci signifie le maintien du centre de pression et de la projection du centre de gravité dans la surface de support et le second correspond à la création d'une interface entre la perception (la compréhension des informations que les organes sensoriels envoient au cerveau) et l'action (Hadders-Algra, 2005). Deux fonctions sont attribuées au contrôle postural : une fonction liée à l'orientation posturale et une fonction liée à la stabilité posturale appelée la fonction de préservation de l'équilibre postural (Gandemer, 2016). Les différents capteurs sensoriels du corps fournissent les informations nécessaires à l'ajustement d'une activité musculaire et au contrôle postural. Les organes impliqués dans le contrôle posturale sont entre autres : l'oreille interne (Nashner and McCollum, 1985), la vision (Prieto et al., 1996) ainsi que les capteurs neuromusculaires (Johansson et al., 1988).

Le maintien de la posture vise à rechercher l'équilibre. A cet effet, l'organisme doit lutter contre les contraintes internes (principalement des perturbations liées au déplacement d'un segment corporel lors d'un mouvement volontaire) au travers du tonus musculaire et des réflexes posturaux et les contraintes externes comme la gravité et les perturbations externes qui proviennent de l'environnement (Bouisset et Zattara, 1987). La posture assure deux fonctions : une fonction antigravité qui consiste à contrer l'action des forces gravitaires et une fonction liée à l'environnement extérieur (Massion, 1994). La fonction antigravité s'appuie sur les capteurs oculaires (Roll, 1988), les capteurs vestibulaires (Vuillerme et al., 2001), ainsi que les capteurs situés au niveau des articulations impliqués dans la posture (Dietz, 1994). Le rôle de ces capteurs est de mesurer les effets de la gravité sur les différents segments corporels. La fonction liée à l'environnement extérieur s'appuie quant à elle sur des capteurs spécialisés pour identifier la position du corps, ainsi que l'orientation de ses segments dans l'espace. On note que le choix d'un segment anatomique à stabiliser dépend des contraintes dynamiques liées à l'exécution du mouvement et que la stabilisation d'un segment n'exclut pas la stabilisation de l'autre (Assaiante, 2011).

Il existe un grand nombre de postures adoptées par le corps humain, parmi elles, la station assise.

## II. La position assise chez les sujets asymptomatiques

La position assise est une station de repos dans laquelle le corps humain s'appuie sur les fesses ou l'arrière des cuisses avec un tronc vertical. Le bébé apprend à maintenir une position assise avant de savoir marcher, il s'agit d'une adaptation biomécanique du corps humain (Lelong, 1988). Le maintien de la position assise requière une contraction musculaire stationnaire qui empêche le corps de s'effondrer sous l'effet de la pesanteur. Les muscles qui interviennent pour assurer la station assise ainsi que leur niveau de sollicitation dépendent de la posture adoptée.



En effet, le maintien de la position assise redressée par exemple requière une activité musculaire plus importante des muscles extenseurs de la colonne vertébrale par rapport à la station assise dite naturelle. Cette différence provient de la position du tronc caractérisée par une cyphose (c'est-à-dire une courbure du rachis à convexité arrière) au cours de la position assise naturelle alors que la position assise redressée nécessite une rigidité volontaire du tronc associée à une réduction de la cyphose vertébrale (Gaudez et Aptel, 2008).

La mobilité du tronc joue un rôle significatif dans le maintien de la position assise et dans plusieurs activités motrices nécessaires à l'autonomie fonctionnelle (la capacité à réaliser une ou plusieurs activités sans avoir recours à une aide extérieure (Ennuyer, 2013)).

Le tronc représente plus de 60% de la masse totale du corps humain. Le tronc est un segment corporel comprenant le thorax, l'abdomen et le bassin. D'un point de vue squelettique le tronc est composé de la colonne vertébrale, de la cage thoracique, des clavicules, des omoplates et des os coxaux. La colonne vertébrale constitue l'armature du tronc et assure la protection du système nerveux médullaire. L'orientation posturale se produit via les mouvements effectués par la tête et le tronc et est permise par la verticale subjective que l'organisme reconstruit selon les informations graviceptives, les informations visuelles ainsi que les informations tactiles (données par les récepteurs de la peau) (Pérennou, 2012). Le contrôle du tronc doit être acquis avant de pouvoir contrôler le mouvement des membres inférieurs et supérieurs, ce mouvement est donc lié aux mouvements fonctionnels (Verheyden et al., 2006). Le contrôle du tronc désigne la capacité à maintenir le corps dans une posture dressée (assurer l'équilibre du corps) et à adapter le transfert du poids (Verheyden et al., 2004). Ces fonctions nécessitent une capacité sensorimotrice du tronc (Ryerson et al., 2008) et sont assurées d'une part par des forces motrices impliquées dans les mouvements volontaires du tronc (Sapsford et Hodges, 2001) et d'autre part, par une réponse automatique aux perturbations non attendues du corps ou des membres supérieurs (Moseley et al., 2003) afin de préserver l'équilibre (Servant-Laval, 2006).

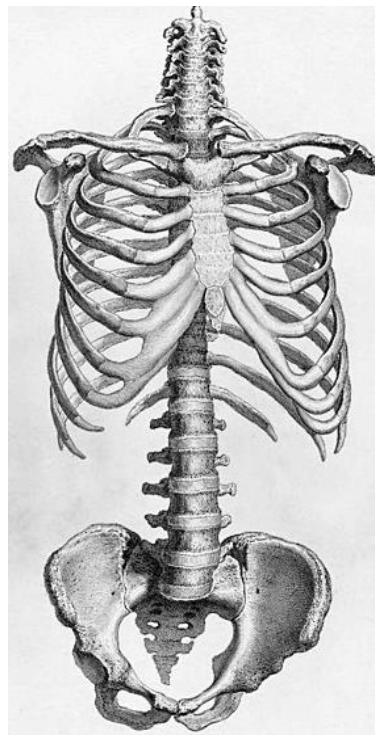


Figure 2: le squelette du tronc humain (Cheselden, 1733)

Le tronc possède trois fonctions stratégiques (Nicard, 2016) :

- Un rôle fonctionnel : la majorité des organes essentiels au fonctionnement du corps humain sont situés au niveau du tronc.
- Un rôle protecteur : les organes internes sont protégés par le squelette du tronc notamment via la cage thoracique et la colonne vertébrale.
- Un rôle de mobilité : les muscles et la structure osseuse du tronc jouent un rôle important dans la mobilité. Par ailleurs, le tronc a l'impact mécanique le plus important dans le contrôle de la position assise.

La position assise vise à maintenir l'horizontalité de la tête (Kapandji, 2005b). Les courbures du rachis permettent d'ajuster la posture assise avec des modifications musculaires (O'Sullivan et al., 2006). La position assise s'appuie essentiellement sur la structure osseuse du tronc, en particulier le rachis. Afin de comprendre le mécanisme de la position assise, une description du rachis vertébral est essentielle.

## II.1. Le rachis vertébral

Le rachis est un système multi articulaire contrôlé par les muscles qui supportent la tête et le tronc pendant les activités quotidiennes et durant le maintien de la posture. Le rachis est une structure osseuse composée de 33 vertèbres empilées verticalement les unes sur les autres. Le rachis assure une double fonction :

- Une fonction mécanique : le maintien de la station érigée et assise par l'intermédiaire des mouvements du tronc. Le rachis assure le maintien de la tête dans l'alignement du bassin en positions debout et assise. Les structures anatomiques intervertébrales (disques et ligaments) permettent au rachis de se mouvoir sans s'affaisser (s'incliner, se pencher, se tourner). Le rachis assure également le transfert des efforts entre le haut du corps et le bassin.
- Une fonction neurologique : par sa solidité, le rachis assure la protection de la moelle épinière et les nerfs de la queue de cheval (les racines nerveuses à l'extrémité de la moelle épinière à destination des jambes et du périnée) dans le canal vertébral.

Le rachis vertébral est divisé en quatre régions (William et al., 2013) :

Le rachis cervical est composé de 7 vertèbres (C1 - C7) et s'articule avec la tête en haut et le rachis dorsal en bas. Il est très mobile et assure la protection de la moelle épinière au niveau du cou. Les mouvements du rachis cervical sont la rotation axiale, la flexion/l'extension et l'inflexion latérale (White et Panjabi, 1990). Le rachis cervical possède un angle convexe antérieur dans le plan sagittal et est essentiel dans la mobilité et le support de la tête. Les deux premières vertèbres du rachis cervical (C1 et C2) sont appelées l'axis et l'atlas, leur particularité est qu'elles ont une forme distincte (Netter et Scott, 2019) comparée aux autres vertèbres (C3 à L5), qui ont la même forme générale. Le rachis cervical possède plusieurs ligaments spinaux (tissu fibreux résistant assurant la réunion des os et des cartilages d'une articulation) qui permettent de restreindre le mouvement du rachis et protègent donc la moelle épinière cervicale (White et Panjabi, 1990).

Le rachis dorsal (thoracique) est composé de 12 vertèbres (TH1 ou D1 – TH12 ou D12) et s'articule avec le rachis cervical en haut, le rachis lombaire en bas et les côtes latéralement. Le rachis thoracique assure la protection des organes de la cage thoracique (cœur et poumons) et la moelle épinière thoracique. Le rachis dorsal est peu mobile et donc il est rarement exposé aux lésions dégénératives. Le rachis thoracique permet, par sa rigidité et sa stabilité, de transmettre les forces le long du rachis.

Les éléments de la cage thoracique s'appuient sur sa structure osseuse pour assurer le mécanisme respiratoire (Prométhée, 2006).

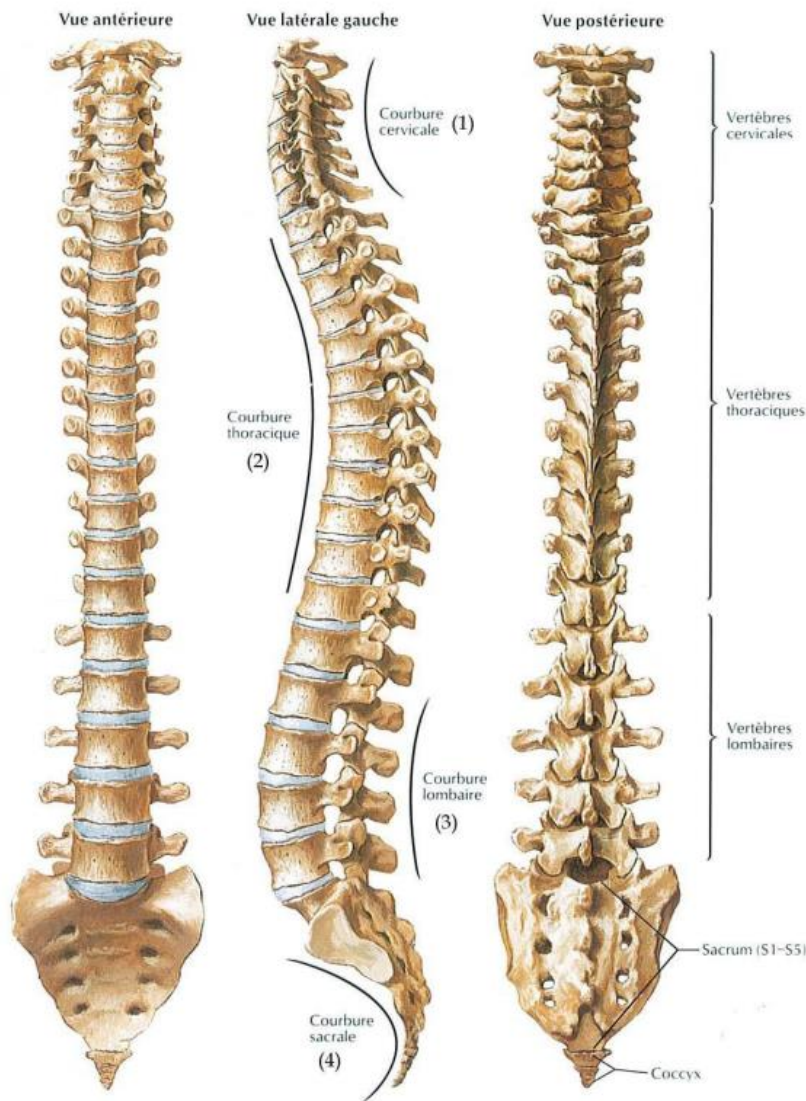
Le rachis lombaire est composé de 5 vertèbres (L1 - L5) (colonne mobile) et s'articule avec le rachis dorsal en haut et le sacrum en bas. Il est très mobile et est le plus exposé aux lésions dégénératives. La moelle épinière se termine à l'étage L1 - L2. Le rachis lombaire contient et protège donc les racines de la queue de cheval responsable de la motricité et la sensibilité des membres inférieurs et du périnée (zone qui se situe entre les organes génitaux externes et l'anus) et protège les nerfs spinaux à partir de L1. Le rachis lombaire supporte le poids des autres vertèbres, ainsi que le poids du haut du corps. Comme toutes les vertèbres mobiles, les vertèbres lombaires sont séparées par un petit disque de cartilage fibreux (tissu conjonctif élastique et dense qui se trouve à la jonction entre de nombreuses pièces osseuses de la structure squelettique). Ce disque absorbe les chocs et protège les vertèbres contre le glissement (Zhao et al., 2005). Le rachis lombaire a une fonction d'amortisseur et répartit les charges entre le bassin et le thorax. Le segment L4 à L5 est particulièrement fragile à la dégénérescence en raison de son niveau vertébral : situé dans le bas du dos et dans le « creux » au-dessus du pli inter fessier, le segment L4 – L5 subit une pression importante comparée aux autres vertèbres lombaires en raison de sa structure anatomique.

Le rachis sacro-coccyx est composé de 5 vertèbres (S1 – S5) (colonne fixe) soudées entre elles et s'articule avec le rachis lombaire en haut et le coccyx en bas (4 vertèbres : Co1 – Co4). Le sacrum réunit le bassin à la colonne vertébrale et protège, grâce à son canal sacral, les nerfs rachidiens.

Les 24 premières vertèbres du rachis sont flexibles et mobiles, elles sont considérées comme des « vraies » vertèbres. Tandis que le sacrum et le coccyx sont fixes et sont considérés comme des « fausses » vertèbres.

La forme des vertèbres est variable en fonction avec leur localisation. Au niveau cervical, il existe des petites vertèbres ayant une mobilité importante et par conséquent elles sont vulnérables aux fractures comparées au niveau thoracique (Nightingale et al., 1996). La région thoracique n'est pas exempte de vulnérabilité car les vertèbres associées sont plus petites que celles de la région lombaire, ce qui les rend plus sensibles à la compression. Par ailleurs, la largeur du canal est plus petite dans la région thoracique, ce qui prédispose encore plus la moelle épinière aux blessures dans cette région (Miele et al., 2012).

Dans le plan frontal (plan qui divise le corps en deux parties symétriques : ventrale et dorsale), le rachis est médian et vertical. Dans le plan sagittal (plan vertical passant par la ligne médiane du corps et le divise en deux régions symétriques : gauche et droite), les courbures thoracique et sacrale sont concaves antérieurement, on définit alors la cyphose physiologique tandis que les courbures cervicale et lombaire sont concaves postérieurement, on définit alors la lordose physiologique. Ces courbures du rachis (figure 3) lui permettent d'avoir une grande flexibilité et contribuent à réduire l'impact des chocs lors d'un traumatisme (White et Panjabi, 1990). Ces courbures sont anatomiquement alternées, le rachis lombaire en lordose est compensé par le rachis thoracique en cyphose. Cette alternance assure l'équilibre économique, qui désigne le maintien de la tête au-dessus du bassin avec un minimum de travail musculaire. L'équilibre et l'harmonie entre ces courbures permettent au rachis de contenir plus efficacement les contraintes, et agissent comme un amortisseur (Zhao et al., 2005).



**Figure 3: le rachis vertébral (Netter, 2004)**

Les expérimentations menées par Lucas et Bresler (1961), sur la colonne vertébrale isolée et chargée en son sommet, ont permis de montrer que la partie thoraco-lombaire est instable si les charges de compression excèdent 20 N. Les travaux de Crisco et Panjabi (1991) et Shirazi-Adl et Parnianpour (1993), quant à eux, ont démontré que le rachis lombaire sans muscles est instable si les charges en compression excèdent 100 N. Ces valeurs définissent la force critique de flambement (instabilité de forme) qui décrit la stabilité de la colonne vertébrale. Ainsi, afin de stabiliser la colonne vertébrale pendant les activités quotidiennes, un recrutement musculaire est requis (Bergmark, 1989).

## II.2. Le modèle de la stabilité vertébrale

Les mécanismes de la stabilisation du rachis visent à suppléer la colonne vertébrale afin de prévenir tout changement de la posture du rachis, en raison d'une perturbation mécanique ou physiologique prévisible ou non (White and Panjabi, 1978). Pour assurer cette fonction plusieurs sous-systèmes rachidiens agissent en interaction dans le but de préserver la stabilité vertébrale.

Selon les résultats de Panjabi (1992a) et (1992b), le rachis asymptomatique est maintenu par trois sous-systèmes :

- Le système actif appelé aussi système musculo-tendineux : il comporte les muscles fléchisseurs du rachis (comme les muscles abdominaux) et les muscles du dos érecteurs du rachis (les muscles qui permettent l'extension du rachis) qui vont agir en synergie.
- Le système neuronal : il reçoit les informations sensorielles et commande le sous-système actif. Le rôle du système neuronal est de trouver un compromis entre stabilité, force et mobilité du rachis. Lorsque le système neuronal est lésé, le contrôle et l'activation des muscles changent ce qui impacte négativement les mouvements de la colonne vertébrale (Biely, 2006). Le système neuronal assure le transport des influx nerveux efférents et afférents.
- Le système passif appelé aussi système ostéoligamentaire : il est caractérisé par une résistance mécanique au mouvement souvent négligée et est composé des tissus et os qui contribuent juste mécaniquement (sans contrôle) à maintenir l'intégrité du rachis.

Selon le modèle de Panjabi, la stabilité du rachis dépend des trois systèmes et de leurs interactions. Si un des trois systèmes est lésé, il peut en résulter une instabilité clinique qui impactera le maintien de la position assise ainsi que la qualité de vie du patient d'une manière générale. L'instabilité clinique est l'incapacité du rachis à conserver sa mobilité naturelle, ce qui peut induire des déformations, des douleurs et des troubles neurologiques (White et Panjabi, 1990). Cette instabilité entraîne une mobilité importante entre les vertèbres, ce qui induit progressivement une dégénérescence articulaire capable d'affecter les structures du système nerveux (Panjabi, 1992).

Le modèle de Panjabi permet de conceptualiser la stabilité vertébrale via l'interaction entre trois systèmes (actif : muscles et tendons, passif : vertèbres, ligaments et disques et nerveux : les nerfs et le système nerveux central (SNC)). Panjabi a mis en évidence l'importance des structures passives du tronc dans la stabilité vertébrale (Solomonow et al., 1999).

Après cette description du rachis et des sous-systèmes rachidiens qui contrôlent la position assise asymptomatique, il convient de s'interroger sur l'impact d'une lésion médullaire sur le système stabilisateur ainsi que la différence entre la position assise asymptomatique et la position assise chez les sujets lésés médullaires.

### III. La position assise chez les sujets lésés médullaires

La moelle épinière constitue un prolongement du tronc cérébral et s'étend chez l'être humain jusqu'à la première ou la deuxième vertèbre lombaire. Elle assure la communication bidirectionnelle entre le corps et le cerveau. La moelle épinière prend la forme de la colonne vertébrale et par conséquent elle présente une courbure variable en fonction de la personne ainsi que de la position vertébrale dans laquelle celle-ci se trouve (Taso et al., 2014). Une lésion de la moelle épinière a des conséquences variables en fonction du niveau de la lésion et de sa sévérité et menace directement la transmission des messages sensoriels et musculaires.

Comprendre la position assise chez les sujets lésés médullaires nécessite en amont de décrire la lésion médullaire et ses conséquences sensorimotrices et secondaires.

#### III.1. La lésion de la moelle épinière

La lésion médullaire est l'endommagement d'une partie des tissus de la moelle spinale constitutifs, ce qui induit un déficit moteur et/ou sensitif. En France, son incidence annuelle est comprise entre 1000

et 1500, soit en moyenne 20 nouvelles personnes par million d'habitants. La population des sujets lésés médullaires est estimée à plus de 25 000 personnes en 2002 (Désert, 2002). Ce nombre a triplé en 2022 avec environs 90 000 personnes blessées médullaires. Cette augmentation considérable s'explique d'une part par l'augmentation des maladies chroniques notamment les maladies de longue durée et d'autre part par le vieillissement de la société. L'espérance de vie des personnes lésées médullaires a augmenté ces dernières années, mais demeure inférieure à celle de la population en général (Beuret-Blanquart et al., 2003).

La première cause d'une lésion médullaire est accidentelle (les accidents de la route ou sportifs, et les chutes), Néanmoins, il existe également des cas où la lésion est non traumatique. Les lésions non traumatiques font suite généralement à des maladies congénitales, de l'arthrose vertébrale et des maladies inflammatoires comme la sclérose en plaques. Les lésions médullaires non traumatiques représentent un pourcentage considérable des patients (Ronen et al., 2004).

La lésion médullaire comprend deux phases étroitement liées (Tator, 1995), la première phase constitue la blessure initiale, appelée blessure primaire, qui survient à l'issue d'un accident ou d'un traumatisme, qui va introduire une rupture d'axones (prolongement du corps cellulaire du neurone qui véhicule l'influx nerveux) ainsi que la mort des neurones. La deuxième phase, dite lésion secondaire, rassemble les différentes complications qui en découlent (Dumont et al., 2001). La blessure secondaire est causée par plusieurs facteurs comme la présence d'œdème et l'hémorragie (Bailes et al. 2007) et est le résultat d'événements biochimiques, vasculaires et cellulaires qui débute suite au traumatisme primaire (Oyinbo, 2011). La blessure peut être aggravée par des facteurs externes comme le transport du patient et le délai d'intervention (Engsberg et al., 2013).

L'atteinte musculaire résultante est souvent permanente et à l'origine de plusieurs formes de handicap sévère. La lésion entraîne également des troubles secondaires capables d'impacter l'activité sociale, la qualité de vie ainsi que l'employabilité du patient (Branco et al., 2007). La récupération motrice est définie par les patients comme la priorité fonctionnelle la plus importante (Simpson et al., 2012).

La lésion de la moelle épinière (LME) affecte la conduction des signaux sensoriels et musculaires. Les neurones touchés par la blessure ne peuvent plus véhiculer les informations nerveuses. Il existe deux types de lésion : une lésion incomplète si une partie du message nerveux est transmise et une lésion complète si aucun message nerveux n'est transmis en dessous du niveau lésionnel. Une personne vivant avec une LME est donc incapable de recruter, d'une manière volontaire, les muscles en dessous du niveau lésionnel et est confiné dans la majorité des cas en fauteuil roulant. Le risque de mortalité est aussi élevé en fonction de la localisation de la lésion et de sa gravité, ainsi que de la disponibilité des soins médicaux dispensés. Les symptômes de la lésion médullaire dépendent de la sévérité de la lésion (complète ou incomplète) ainsi que de son niveau lésionnel (cervical, thoracique, lombaire ou sacré). Toutes les fonctions, dont le contrôle est situé en dessous du seuil lésionnel, sont affectées. Plus la blessure est haute et complète, plus l'atteinte associée est importante.

Une atteinte de la moelle épinière ne provoque pas de troubles moteurs ou sensitifs au niveau de la tête, étant donné que celle-ci est commandée par les nerfs crâniens.

### III.2. Les conséquences de la LME

La lésion médullaire est caractérisée par deux types de contextes cliniques (De Morand, 2010) :

- La paraplégie résulte d'une atteinte médullaire thoracique ou lombaire (TH1 - L2). Au sens strict, la paraplégie désigne une paralysie des membres inférieurs, mais en pratique la

paraplégie est une paralysie des membres inférieurs qui peut s'étendre, en fonction de l'étage lésé, au tronc.

- La tétraplégie est une atteinte des fonctions motrices et/ou sensitives des segments médullaires cervicaux. Elle peut affecter selon le seuil lésionnel, tout ou partie des membres inférieurs, du tronc, des membres supérieurs et des organes pelviens.

L'espérance de vie des sujets paraplégiques et tétraplégiques ont été estimées à 84% et 70% respectivement comparée à l'espérance de vie d'un sujet asymptomatique (Yeo et al., 1998).

Les conséquences d'une LME dépendent de l'étage lésé et de l'ampleur de la blessure. Concrètement, dans le cas d'une blessure médullaire thoracique (TH6 – TH12), les informations motrices en provenance du cerveau peuvent être véhiculées au travers de la moelle épinière et atteindre les membres supérieurs. En revanche, les informations à destination des membres inférieurs sont incapables de franchir l'étage lésionnel et par conséquent aucun mouvement volontaire ne peut être produit. Les sujets atteints d'une lésion thoracique basse (TH9 - TH12) ont un contrôle du tronc et un certain contrôle des muscles abdominaux. La lésion engendre également une spasticité, résultant d'une blessure des motoneurones supérieurs ainsi qu'un contrôle sensorimoteur désordonné (Pandyan et al., 2005).

Une lésion médullaire complète engendre une paralysie totale et par conséquent tous les mouvements contrôlés dans la zone sous lésionnelle sont impossibles. Une lésion médullaire incomplète entraîne une parésie qui permet tout de même quelques mouvements volontaires en dessous du seuil lésionnel, mais ceux-ci demeurent de faible amplitude (Pierret, 2012). Plus le seuil lésionnel est haut, plus le nombre de muscles paralysés est considérable. Les programmes de réentraînement à la marche appareillée sont recommandés pour les sujets paraplégiques. La marche appareillée est substituée en fonction de la gravité de la lésion par des systèmes passifs basés sur la verticalisation qui vise à réduire la perte calcique et à adapter l'orthostatisme (Dauty et al., 2000).

Deux à trois ans après la lésion, les sujets atteints vont observer des modifications à la fois physiologiques et morphologiques importantes dont on cite à titre indicatif :

- La diminution de la densité osseuse en dessous du seuil lésionnel (Lee et al., 1997 ; Bauman et al., 1999 ; Dauty et al., 2000)
- L'accroissement de la concentration de tissus graisseux dans les muscles (Maggioni et al., 2003 ; Spungen, 2000)
- L'atrophie musculaire définie par la diminution de la quantité de fibre et de l'aire musculaire à l'intérieur des muscles (Castro, Apple, Jr, Hillegass et al., 1999 ; Castro, Apple Jr, Staron et al., 1999)

Selon le degré de l'atteinte lésionnelle et sa localisation, les sujets atteints peuvent ressentir le toucher sans être sensibles à la douleur. Cette absence de sensibilité augmente le risque de coupures et brûlures accidentelles. Par ailleurs, les sujets atteints ne sont plus en mesure de savoir où se situent leurs segments corporels et doivent par conséquent visualiser leurs membres inférieurs, par exemple dans le cas d'une paraplégie, pour pouvoir les localiser (Désert, 2002).

En plus des troubles sensorimoteurs, la lésion engendre divers dysfonctionnements au niveau du système nerveux végétatif (ou système nerveux autonome, il permet de réguler les fonctions involontaires de l'organisme comme la respiration, la circulation veineuse et la digestion). La blessure induit une instabilité cardio-vasculaire notamment lorsque celle-ci est située à un étage cervical ou

thoracique haut. Par ailleurs, la diminution du retour veineux en raison de la contraction des muscles squelettiques et le manque de mobilité augmente le risque de thromboses veineuses qui peuvent conduire à des complications pulmonaires comme une embolie pulmonaire (Yeo et al., 1998). Les complications cardiovasculaires représentent une des premières causes de décès chez les sujets blessés médullaires présentant des troubles respiratoires (De vivo et al., 1999). La prévention de ces complications est un objectif prioritaire dans la prise en charge post lésionnelle.

Outre les troubles cardiovasculaires et respiratoires, le sujet lésé médullaire subit des infections liées à l'appareil urinaire dues principalement à l'incontinence et l'élévation de la pression intra vésicale (Anson et al., 1996) ainsi que des troubles gastriques tels que des ulcères et des pancréatites (Stevens et al., 2003).

1/3 des patients blessés médullaires développent des complications cutanées (Mac Kinley et al., 2004) liées à la fragilisation de la peau. La prévention des escarres est un enjeu essentiel en rééducation fonctionnelle, elle passe notamment par des programmes basés sur la décharge des zones à risques, la maîtrise d'incontinence et l'hygiène appropriée. Aujourd'hui, ces programmes sont adaptés par des dispositifs préventifs tels que les matelas à pression alternée et les cousins sièges à perte d'air.

En dehors des modifications morphologiques et physiologiques, le contrôle musculaire est affaibli suite à la lésion, ce qui crée une dépendance définie comme un besoin important et régulier d'assistance d'une tierce personne pour les actes essentiels de la vie. Ainsi, certains équipements d'assistance sont nécessaires afin de faciliter la communication, la mobilité et les activités à domicile, ce qui entraîne systématiquement des obstacles à la vie active avec un taux global de chômage de plus de 60% chez les adultes atteints d'une LME (OMS, 2013). Certains facteurs comme l'absence de l'intégration sociale et les difficultés environnementales sont fortement corrélés à l'apparition des douleurs musculosquelettiques et neurologiques (Cardenas et al., 2004).

Enfin et plus particulièrement, la lésion de la moelle épinière menace directement la stabilité posturale assise car le contrôle musculaire et le retour sensoriel sont réduits en dessous du niveau lésionnel (Kirshblum et al., 2011). Les sujets atteints risquent par conséquent une perte d'équilibre et des blessures associées ce qui engendre une perte d'autonomie lors des activités quotidiennes. La chute est la deuxième cause de mortalité chez les personnes âgées avec ou sans LME après les accidents cardio-vasculaires. En France, on recense chaque année 9000 décès de personnes de plus de 65 ans en raison d'une perte d'équilibre (SFDRMG-HAS, 2005). Ce risque de chute est accentué avec la prise de moyens de transports. En effet, les phases critiques d'accélération-décélération sont responsables de 50% des blessures de collision (Halpern et al., 2005). Ce risque est plus élevé chez les sujets blessés médullaires en raison d'une réduction drastique de la capacité posturale en dessous du seuil lésionnel. La lésion engendre, entre autres, une instabilité au niveau du tronc capable d'impacter l'activité des membres supérieurs. L'impact est plus important lorsque le seuil lésionnel est haut. Par ailleurs, si la capacité du tronc à stabiliser les membres supérieurs dépasse les moments produits par ces derniers, le patient risque une perte d'équilibre et donc une chute (Lepage et al., 2012).

Etant donnée que le rachis lombaire est naturellement instable et que la lésion médullaire engendre une perte de contrôle musculaire et sensoriel en dessous du niveau lésionnel, il convient de comprendre l'impact de la lésion sur le système stabilisateur et la position assise.



### III.3. La position assise chez les sujets vivant avec une LME

Les patients blessés médullaires passent environ 10 heures par jour en position assise (Lemay, 2011). Les sujets lésés médullaires affrontent un challenge quotidien lié au contrôle de la position assise. Les risques de chute sont élevés (Gagnon et al., 2012 ; Milosevic et al., 2017), ainsi que les conséquences qui en découlent (Post et al., 1998). La chute est la résultante d'un déséquilibre assis défini comme une incapacité à conserver la projection verticale du COM du corps selon les limites déterminées par les fesses, les cuisses et les pieds au sol. Le premier exercice à développer en rééducation fonctionnelle suite à la lésion est le maintien de la position assise (Janssen-Potten et al., 1999). La récupération fonctionnelle à l'issue de la lésion médullaire dépend fortement du niveau de la lésion et de l'atteinte physique engendrée. Il faut différencier la récupération fonctionnelle pour la réalisation des actes de la vie essentiels et le degré d'autonomie de la récupération neurologique ou la récupération analytique qui désigne les capacités motrices et l'effort de contraction musculaire (Godin, 2018). La récupération fonctionnelle est multifactorielle, elle dépend de la récupération neurologique, des capacités physiques du patient, ainsi que de son implication dans les exercices de rééducation. Le but principal de la rééducation fonctionnelle des sujets blessés médullaires est de réduire l'incapacité (définie par l'OMS (1980), et révisée par l'OMS (2001) comme un état caractérisé par des impossibilités pour la personne déficiente de faire certains mouvements) en engageant les aptitudes résiduelles fonctionnelles et physiques afin de maximiser l'autonomie (Mankar et al., 2010).

La position debout chez l'homme est basée sur une structure osseuse et est maintenue par les muscles et les tendons en tension, on dit qu'elle est une position fonctionnelle. Tout comme la position debout, la position assise chez l'être humain maintient l'horizontalité de la tête (Kapandji, 2005b). La position assise chez les sujets vivant avec une (LME) diffère de la position assise adoptée par les sujets asymptomatiques. Suite à la lésion médullaire, la colonne vertébrale, qui est naturellement instable et sans contrôle musculaire, se courbe sous le poids du tronc. Dans cette position, le rachis ne joue plus un rôle neutre, tel qu'il a été défini dans le formalisme de Panjabi, parce que le système passif rachidien sera naturellement plus sollicité afin de compenser la perte musculaire du tronc. En effet, la résistance passive au niveau lombaire est plus élevée chez les sujets blessés médullaires par rapport aux sujets asymptomatiques du fait de la sortie de la zone neutre définie par Panjabi (1992b). La détermination de cet effort passif est importante afin de caractériser la position assise, cet effort représente la seule contribution de la stabilité dans cette région car les sujets n'ont plus d'activité musculaire volontaire en dessous de l'étage lésionnel. La souplesse des membres inférieurs est aussi automatiquement modifiée par la spasticité chez les sujets atteints (Biering-Sorensen et al., 2006). La position assise caractérisée par les jambes allongées est souvent adoptée par les sujets blessés médullaires pour la majorité des activités quotidiennes. Cette position combinant une cyphose rachidienne et une extension des membres inférieurs permet d'améliorer la stabilité assise même lorsque les bras ne sont pas posés sur les jambes (Shirado et al., 2014).

Concernant le contrôle de la position assise, l'absence totale ou partielle de l'activité musculaire au niveau abdominal et au niveau du tronc ainsi que la perte totale ou partielle de la sensation en dessous de niveau lésionnel vont être les causes majeures d'un contrôle très réduit induisant un risque de chute très élevé (Boswell-Ruys et al., 2010 ; Nelson et al., 2010). Une étude expérimentale menée par Milosevic et ses collaborateurs en 2015, visant à mesurer l'impact des membres inférieurs et des membres supérieurs dans la stabilité de l'assise, a révélé que l'aide mécanique apportée par le contact au sol des membres inférieurs est identique pour une personne sans ou avec une LME. La thèse retenue est que les personnes blessées médullaires se stabilisent en position assise à l'aide de

mouvements des membres supérieurs, on dit qu'ils développent des nouvelles stratégies compensatoires individuelles (Blandeau, 2018). Les sujets lésés médullaires vont avoir recours, en présence d'une perturbation externe, à l'usage de leurs membres supérieurs pour se stabiliser car l'activation de muscles au niveau lombaire est réduite, voire absente. Une deuxième étude expérimentale s'est intéressée au recrutement électrique des muscles des membres supérieurs ainsi que les muscles du tronc chez des sujets asymptomatiques et chez des sujets blessés médullaires lors d'un exercice consistant à atteindre des cibles en position assise. Les analyses électromyographiques ont souligné que les sujets blessés médullaires sollicitent davantage les muscles des membres supérieurs qui sont normalement peu engagés pour des exercices posturaux (Janssen-Potten et al., 1999).

Cette interprétation est en cohérence avec l'impact de la lésion sur les sous-systèmes rachidiens. En effet, le contrôle et la stabilité de la station assise chez les personnes blessées médullaires engagent davantage le sous-système passif contrairement aux sujets asymptomatiques. Par ailleurs, l'absence de recrutement musculaire au niveau de l'articulation lombo-sacrée entraîne de nouvelles stratégies de stabilisation caractérisées par une utilisation accentuée des membres supérieurs.

### III.4. Les stratégies compensatoires chez les sujets vivant avec une LME

La lésion médullaire impacte négativement le contrôle postural en position assise. La stratégie « classique » de stabilisation chez les sujets asymptomatiques (en agissant au travers de l'articulation lombo-sacrée) n'est plus applicable. Par conséquent, une compensation des capacités perdues par le biais des groupes musculaires, ayant des fonctions différentes avant la survenue de la lésion, est mise en évidence (Seelen et al., 1997). Les sujets médullo-blessés développent des nouvelles approches de recrutement musculaire en engageant les capacités motrices et sensorielles préservées (Potten et al., 1999).

Une étude menée par Seelen et collaborateurs (1998) a permis de mesurer l'activité électromyographique des différents muscles sollicités lors de la stabilisation assise chez les sujets avec une lésion médullaire thoracique. Les résultats ont démontré une activité importante des muscles qui se qualifient normalement comme des muscles mobilisateurs et qui sont utilisés comme des muscles stabilisateurs.

Une étude expérimentale récente menée par Blandeau (2018) et a permis d'identifier des mouvements compensatoires effectués par des sujets lésés médullaires afin de stabiliser leur assise en présence d'une perturbation externe appliquée au dos.

Le protocole expérimental a fait intervenir 29 sujets dont 3 sont asymptomatiques et 26 atteints d'une LME. Parmi les 26 sujets ayant une LME, 14 ont une lésion complète située au niveau de la vertèbre TH6 ou supérieur, ce qui signifie que ces sujets sont incapables de recruter volontairement les muscles en bas du dos ni les muscles abdominaux (une lésion médullaire haute) et 12 sujets ont une lésion basse de la moelle épinière. L'acquisition expérimentale s'est déroulée comme suit (figure 4) : l'expérimentateur demande au sujet de maintenir son équilibre assis en gardant les membres supérieurs levés, ensuite une perturbation est appliquée au niveau de la vertèbre thoracique TH8. Suite à cette déstabilisation, le sujet doit essayer de maintenir son équilibre assis en déplaçant si nécessaire les autres parties du corps.

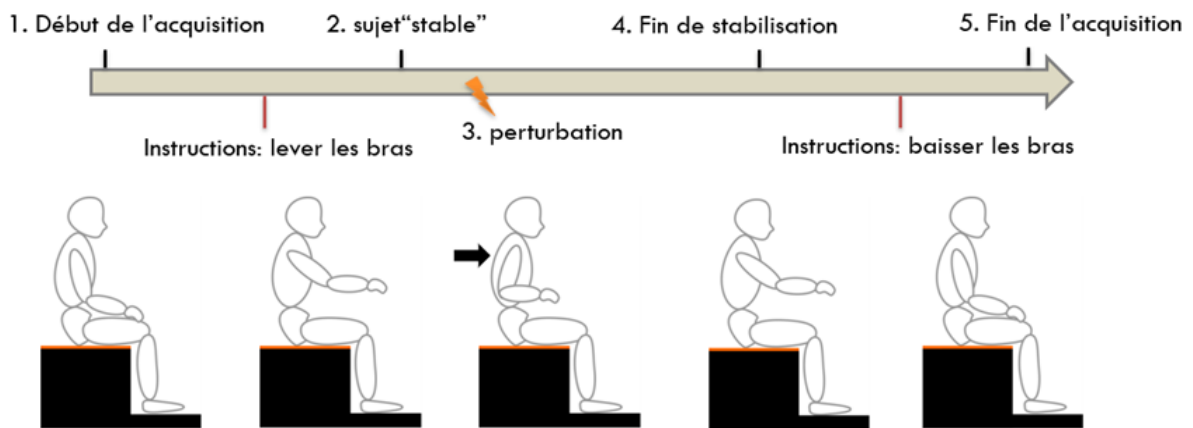


Figure 4: Acquisition expérimentale (Blandeau, 2018)



Figure 5: protocole expérimental (Blandeau, 2018)

Deux conditions expérimentales des membres inférieurs ont été étudiées : hanches et genoux fléchis à 90° avec les pieds au sol et membres inférieurs tendus.

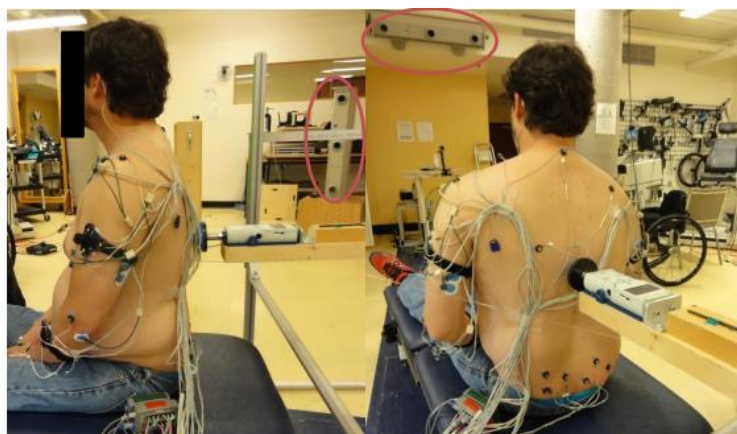


Figure 6: La force externe appliquée (Blandeau, 2018)

Le système d'analyse de mouvement utilisé le dispositif Optotrak® basés sur des capteurs actifs. Celui-ci utilise des diodes infrarouges (39) qui émettent un rayonnement capté par des caméras installées dans la salle d'analyse du mouvement (Blandeau, 2018). Il s'est avéré que les sujets blessés médullaires

adoptent des stratégies de stabilisation différentes en fonction de la perturbation appliquée et de la capacité de chaque sujet à maintenir son équilibre assis. La stratégie de stabilisation est propre à chaque sujet qui contre la perturbation de manière à garantir un sentiment de sécurité vis-à-vis de la chute (John et al., 2010). Le traitement des vidéos a permis de recenser trois stratégies de stabilisation impliquant les membres supérieurs adoptées par les personnes vivant avec une LME (Blandeau, 2018) :

- La stratégie basse mobile BM (figure 7) : le sujet lève les membres supérieurs en dessous des épaules et les déplace d'avant en arrière pour se stabiliser.
- La stratégie haute mobile HM (figure 8) : le sujet lève les membres supérieurs au niveau des épaules et les déplace après la perturbation pour se stabiliser.
- La stratégie haute fixe HF (figure 9) : le sujet lève les membres supérieurs jusqu'aux épaules et ne les déplace pas après la perturbation pour se stabiliser.

Pour les stratégies HF et BM, des mouvements symétriques et dissymétriques des membres supérieurs dans le plan sagittal ont été observés. Pour la stratégie HM, le déplacement des membres supérieurs a été effectué en dehors du plan sagittal par rotation des bras selon un axe vertical passant par les épaules. Pour cette stratégie lors d'un mouvement de rotation des épaules, la longueur des segments projetés dans le plan sagittal varie. Ainsi, le mouvement d'un sujet adoptant la stratégie HM ne peut pas être analysable dans le plan sagittal (Blandeau, 2018).



Figure 7: stratégie BM (Blandeau, 2018)



Figure 8: stratégie HM (Blandeau, 2018)



**Figure 9: stratégie HF (Blandeau, 2018)**

Sur les 26 sujets atteints d'une LME on recense : 7 sujets adoptant une stratégie HF, 13 sujets une stratégie HM et 2 sujets une stratégie BM. Pour les 4 sujets restants, l'extension des membres inférieurs a provoqué un changement important de stratégie : 1 sujet passe de la stratégie BM à HM et 3 sujets passent de la stratégie HM à HF.

Le choix de la stratégie de stabilisation est individuel et est fonction des capacités fonctionnelles et de l'objectif étudié. Les rééducateurs peuvent également orienter le patient à opter pour une stratégie particulière afin de renforcer le tronc et de préserver les acquis. Certaines approches thérapeutiques et médicales, notamment en rééducation, sont mises en exergue afin d'optimiser la stabilité assise chez les sujets médullo-blessés.

### **III.5. L'optimisation de l'équilibre assis chez les sujets vivant avec une LME**

Pour améliorer le contrôle postural et le maintien de la stabilité assise chez les sujets médullo-lésés, on distingue deux approches thérapeutiques. La première approche se focalise sur les préoccupations du patient alors que la deuxième approche cible plutôt l'environnement du patient.

Concernant la première approche thérapeutique, la réadaptation est déterminante. Les interventions rééducatives dépendent des besoins du patient et de ses objectifs. Le but ultime de la rééducation est de favoriser l'indépendance du patient dans « tous » les aspects de son quotidien en tenant compte des limitations fonctionnelles imposées par la blessure. Elle permet de réduire les conséquences de la blessure médullaire et de prévenir les complications associées à la phase secondaire, notamment les conséquences liées à l'altération du système nerveux végétatif. Les exercices de mobilisation contribuent à ralentir les effets invalidants de la lésion et à réduire l'atrophie musculaire en atténuant la raideur. La réadaptation vise entre autres, à survaloriser les capacités restantes (le maintien des acquis) et à maximiser l'autonomie (Perrouin-Verbe, 2005). La prise en charge rééducative englobe le maintien de l'intégrité du segment sous lésionnel et le renforcement du tronc.

Dans un cadre de recherche, plusieurs travaux ont été engagés dans le but d'évaluer l'application de certaines approches thérapeutiques sur les patients médullo-lésés.

Les travaux de Rath (2018) et Rath et al. (2018) ont souligné que les exercices d'équilibre associés à une stimulation transcutanée ciblée de la moelle épinière permettent d'améliorer la stabilité posturale en position assise des sujets blessés médullaires ainsi que le contrôle du tronc. La stabilité posturale est évaluée à l'aide des mesures électromyographiques de certains muscles situés dans la partie inférieure du corps. Les travaux de Thoumie et al. (1995) ont montré que la stimulation électrique

fonctionnelle des muscles de la locomotion où le contrôle volontaire est réduit (voire absent) permet d'avoir une contraction et d'induire des mouvements fonctionnels tels que lever les extrémités inférieures ou plier les membres supérieurs. Boccardi et al. (2005) expliquent que cette technique est intéressante chez les sujets avec un certain contrôle du tronc et des membres supérieurs (niveau lésionnel TH4 à TH11) et que ces impulsions permettent de minimiser la fatigue musculaire engendrée par la lésion.

Les travaux de Harvey (2008) ont permis de montrer que les exercices d'entraînement qui se focalisent sur le renforcement du tronc, permettent aux patients d'apprendre de nouvelles stratégies d'ajustement postural. Les exercices orientés en position assise sont effectués sans aide apportée par les membres supérieurs ou une aide technique (Harvey, 2011). Ces exercices s'inscrivent dans le catalogue des activités tels que prendre un objet au sol, faire une activité physique en position assise (vélo manuel, boxe, tennis ...) ou atteindre des cibles. L'équitation thérapeutique est aussi bénéfique dans le protocole de réadaptation, elle permet d'améliorer la coordination des mouvements et augmente le contrôle du tronc et de la tête (Zadnikar et Kastrin, 2011). Les résultats soulignent des effets positifs sur le recrutement musculaire et une diminution de la spasticité et de la rétention d'eau (Lechner et al., 2003).

Des exercices expérimentaux permettant d'améliorer le contrôle postural assis ont été présentés dans les travaux de Grigorenko et al. (2004). Il a été démontré que les exercices d'entraînement utilisant le kayak-ergomètre sont intéressants et efficaces dans le développement des stratégies compensatoires latéro-latérales. Le maintien de la position assise ainsi que le recrutement des membres supérieurs ont été évalués en analysant la réponse électromyographique des muscles stabilisateurs (Trevithick et al., 2006). La stimulation électrique des muscles paralysés permet également d'améliorer leurs réponses fonctionnelles. Les expérimentations de Kukke et Triolo (2004) ont exploré les effets de la stimulation des muscles extenseurs de la région lombaire chez les sujets atteints d'une lésion complète de la moelle épinière. Les analyses soulignent une amélioration nette du maintien de la position assise. La stimulation bilatérale des muscles fléchisseurs de la hanche et du tronc permet d'obtenir des performances motrices remarquables et amplifie les mouvements du tronc (Lambrecht et al., 2009).

Récemment des techniques basées sur la réalité virtuelle ont démontré leur efficacité dans l'amélioration du contrôle postural en position assise. La réalité virtuelle vise à fournir des performances et des réponses musculaires en temps réel tout en optimisant la motivation du patient (An et al., 2018). En effet, la réalité virtuelle stimule, à l'aide de scénarios virtuels, le système nerveux central qui reçoit un « feedback » sensoriel important capable de renforcer l'apprentissage moteur. Les patients peuvent voir, par conséquent, la progression de leurs mouvements en temps réel dans un environnement virtuel personnalisé où la détection et la correction des erreurs sont particulièrement évidentes. Enfin, la réalité virtuelle offre une configuration motivante permettant une participation intentionnelle et une possibilité de répétition sur une durée rallongée. En effet, la manque de motivation constitue un frein à l'implication du patient dans les exercices de rééducation, ce qui entraîne une non-adhésion à la thérapie. La réalité virtuelle permet de corriger cette attitude en améliorant les performances du patient et en optimisant la motivation pour l'entraînement (Caviglia, 2020).

Concernant la deuxième approche thérapeutique, elle cible l'environnement du patient afin d'améliorer le maintien d'équilibre en position assise. Le fauteuil roulant doit être adapté à la morphologie de la personne et à ses besoins. Les travaux de Alm et al. (2003) ont permis de montrer

que la stabilité posturale en position assise est nettement renforcée lorsque le fauteuil roulant est adapté au contexte clinique du sujet blessé médullaire, réduisant de fait le risque de chute. Les fauteuils roulants verticalisateurs ont un impact positif sur les sujets médullo-lésés. Ils permettent grâce à des options et des fonctions spécifiques de passer de la position assise à la position debout contrôlée (Gorce et Boughiden, 2003). Ce changement de posture permet de réduire la pression sur les zones d'appui et de prévenir les altérations cutanées. Les orthèses orthopédiques ont également une influence positive sur le support du tronc et le transfert du poids. Les orthèses permettent, par le biais des changements posturaux, d'augmenter l'amplitude des mouvements volontaires et d'améliorer l'extension lombaire en position assise (Allison et Singer, 1997). L'utilisation des corsets permet, quant à elle, de corriger les déformations scoliotiques et de stabiliser les déviations de la colonne vertébrale. Ils sont recommandés afin de procurer un soutien et une correction du corps. Néanmoins, ils présentent comme inconvénient de favoriser la perte musculaire (Bailey CS et al., 2009).

Les deux approches thérapeutiques présentées ont démontré leurs efficacités dans l'optimisation du contrôle postural assis mais malgré leurs intérêts, il est difficile de les classer ou de documenter leurs effets réels (Lepage et al., 2012). L'interprétation des résultats par les cliniciens se focalise sur des tests maison tels que les exercices domestiques et les tâches routinières de la vie quotidienne ou en se fiant à l'observation pendant les exercices de rééducation. L'électromyographie permet, quant à elle, d'analyser la contraction musculaire en étudiant les signaux électriques transistants. Elle vise donc à évaluer la contribution de certains muscles pendant les exercices de rééducation (Hug, 2023). Cependant, ces techniques apportent uniquement les phases d'activation musculaire sans fournir des indications sur les efforts générés.

Afin d'aider les cliniciens dans le diagnostic et le traitement d'une maladie, il est intéressant non seulement de repérer la stratégie par laquelle le patient a assuré sa stabilité assise, mais aussi de fournir des indications sur la manière dont elle a été produite (Guelton, 2003). La quantification des différents efforts produits volontairement et passivement lors de la stabilisation de l'assise permettrait de mieux comprendre l'importance des différentes contributions afin de développer des positions assises facilitant le concept de la stabilité. Les travaux de Runge et al. (1999) ont démontré que l'analyse des couples articulaires permet d'identifier les stratégies employées pour équilibrer une posture particulière. Les expérimentations étaient basées sur un modèle de type pendule inverse perturbé par des forces associées aux mouvements de la base de support, ensuite les signaux simulés ont été comparés aux mesures électromyographiques. Des changements de stratégie posturale en fonction de l'intensité et de la direction de la perturbation ont été observés et sont explicités par les couples articulaires. Bien que les stratégies posturales soient mises en évidence par la manière dont le corps se déplace, les expérimentations de Runge et al. (1999) ont conclu que les efforts articulaires fournissent des indications sur le mécanisme aboutissant à ces mouvements. Les résultats explicitent comment la biomécanique du corps est capable d'ajuster les modèles de contrôle en une série de corrections posturales.

En neurophysiologie, le système nerveux central assure le contrôle du corps humain qu'il soit en mouvement ou en repos. La connaissance des couples articulaires fournit ainsi des indications sur le fonctionnement du système nerveux central. Par ailleurs, l'analyse de la marche s'appuie sur la détermination des couples internes (liés à la musculature des membres inférieurs) et des couples externes (liés à la réaction au sol). Enfin, une manière d'étudier le mécanisme de la régulation posturale, repose sur l'analyse des signaux véhiculés entre le système régulé et la commande. Il est donc intéressant non seulement d'analyser les sorties d'un système mécanique, les angles et les

vitesse, mais aussi d'apporter des informations supplémentaires sur les entrées, les couples articulaires. Ces entrées permettent de comprendre les anomalies au niveau de l'architecture mécanique et au niveau de la commande (Massion, 1997).

Déterminer les couples articulaires développés lorsque l'humain agit dans son environnement est une démarche importante en biomécanique. La connaissance de ces données est utile pour plusieurs applications dans différents domaines comme en rééducation, en médecine, en ergonomie ou pour la prévention (An et al., 1984 ; Harding et al., 1993 ; Cholewicki et McGill, 1994). Elles sont analysées dans l'optique de limiter l'apparition des maladies en améliorant l'ergonomie des postes de travail ou en prévenant les risques de blessures induites par les mouvements dans un contexte sportif par exemple. Déterminer les forces internes est possible à travers des mesures directes des tensions au niveau des muscles en installant par exemple des capteurs de force. Ces méthodes invasives ont été appliquées chez les animaux (Walmsley et al., 1978 ; Abraham et Loeb, 1985 ; Herzog et Leonard, 1991 ; Jinha et al., 2005). Cependant, elles sont très peu répandues chez l'humain (Komi et al., 1987 ; Dennerlein et al., 1998 ; Kursal et al., 2005).

En effet, chez l'homme ces essais expérimentaux sont très délicats et nécessitent des interventions chirurgicales. Ces expérimentations sont non reproductibles pour chaque mouvement et chaque articulation et ne permettent pas d'étudier des mouvements d'intensités maximales ou des amplitudes importantes (Vigouroux, 2005). Par ailleurs, la mesure des couples articulaires via un appareillage invasif est éthiquement proscrite. Enfin, la mesure directe de certains efforts est techniquement impossible tels que les efforts produits passivement au niveau des lombaires ou au niveau de l'épaule en raison de la complexité géométrique et musculaire présente pour ces articulations (Vigouroux, 2005).

Après cette étude autour de la position assise chez les personnes vivant avec une LME, le paragraphe suivant consiste à explorer les modélisations existantes traduisant cette posture assise. Cette modélisation est importante afin d'accéder aux variables non mesurables, en particulier les efforts articulaires. La connaissance de ces efforts contribue à mieux quantifier l'action des différents membres dans la stabilisation assise dans le but de proposer, plus tard, des solutions en rééducation fonctionnelle.

## IV. La modélisation de la station assise

L'humain est un système très complexe, dynamique et auto-commandé. La modélisation simplifiée du corps humain est indispensable dans la plupart des démarches en biomécanique. La modélisation permet d'étudier le cadre théorique du système afin d'évaluer des essais expérimentaux et tester des hypothèses sur les paramètres internes et externes du modèle.

Dans cette partie, des modèles biomécaniques, en chaînes segmentaires, permettant de traduire la station assise et de déterminer les efforts articulaires chez les sujets asymptomatiques, sont présentés. Tout d'abord, le premier paragraphe revient sur la dynamique inverse, méthode bien connue en biomécanique, permettant d'estimer les efforts articulaires.

### IV.1. La Dynamique inverse

Différentes approches permettent de reconstruire les variables biomécaniques telles que les coordonnées articulaires et les couples articulaires. Deux méthodes sont classiquement employées en biomécanique (Buchanan, 2004 ; Erdemir, 2007) : l'approche inverse et l'approche directe. La



dynamique inverse (figure 10) vise à déterminer les actions mécaniques au niveau des articulations du corps. Ces actions mécaniques notamment les couples articulaires sont considérés comme représentatifs des efforts musculaires (Winter, 2009).

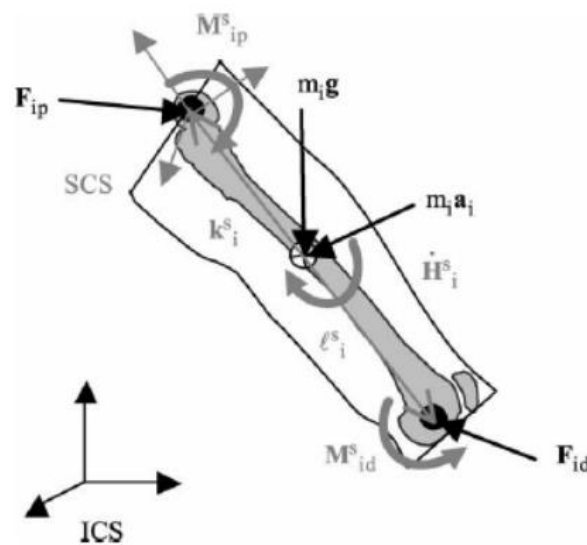


Figure 10: principe de la dynamique inverse (Dumas et al., 2004)

Le couplage entre les lois de la dynamique avec une modélisation mécanique adaptée au contexte permet de formuler des relations entre la position, la vitesse et les couples articulaires. L'approche de la dynamique inverse permet de déterminer les forces et les couples nécessaires à l'exercice d'un mouvement particulier, et ce contrairement à l'approche par dynamique directe qui consiste à déterminer le mouvement moyennant la connaissance des couples articulaires. La dynamique inverse est une approche très utilisée en biomécanique car elle permet d'estimer les efforts articulaires produits lors d'un mouvement de manière non-invasive par le biais de données expérimentales. L'approche de la dynamique inverse consiste à résoudre itérativement des équations d'équilibre dynamique du mouvement en isolant successivement les segments corporels dans le but de déterminer les efforts internes à partir des mesures cinématiques et d'efforts externes. Le principe consiste en premier temps à discrétiser le corps humain en plusieurs solides rigides puis à estimer les efforts exercés sur chacun de ces segments rigides (Watier, 2015). L'approche de la dynamique inverse s'applique selon deux formalismes : le formalisme Top-Down (du haut vers le bas du corps) et le formalisme Bottom-up (du bas vers le haut du corps).

Dans le formalisme Top-Down en posturologie, les segments terminaux qui ne sont pas en contact avec les éléments extérieurs du corps sont en premier temps isolés. Le principe fondamental de la dynamique s'applique au segment, moyennant la connaissance des caractéristiques inertielles et le mouvement, et permet d'estimer la sollicitation au niveau de l'articulation avec le segment voisin. Puis, la méthode se réitère de proche en proche jusqu'au dernier segment non résolu. Cette méthode est particulièrement simple car elle ne requiert que des mesures expérimentales cinématiques ainsi que des données anthropométriques (Amarantini, 2003). Néanmoins, la méthode Top-Down est sensible aux bruits de mesures puisque les erreurs liées au calcul des vitesses et des accélérations de chaque segment s'accumulent et se reportent de proche en proche dans la reconstruction des couples articulaires (Zajac, 1993).

Dans le formalisme Bottom-up en posturologie, on suppose que la mesure des forces qui rentrent en contact avec les éléments extérieurs au corps humain est connue ainsi que la mesure du mouvement.

Les efforts appliqués au segment contraint sont donc intégrés comme données d'entrée en plus des mesures cinématiques et des paramètres anthropométriques. La résolution est appliquée donc du segment contraint au segment libre en considérant les efforts articulaires (principe action-réaction) (Amarantini, 2003). L'impact du manque de précision des valeurs d'accélération, due à l'approche itérative, est minimisé par rapport à la méthode Top-Down car il est pondéré par l'ajout des informations dynamiques périphériques. La méthode Bottom-Up donne une meilleure estimation des efforts intersegmentaires comparée à la méthode Top-Down (Amarantini, 2003).

## IV.2. Les modèles en chaines segmentaires

L'analyse du déplacement d'un segment osseux par rapport à un autre permet d'étudier la cinématique articulaire. Les modèles en chaines segmentaires sont largement utilisés dans la modélisation biomécanique car ils permettent de calculer les couples de chaque segment corporel en considérant un seul couple par articulation (Reeves and Cholewicki, 2003). Deux modèles ont été développés pour représenter la position assise chez les sujets asymptomatiques. Ces deux modèles correspondent à des variations d'un double pendule inverse 2D et rassemblent la tête, le tronc et les membres supérieurs au sein d'un même segment rigide.

Le premier modèle a été présenté dans les travaux de Reeves et al. (2009). Ce modèle (figure 11) analyse l'impact des retards d'activation des muscles lors de la stabilisation d'une assise instable latérale en faisant l'hypothèse d'un contrôle au niveau lombaire. Le modèle est basé sur une linéarisation aux petits angles pour estimer les efforts internes durant le contrôle assis latéral. Les équations du modèle sont simplifiées autour des points d'équilibre. Ensuite, les données expérimentales sont introduites dans un algorithme d'optimisation pour estimer les efforts internes. L'avantage de ce modèle est que les données expérimentales issues de l'analyse de mouvement sont utilisées afin de déterminer les paramètres internes du modèle, comme la raideur et le gain de contrôle. Une limitation de ce modèle est que l'espace d'utilisabilité et de validité est réduit au point d'équilibre. Ainsi, le modèle n'est valable que pour des petites variations autour d'un point d'équilibre. Les estimations issues de ces modèles présentent des écarts remarquables lorsque le sujet effectue des mouvements s'éloignant des points d'équilibre.

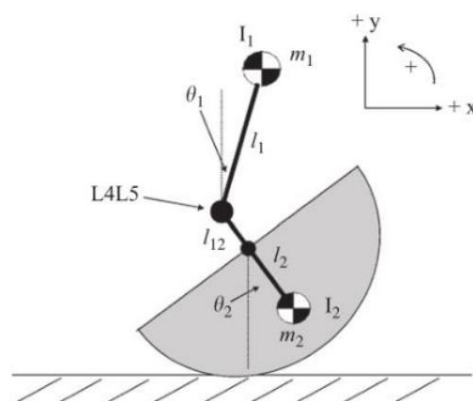


Figure 11: modèle de Reeves et al. (2009)

Le deuxième modèle en chaines segmentaires a été présenté dans les travaux de Tanaka et al. (2010). Ce modèle (figure 12) réalise exclusivement des simulations numériques du contrôle postural assis antéropostérieure. Il vise à déterminer la zone de stabilité d'une personne assise sur une chaise

instable. Le modèle est contrôlé au niveau de l'articulation lombaire par le biais d'une commande de type proportionnel-dérivé.

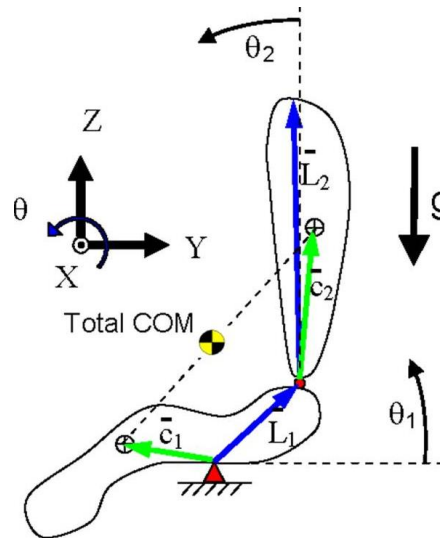


Figure 12: le modèle de Tanaka et al. (2010)

Les deux modèles présentés stabilisent l'assise au travers de l'articulation lombaire et sont basés sur une écriture des équations dynamiques du modèle entier par dérivation du Lagrangien (contrairement à la dynamique inverse qui procède par segments).

Dans le cas d'une lésion médullaire, le modèle retenu doit considérer que le contrôle musculaire et le retour sensoriel sont réduits en dessous du niveau lésionnel et que les stratégies de stabilisation via les muscles dorsaux et abdominaux ne sont pas applicables. Par conséquent, le modèle de Tanaka et al., (2010) ne permet pas de décrire la stabilité assise chez les sujets blessés médullaires car il considère une jonction active située au niveau de l'articulation lombo-sacrée pour maintenir une stabilité assise. Les modèles basés sur une linéarisation permettent d'analyser le cas particulier des blessés médullaires uniquement dans un cadre où les mouvements sont effectués autour des points d'équilibre ou dans un voisinage de ceux-ci. Néanmoins, l'instabilité posturale importante des sujets lésés médullaires induit des mouvements (flexion/extension des membres supérieurs et du tronc) qui s'éloignent fortement des points d'équilibre. Aussi, ces débattements importants ne sont pas en cohérence avec la linéarisation. Il est donc important de retenir un modèle non linéaire prenant en compte les caractéristiques des mouvements effectués par les sujets blessés médullaires ainsi que les modifications physiologiques post-lésionnelles.

L'objectif de la partie suivante est de présenter deux modèles biomécaniques où la reconstruction des couples articulaires a été effectuée via une méthode alternative à la dynamique inverse basée sur l'utilisation des observateurs.

### IV.3. L'approche d'estimation par observation

L'observateur (figure 13) permet de reconstruire les variables de l'état d'un système lorsque celles-ci ne sont pas entièrement accessibles. La conception de l'observateur doit garantir la convergence des états estimés aux états réels ou au moins dans un voisinage des états réels. La synthèse des observateurs a été réalisée avec succès dans de nombreuses applications, dont par exemple le domaine automobile (Losero et al., 2018 ; Laurain et al., 2015) ou pour les fauteuils roulants (Mohammad et al., 2017).

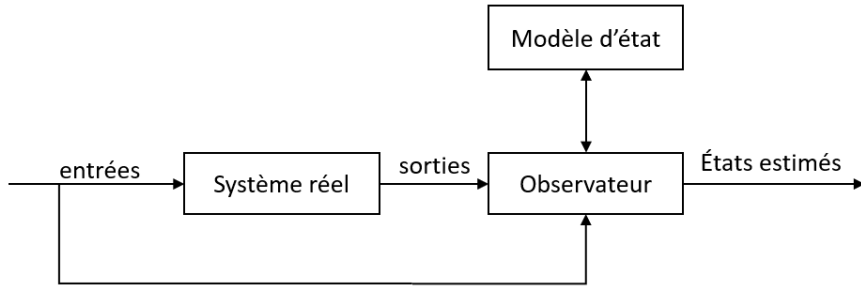


Figure 13: Schéma fonctionnel d'un observateur

Soit un système représenté sous forme d'une équation d'état, par exemple dans le cas affine en la commande, avec  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des entrées,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des sorties et  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = C(x(t))x(t) \end{cases} \quad (1)$$

A partir des commandes  $u(t)$  et de sorties mesurées  $y(t)$  seules, le but d'un observateur d'état qui peut s'écrire par exemple pour le système (1) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(\hat{x}(t))x(t) + B(\hat{x}(t))u(t) + K(\hat{x}(t))(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C(\hat{x}(t))\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2)$$

est de déterminer les conditions (pour(2), détermination de la matrice  $K(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ) qui permettent de garantir la convergence asymptotique de l'état reconstruit vers l'état réel :  $\hat{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x(t)$ . En amont de la synthèse de l'observateur, il faut s'assurer que les conditions de rang sont satisfaites afin de prouver l'observabilité du système. Les observateurs sont donc des systèmes dynamiques d'entrées  $[u(t) \ y(t)]$  et de sortie  $\hat{x}(t)$  garantissant la convergence asymptotique de l'erreur d'observation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ .

L'observateur PI (Koenig and Mammar, 2002) est une classe particulière des observateurs à entrées inconnues. Il permet d'estimer l'état et les entrées inconnues simultanément grâce à la dynamique de celles-ci assimilée souvent à un ou plusieurs intégrateurs.

On considère par exemple une dynamique prédéterminée de type  $\ddot{u}(t) = 0$ , dans ce cas la dynamique

des entrées inconnues s'écrit sous forme de  $\dot{D}(t) = \Gamma D(t)$  avec  $D(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \vdots \\ u^{m-1}(t) \end{bmatrix}$  et  $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Le vecteur d'état associé à cette représentation est augmenté en incluant les dérivées successives des entrées inconnues :  $x^e(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ D(t) \end{bmatrix}$ . Le modèle (1) peut s'écrire sous forme étendue selon l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}^e(t) = A^e(x(t))x^e(t) \\ y(t) = C^e(x(t))x^e(t) = \begin{bmatrix} C(x(t)) & 0 \end{bmatrix} x^e(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Avec } A^e(\hat{x}(t)) = \begin{bmatrix} A(\hat{x}(t)) & B(\hat{x}(t)) \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}.$$

Et l'observateur associé s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^e(t) = A^e(\hat{x}^e(t))\hat{x}^e(t) + K(\hat{x}^e(t))(y^e(t) - \hat{y}^e(t)) \\ \hat{y}^e(t) = C^e(\hat{x}^e(t))\hat{x}^e(t) = \begin{bmatrix} C(\hat{x}(t)) & 0 \end{bmatrix} \hat{x}^e(t) \end{cases} \quad (4)$$

Le choix de  $K^e(\hat{x}^e)$  doit garantir la convergence simultanée de l'état étendue :  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$  et  $\hat{u}(t) \rightarrow u(t)$ .

Dans l'ensemble du manuscrit, la reconstruction des efforts internes sera effectuée via l'approche par observateurs. Les travaux de Guelton et al. (2008) ont démontré l'intérêt de cette approche par rapport à la dynamique inverse dans l'estimation des moments articulaires au niveau des hanches et des chevilles lors de la stabilisation d'une personne en station debout. Un déphasage entre les couples estimés par la dynamique inverse et les couples estimés par l'observateur a été constaté. En effet, le principe itératif de la dynamique inverse engendre des incertitudes (liées notamment à la dérivation des données expérimentales en position pour récupérer les vitesses articulaires et les accélérations) qui s'accumulent d'un segment à un autre et peuvent biaiser les variables en bout-de-chaine qui sont les couples articulaires. Par ailleurs, la surdétermination apportée par les forces extérieures engendre des erreurs de reconstruction dont l'impact est d'autant plus visible quand le mouvement est de faible amplitude.

On présente ci-après deux modèles traduisant la station assise chez les sujets lésés médullaires, qui ont permis la mise en œuvre d'observateurs pour reconstruire les couples articulaires non mesurés. Les deux modèles prennent en compte l'impact des membres supérieurs et de la résistance passive au niveau lombaire dans la dynamique du modèle.

#### IV.3.1. Le modèle H2AT

L'origine du modèle « Head-2-Arms-Trunk » (H2AT) a été initiée à partir des essais expérimentaux présents dans les travaux de Seelen, Janssen-Potten, Drukker et al. (1998). Dans ces travaux, la consigne donnée par l'expérimentateur consistait à demander aux sujets ayant une LME de croiser leurs bras rigidement autour du tronc, ce qui a permis de créer une nouvelle approche d'un corps rigide de type pendule inverse en rotation par rapport à l'articulation lombosacrée appelé le corps HAT. Il a été démontré expérimentalement que dans le cas où l'assise est perturbée, l'ensemble HAT ne va pas rester rigide car la tête va osciller autour du cou (Thrasher et al, 2010), d'où l'idée du modèle créé par Blandeau (2018), le modèle H2AT « Head-2-Arms-Trunk ». Le modèle H2AT (figure 14) souligne l'importance des mouvements effectués par les membres supérieurs et la tête dans la stabilisation de l'assise. Ce modèle est un pendule inverse-2D dans le plan sagittal contrôlé par l'action de la tête et des membres supérieurs (Blandeau, 2018). Le tronc (T) est représenté par un pendule inverse en rotation autour de l'articulation lombosacrée. Le deuxième segment est nommé H2A, il se déplace linéairement suivant une articulation prismatique et modélise le déplacement des centres de masse

(COM) des membres supérieurs et de la tête. La force  $F(t)$  est responsable de la stabilisation du modèle par le déplacement du COM de la partie H2A : le barycentre des centres de masse de la tête et des membres supérieurs suivant la distance  $x_H(t)$ . Les paramètres inertiels et géométriques de chaque segment sont déterminés à l'aide des équations de régression de Dumas, Chèze et al. (2007) et Fang et al. (2017), en renseignant uniquement la masse et le sexe du sujet.

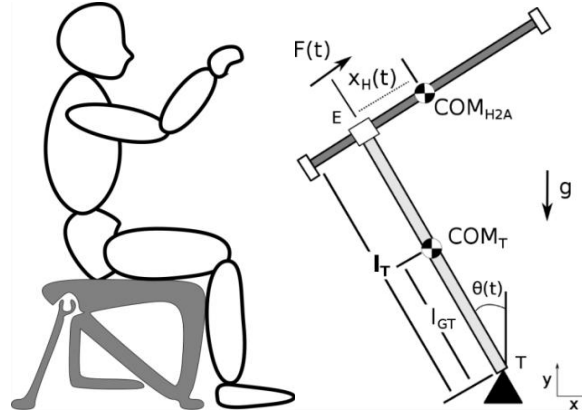


Figure 14: le modèle H2AT (Blandeau, 2018)

Les données anatomiques relatives à la flexion et l'extension du cou et des membres supérieurs permettent de créer un ensemble compact et borné dans lequel les variables du modèle sont limitées afin de respecter la nature de l'articulation et les degrés de liberté associés (Kapandji, 2005a)

$$\Omega_x = \left\{ \begin{array}{l} -0.075 \leq x_H \leq 0.105 \\ -10 \leq \theta \leq 20 \\ -30 \leq \dot{\theta} \leq 30 \end{array} \right\} \quad (5)$$

La dynamique du modèle H2AT est créée à partir des équations du Lagrangien avec  $L = E - U$ , où  $E$  représente l'énergie cinétique et  $U$  l'énergie potentielle des segments constituant le modèle.

L'équation d'état du modèle H2AT s'écrit après calcul et dérivation du Lagrangien :

$$\begin{cases} E(x(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + Bu(t - \tau(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (6)$$

Les matrices (disponibles dans Blandeau (2018)) ne sont pas décrites ici, il faut juste noter la forme descripteur de ce modèle (présence de la matrice  $E(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  à gauche de l'équation d'état) qui sera conservée dans la suite des travaux, les explications, notamment liées à la complexité seront données plus loin dans le manuscrit.

Le modèle H2AT est le premier modèle biomécanique permettant d'estimer les efforts internes chez les sujets ayant une LME en tenant compte des conséquences de la lésion du système stabilisateur. La reconstruction des paramètres internes a été réalisée via une technique alternative à la dynamique inverse basée sur l'emploi des observateurs à entrées inconnues utilisant les outils de Estrada-Manzo (2015). Une loi de contrôle permettant de stabiliser ce modèle a également été obtenue tenant compte du retard sur l'entrée dans les travaux de Blandeau (2018). Ce retard correspond à la combinaison des retards engendrés par le transport, le traitement et le délai électromécanique des données (Vette et al., 2009).

Le modèle H2AT est basé sur un déplacement linéaire du centre de masse de l'articulation  $COM_{H2A}$  par rapport au tronc. Il s'agit d'une simplification mécanique afin de modéliser le mouvement de flexion et d'extension du cou et des avant-bras. Hormis les hypothèses mécaniques, le formalisme du modèle H2AT ne prend pas en compte l'inertie des membres supérieurs en rotation autour de leurs articulations. Par ailleurs, le modèle est contrôlé par une force qui ne possède pas de signification physiologique (Blandeau, 2018). Ce premier modèle avait été utilisé pour voir si les outils disponibles, notamment en commande et en observation, pouvaient être appliqués avec succès. Fort des résultats obtenus, un modèle plus réaliste et donc plus complexe a été construit. Le modèle est dénommé « Seated-3-Segments » (S3S-2D).

#### IV.3.2. Le modèle S3S-2D

Le modèle S3S-2D (figure 15), développé dans les travaux de Blandeau (2018), est un triple pendule inverse-2D dans le plan sagittal dont les parties constitutives représentent le tronc, les bras et les avant-bras, ce qui confère à ce modèle une réalité anatomique plus proche par rapport au modèle H2AT. Les paramètres inertiels du modèle : la masse du segment  $m_i$ , la longueur du segment  $l_i$ , la position du COM  $l_{G_i}$  et le moment d'inertie au centre de gravité  $I_{G_i}$  sont définis dans les algorithmes de régression de Dumas, Chèze et al. (2007). A l'instar du modèle H2AT, les équations dynamiques du modèle sont obtenues en dérivant les équations du Lagrangien :  $L = E - U$ . L'état du système est composé des angles et des vitesses articulaires. Le vecteur d'entrée est composé des couples articulaires et le vecteur des sorties mesurées représente les angles aux trois articulations définies dans le modèle : l'articulation lombo-sacrée, l'épaule et le coude. Le modèle S3S-2D est instable en boucle ouverte. Son contrôle ne concerne que les couples actifs au niveau de l'épaule et du coude afin d'imiter les mouvements adoptés par les sujets lésés médullaires pendant la stabilisation de la position assise.

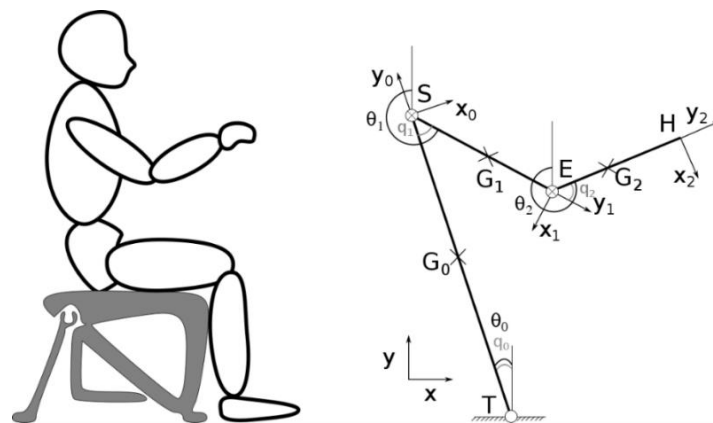


Figure 15 : le modèle S3S-2D (Blandeau, 2018)

Contrairement au modèle H2AT qui considère le mouvement de la tête dans le déplacement du point  $COM_{H2A}$ , le modèle S3S-2D considère que le tronc et la tête sont rigidement liés. Cette hypothèse a été formulée afin de réduire la complexité inhérente du modèle et est justifiée par les faits que :

- Les membres supérieurs sont plus lourds que la tête (Dumas, Chèze et al., 2007)
- Le débattement de la tête est moins important que les membres supérieurs (Kapandji, 2005a ; Kapandji, 2005b).

A l'instar du modèle H2AT, un observateur à entrées inconnues a été associé au modèle S3S-2D dans le but de reconstruire les variables non mesurées. Les équations mécaniques du modèle sont détaillées dans le chapitre suivant, qui sera dédié à l'étude du modèle S3S-2D.

Des essais expérimentaux ont été réalisés dans le cadre de la thèse de Mathias Blandeau (2018) au centre de recherche interdisciplinaire du Grand-Montréal dans le but d'évaluer l'approche de modélisation et l'observateur associé. Le protocole expérimental a été présenté très succinctement dans le paragraphe lié aux stratégies de stabilisation compensatoires. L'observateur associé au modèle S3S-2D intervient lorsque le sujet est stable avec les bras levés (consigne de l'expérimentateur) et la fin de la stabilisation (après la perturbation).

Les mouvements dissymétriques des membres supérieurs observés dans certaines acquisitions des stratégies HF et BM dans le plan sagittal ne sont évidemment pas exploitables par le modèle S3S-2D. Aussi, l'estimation des couples articulaires associés à ces mouvements ne peut pas être réalisée, d'où la nécessité d'étendre le modèle S3S-2D afin d'exploiter ces mouvements. De plus, étant défini dans le plan sagittal, la cinématique d'un sujet adoptant la stratégie HM, réalisant des mouvements des membres supérieurs en dehors de ce plan, ne peut pas non plus être exploitée par le modèle S3S-2D.

## V. Conclusion du chapitre 1

La lésion de la moelle épinière affecte la conduction des informations motrices et sensorielles, ce qui nuit au maintien postural en position assise. Elle induit une réduction drastique des capacités sensori-motrices ainsi qu'une perte totale ou partielle du recrutement musculaire en dessous du seuil lésionnel. Afin de stabiliser l'assise suite à une perturbation, les sujets ayant une LME engagent leurs membres supérieurs comme une stratégie compensatoire de stabilisation. Plusieurs stratégies ont été mises en évidence par Blandeau (2018), conduisant à des mouvements symétriques ou pas, contenu dans le plan sagittal ou pas.

La quantification des efforts articulaires produits lors de la stabilisation est nécessaire afin de développer, ultérieurement, des techniques facilitant le maintien de l'équilibre assis. Etant donné que la mesure directe est impossible, l'approche par modélisation biomécanique est privilégiée.

Les modèles en chaînes segmentaires présentés dans ce chapitre ne permettent pas de modéliser le cas particulier des sujets lésés médullaires en tenant compte des conséquences de la lésion sur le système stabilisateur vertébral. Ce chapitre a présenté deux modèles mécaniques issus des travaux de Blandeau (2018), les modèles H2AT et S3S-2D, traduisant la position assise chez les sujets blessés médullaires. Le H2AT est un modèle (simple) initial qui a permis de démontrer la faisabilité des approches basées sur les outils de l'automatique avancée ; le modèle S3S-2D a été mis en œuvre pour permettre d'analyser les stratégies compensatoires observées dans les essais expérimentaux réalisés dans le cadre de la thèse de Mathias Blandeau (2018) retenant des mouvements symétriques des membres supérieurs dans le plan sagittal. En revanche, ce modèle ne peut être utilisé lorsque les mouvements des membres supérieurs ne sont pas symétriques ou se réalisent en dehors du plan sagittal.

Une extension du modèle S3S-2D afin de permettre l'exploitation de ces autres mouvements est donc nécessaire. Cette extension s'accompagne évidemment d'une complexité méthodologique. Le défi à relever consiste à développer des méthodologies compatibles avec les algorithmes de résolution sans s'éloigner du modèle d'origine.



Dans le chapitre suivant, on étudie en détail le modèle S3S-2D et on développe les observateurs associés pour la reconstruction des efforts produits volontairement et passivement lors de la stabilisation de l'assise. On analyse également les limites du modèle sur une échelle numérique et théorique.

## CHAPITRE 2 : LE MODÈLE S3S-2D

I. Introduction	51
II. Présentation du modèle S3S-2D	51
III. La loi de contrôle du modèle S3S-2D	54
III.1. Le formalisme Takagi-Sugeno T-S	57
III.2. Les problèmes LMI	60
III.2.1. Définition	60
III.2.2. Formulation des contraintes LMI : application au modèle S3S-2D	61
III.2.3. La description en incertitudes	63
III.2.4. Les propriétés des fonctions d'appartenance	65
III.3. Simulation numérique de la loi de contrôle	67
IV. L'observateur global discret du modèle S3S-2D	70
V. L'observateur global continu du modèle S3S-2D	72
V.1. L'observateur PI continu	72
V.2. Simulation de l'observateur continu	76
VI. Conclusion du chapitre 2	84

## I. Introduction

Le chapitre précédent a présenté la lésion médullaire et son impact sur le système stabilisateur. L'absence du contrôle musculaire au niveau de la jonction lombo-sacrée engendre une sollicitation plus accentuée des muscles des membres supérieurs (Blandeau, 2018). En réponse à une perturbation, les sujets blessés médullaires développent des nouvelles stratégies de stabilisation basées essentiellement sur les mouvements des membres supérieurs. Dans le but d'aider les cliniciens dans leur diagnostic, il est intéressant de reconnaître la stratégie utilisée et de fournir des indications sur la manière dont elle a été produite. La détermination des efforts (actifs et passifs) qui assurent la stabilisation assise chez les sujets lésés médullaires permettrait de mieux quantifier l'importance des différentes contributions dans le but de proposer ultérieurement des mouvements et des stratégies aidant au maintien de la stabilité assise. La mesure des couples articulaire s'appuie sur l'emploi d'une instrumentation invasive qui est éthiquement proscrite.

Pour répondre à cette problématique, un modèle mécanique de la position assise inspiré des observations expérimentales lors de la campagne de Blandeau (2018) a été créé. Dans le but de reconstruire les efforts non mesurés, une approche alternative à la dynamique inverse et basée sur les observateurs a été mise en œuvre. Le chapitre précédent a présenté le modèle S3S-2D qui constitue une évolution du modèle H2AT. Le modèle S3S-2D a été conçu dans le but d'analyser certains mouvements sagittaux symétriques observés dans les stratégies compensatoires. En revanche, il ne permet pas d'étudier l'ensemble des mouvements observés lors des acquisitions expérimentales. En effet, dans le chapitre précédent, pour la stratégie dite HM, le sujet lève ses bras au niveau des épaules et les déplace en dehors du plan sagittal pour stabiliser son assise. Ce type de stratégie demeure inexploitable par le modèle S3S-2D en raison de son formalisme.

Dans ce chapitre, on propose de présenter en détail les équations du modèle S3S-2D. Les travaux précédents de Blandeau (2018) avaient permis de proposer un observateur en discret du modèle S3S-2D. Ces travaux sont rappelés, de la commande stabilisante aux contraintes de type LMI (Linear Matrix Inequalities). Les propositions faites dans le cadre de cette thèse concernent en premier lieu un cadre permettant de réduire le nombre de contraintes LMI en tenant compte soit de certaines propriétés liées à une description des incertitudes, soit de certaines similarités du développement limité de fonctions non linéaires (Guerra et al., 2018). En second lieu, une version complète d'un observateur en continu, incluant le problème difficile des prémisses non mesurables, est proposée. Des simulations et des résultats basés sur la campagne d'essais réalisée par Blandeau (2018) sont également décrits.

## II. Présentation du modèle S3S-2D

Le modèle S3S-2D (figure 16) est un triple pendule inverse dans le plan sagittal défini par 3 segments : le tronc, le bras et l'avant-bras. Le modèle S3S-2D, à l'instar du modèle H2AT présenté dans le chapitre précédent, souligne l'importance de la tête et des membres supérieurs dans l'exercice de la stabilisation assise (Janssen-Potten et al., 1999 ; Milosevic et al., 2017).

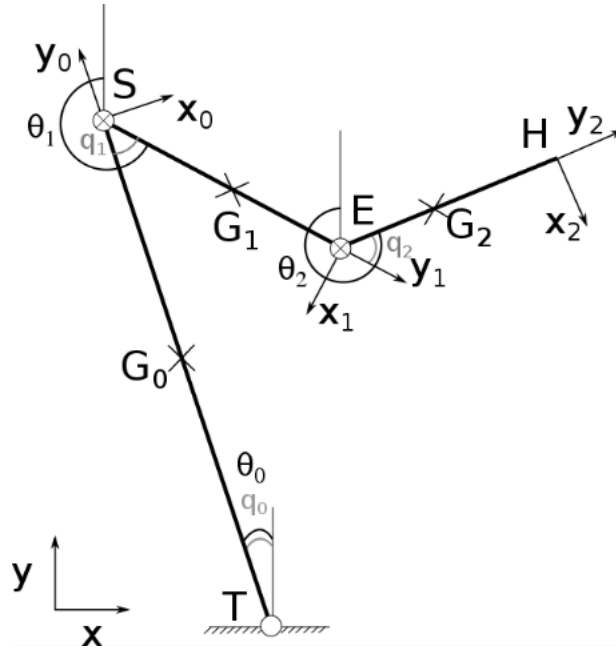


Figure 16: le modèle S3S-2D (Blandeau, 2018)

Le modèle S3S-2D possède 3 degrés de liberté relatifs aux mouvements de flexion/extension définis au niveau du tronc, de l'épaule et du coude. La dynamique du modèle est définie par les équations du Lagrangien  $L = E - U$  avec  $E = \sum_{i=0}^2 E_i$ ,  $U = \sum_{i=0}^2 U_i$ .  $E$  représente l'énergie cinétique et  $U$  l'énergie potentielle. D'après le formalisme de Khalil et Dombre (2004),  $E$  et  $U$  sont égales à la somme des énergies de chaque solide constituant le système mécanique.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial L}{\partial q_0} = M_T \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = M_S \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = M_E \end{cases} \quad (7)$$

Après développement, l'équation (7) s'écrit :

$$\begin{aligned}
M_T = & \ddot{q}_0 \left( I_{q_0} - 2(m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - 2m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& + \ddot{q}_1 \left( I_{q_1} - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \right) \\
& + \ddot{q}_2 \left( I_{q_2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& + \dot{q}_1^2 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\
& + \dot{q}_2^2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\
& + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\
& + 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\
& + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\
& - (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \sin(q_0) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) \\
& + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \\
M_S = & \ddot{q}_0 \left( I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \right) \\
& + \ddot{q}_1 \left( I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_2 \left( I_{q_2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& - \dot{q}_0^2 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) - \dot{q}_2^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \\
& - 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) \\
& + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \\
M_E = & \ddot{q}_0 \left( I_{q_2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_1 \left( I_{q_2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_2 I_{q_2} \\
& + \dot{q}_0^2 \left( m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) + \dot{q}_1^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \\
& + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0)
\end{aligned} \tag{8}$$

Ainsi les couples articulaires au niveau du tronc, de l'épaule et du coude  $[M_T \quad M_S \quad M_E]$  constituent le vecteur des entrées qui permet de stabiliser le système. Dans le cas d'une LME, le système est sous actionné,  $M_T$  étant pas ou peu activable et la stabilisation utilise uniquement l'articulation de l'épaule  $M_S$  et du coude  $M_E$ .

On définit le modèle pour la commande :

$$\begin{cases} E(q) \dot{x}(t) = A(x) x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{9}$$

Avec : le vecteur d'état  $x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_0 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T \in \mathbb{R}^6$

$q_0$  correspond à l'angle articulaire entre la verticale et le tronc

$q_1$  est défini tel que le bras s'aligne avec le tronc si  $q_1 = 0^\circ$  (l'angle relatif entre le tronc et le bras -  $\pi$ )

$q_2$  correspond à l'angle relatif entre le bras et l'avant-bras

$(\dot{q}_0, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$  correspondent aux vitesses angulaires associées.

$u(t) = [M_T \quad M_S \quad M_E]^T \in \mathbb{R}^3$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^3 = [q_0(t) \quad q_1(t) \quad q_2(t)]^T$  est la sortie du système définie par les angles articulaires.

$$E(q) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{E}(q) \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}(q) = \begin{bmatrix} e_{11}(q_1, q_2) & e_{12}(q_1, q_2) & e_{13}(q_1, q_2) \\ e_{21}(q_1, q_2) & e_{22}(q_2) & e_{23}(q_2) \\ e_{31}(q_1, q_2) & e_{32}(q_2) & I_{q_2} \end{bmatrix}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_3 \\ S_C(q) & \tilde{A}(x) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}(x) = \begin{bmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ \dot{q}_1, \dot{q}_2 \end{pmatrix} & a_{12} \begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \end{pmatrix} & a_{13} \begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\ a_{21} \begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_2 \end{pmatrix} & a_{22} \begin{pmatrix} q_2 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} & a_{23} \begin{pmatrix} q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\ a_{31} \begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_1 \end{pmatrix} & a_{32} \begin{pmatrix} q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_1 \end{pmatrix} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_3 \end{bmatrix},$$

$$S_C(q) = \begin{bmatrix} s_0 + s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{012} & s_{012} & s_{012} \end{bmatrix},$$

$$s_0 = (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_{G_2}) \frac{\sin(q_0)}{q_0}, s_{012} = m_2 g l_{G_2} \frac{\sin(q_2 + q_1 + q_0)}{q_2 + q_1 + q_0}, s_{01} = (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_{G_2}) \frac{\sin(q_1 + q_0)}{q_1 + q_0}$$

$$C = [I_3 \quad 0_3].$$

Les matrices sont détaillées en annexe.

L'équation dynamique du modèle S3S-2D (9) est sous forme descripteur (présence de la matrice  $E(q(t)) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  à gauche de l'équation d'état). On note que  $E(q(t))$  ne dépend que des variables mesurées (les positions segmentaires). Dans le cas particulier du modèle S3S-2D,  $B$  et  $C$  sont des matrices constantes,  $E(q(t))$  est inversible pour tout  $q(t)$  et est bornée en norme ( $\|E(q(t))\| < \infty$ ). Cette caractéristique sera exploitée plus tard pour exprimer la convergence de l'erreur d'observation.

Le modèle S3S-2D est instable en boucle ouverte, cette instabilité est due à l'absence du contrôle au niveau du tronc (système sous actionné). Un mouvement des épaules est capable d'engendrer une rotation de la tête et provoquer la chute du sujet. Ainsi pour la simulation, il est indispensable de concevoir une loi de contrôle permettant de stabiliser le modèle avant de synthétiser les estimateurs des efforts articulaires.

### III. La loi de contrôle du modèle S3S-2D

Le but de la loi de contrôle est de stabiliser le modèle uniquement par les articulations de l'épaule et du coude comme la contribution du tronc est passive.

Le modèle continu défini en (9) s'écrit dans le domaine discret (Blandeau et al., 2017) en utilisant la discrétisation d'Euler :  $\dot{x}(t) \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{s}$ ,  $s$  est la période d'échantillonnage.

Le modèle discrétisé s'écrit donc :

$$\begin{cases} E(q_k)x_{k+1} = A(x_k)x_k + sBu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (10)$$

Avec :

$$A(x_k) = sA(x_k) + E(q_k), \quad x_k = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_0 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T, \quad A(x_k) = \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ sS_c(q_k) & s\tilde{A}(x_k) + \tilde{E}(q_k) \end{bmatrix},$$

$$B = sB.$$

Pour des raisons de simplicité l'indice  $k$  est omis et l'indice  $k+1$  est remplacé par le signe  $+$ , i.e.  $x_{k+1} \rightarrow x^+$  et  $x_k \rightarrow x$ .

L'équation finale du modèle non linéaire en discret est définie par :

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{E}(q) \end{bmatrix} x^+ = \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ sS_c(q) & s\tilde{A}(x) + \tilde{E}(q) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ sI_3 \end{bmatrix} u \quad (11)$$

Comme la matrice  $E(q_k)$  est inversible pour tout  $q_k$ , on peut revenir à la représentation d'état classique en inversant celle-ci :

$$x^+ = E^{-1}(q)A(x)x + E^{-1}(q)Bu \quad (12)$$

Ce qui est équivalent à :

$$x^+ = \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ s\tilde{E}^{-1}(q)S_c(q) & s\tilde{E}^{-1}(q)\tilde{A}(x) + I_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ s\tilde{E}^{-1}(q)I_3 \end{bmatrix} u \quad (13)$$

A partir de (13), une linéarisation exacte par retour d'état s'applique directement en utilisant la loi de contrôle non linéaire suivante :

$$u = -[s^{-1}\tilde{E}(x)L_1 + S_c(q) \quad s^{-1}\tilde{E}(x)(L_2 + I_3) + \tilde{A}(x)]x \quad (14)$$

En combinant (14) et (13), on obtient donc le modèle linéaire en boucle fermée :  $x^+ = \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ L_1 & L_2 \end{bmatrix} x$ , où

$(L_1, L_2)$  des matrices qui peuvent être librement choisies.

Si on considère une déficience moteur où la première et la plus importante entrée de contrôle, le couple au niveau du tronc, n'est pas (ou peu) mobilisable, le problème devient dans ce cas-là sous actionné. Dans le cas d'une personne avec une lésion médullaire, les couples actifs ne concernent que l'épaule et le coude. Le tronc, quant à lui, est caractérisé par une participation passive.

En partant de la loi de contrôle « idéale » définie en (14), L'idée est de synthétiser une loi de contrôle telle que :

$$u = -u_{cancel} - u_l \quad (15)$$

$$u_{cancel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [S_c(q) \quad \tilde{A}(x) + s^{-1}\tilde{E}(q)]x(k), \quad u_l = s^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [L_1(x) \quad L_2(x)]x(k)$$

La partie  $u_{cancel}$  permet d'annuler les deux dernières lignes de la boucle ouverte (les deux dernières lignes de  $S_c(q)$  et  $\tilde{A}(x)$ ), elle représente donc la participation passive au niveau du tronc. Et la partie  $u_l$  représente la seule possibilité de contrôle pour les sujets lésés médullaires à travers l'épaule et le coude, elle permet donc de piloter le modèle avec le gain de commande  $L(x) \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$  (le gain de contrôle à déterminer).

En se basant sur (15) et (13), le modèle en boucle fermée s'écrit :

$$E(q)x^+ = (\Sigma(x) - \Gamma \times L(x))x \quad (16)$$

$$\text{Avec : } L(x) \in \mathbb{R}^{2 \times 6}, \Sigma(x) = \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ [sS_c(q)]_1 & [s\tilde{A}(x) + \tilde{E}(q)]_1 \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

La notation  $[A]_i$  correspond à la ligne  $i$  de la matrice  $A$ .

La deuxième ligne de  $\Sigma(x)$ ,  $[ [sS_c(q)]_1 \quad [s\tilde{A}(x) + \tilde{E}(q)]_1 ]$ , regroupe toutes les non linéarités relatives au tronc et la dernière ligne de  $\Sigma(x)$ ,  $[0_{2 \times 3} \quad 0_{2 \times 3}]$ , représente la linéarisation partielle au niveau de l'épaule et du coude.

Le modèle contrôlé (16) comprend 9 non linéarités :

- 3 dans la matrice  $\tilde{E}(q) : \cos(q_1), \cos(q_2), \cos(q_2 + q_1)$
- 3 dans la matrice  $[S_c(q)]_1 : \frac{\sin(q_0)}{q_0}, \frac{\sin(q_0 + q_1)}{q_0 + q_1}, \frac{\sin(q_0 + q_1 + q_2)}{q_0 + q_1 + q_2}$
- 3 dans la matrice  $[\tilde{A}(x)]_1 : a_{11}(q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2), a_{12}(x), a_{13}(x)$

Les non linéarités dans  $\tilde{E}(q)$  et  $[S_c(q)]_1$  sont mesurables contrairement aux non linéarités dans  $[\tilde{A}(q)]_1$  qui ne sont pas mesurables donc celles-ci sont plus difficiles à gérer.

Il s'agit d'une difficulté classique lors de la modélisation biomécanique, et dans ce cadre des nombreux travaux ont surmonté ce problème en linéarisant les équations du modèle obtenu autour des points d'équilibre (Masani et al., 2003 ; Qu et al., 2007 ; Suzuki et al., 2011 ; Li et al., 2012). Dans le cas du modèle S3S-2D cette linéarisation n'est pas valable car elle réduit le domaine de validité et d'utilisabilité du modèle. Par ailleurs, pour la reconstruction des variables internes il est fondamental de s'appuyer sur un modèle précis car toute simplification constitue une perte d'information et peut par conséquent biaiser la qualité d'estimation.

Un cadre théorique qui permet de bien traiter les équations non linéaires tout en garantissant un compromis acceptable entre la validité du modèle et la complexité de sa représentation est le formalisme quasi LPV (linéaire à paramètres variants) appelé également le formalisme de Takagi-Sugeno (TS).



### III.1. Le formalisme Takagi-Sugeno T-S

Le formalisme de Takagi-Sugeno ou T-S est une approche qui permet de donner une représentation « exacte » de la dynamique d'un système non linéaire dans un domaine de validité défini à partir d'une somme convexe de sous-modèles linéaires (Takagi et Sugeno., 1985).

Pour construire les modèle T-S deux techniques sont possibles :

1- La méthode de la linéarisation (Johansen et al., 2000) : cette approche consiste à faire une extension de la série de Taylor en différents points représentatifs qui peuvent être des points d'équilibre ou non. L'avantage de construire des modèles T-S à travers la linéarisation est que même si le modèle flou n'est qu'une approximation du modèle non linéaire d'origine, les modèles T-S locaux reconstruits conservent les propriétés importantes du système non linéaire aux points de linéarisation (Lendek et al., 2010). L'inconvénient de cette approche est qu'il n'existe pas une méthode précise permettant de choisir les points de linéarisation ou combien de points seront nécessaires en fonction du nombre des non linéarités dans le modèle. Selon la non linéarité, un grand nombre de points est parfois recommandé pour avoir une approximation précise ce qui implique un coût considérable. Par ailleurs comme la linéarisation n'est pas en général appliquée aux points d'équilibre, ceci entraîne des difficultés dans l'analyse de la stabilité et la mise en œuvre du contrôleur (Lendek et al., 2010).

2- la méthode par secteur non linéaire : cette approche a été décrite dans les travaux de Ohtake et al. (2001) et c'est l'approche couramment utilisée dans la construction des modèles T-S. Les secteurs non linéaires sont définis en fonction des bornes min et max des non linéarités. Si on dispose par exemple de  $p$  non linéarités ceci signifie  $2^p$  sous-modèles linéaires obtenus par décomposition T-S.

Pour illustrer l'approche, on considère le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t)) \quad (17)$$

$g(\cdot)$  est une fonction non linéaire,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^{m_u}$  la commande.

On suppose que le modèle non linéaire (17) peut être exprimé selon un modèle non linéaire affine en la commande de type :

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t) \quad (18)$$

Avec  $A(x), B(x)$  sont des matrices contenant des termes supposés être bornés dans un ensemble compact  $\Omega_x$ .

On considère  $p$  non linéarités notées  $f_j(\cdot)$  contenues dans  $(A(x), B(x))$  tels que  $f_j(\cdot) \in [\underline{f}_j, \bar{f}_j]$  avec  $\underline{f}_j = \inf(f_j(\cdot))$  et  $\bar{f}_j = \sup(f_j(\cdot))$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$ . L'ensemble des variables différentes dont dépendent les  $f_j(\cdot)$  constitue le vecteur de prémisse  $z \in \mathbb{R}^p$ .

Pour chaque non linéarité  $f_j(\cdot)$  deux fonctions sont construites :  $w_1^j(\cdot)$  et  $w_2^j(\cdot)$  telles que :

$$w_1^j(\cdot) = \frac{f_j(\cdot) - \underline{f}_j}{\bar{f}_j - \underline{f}_j}, \quad w_2^j(\cdot) = 1 - w_1^j(\cdot) \text{ et } f_j(\cdot) = \underline{f}_j \times w_1^j(\cdot) + \bar{f}_j \times w_2^j(\cdot).$$

On définit les fonctions non linéaires d'appartenance :  $h_i(z) = \prod_{j=1}^p w_{\delta_j^i}^j(z_j)$  avec  $i = \delta_1^i \times 2^{p-1} + \dots + \delta_{p-1}^i \times 2 + \delta_p^i + 1 \in \{1, \dots, 2^p\}$ ,  $\delta_j^i \in \{0, 1\}$  est un digit (Guerra et al., 2018).

Les fonctions  $h_i$  sont liées aux non linéarités présentes dans le modèle et elles satisfont la propriété de somme convexe :  $h_i(z) \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m h_i(z) = 1$ . Le modèle T-S associé au modèle non linéaire (18) s'écrit donc :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (19)$$

$r$  est le nombre des sous modèles locaux. Le vecteur de prémisse  $z(t)$  peut dépendre des variables mesurées ou non mesurées.

Le formalisme T-S selon cette représentation est une combinaison des modèles linéaires connectés avec des fonctions d'appartenance non linéaires et satisfaisant la propriété de somme convexe (Lendek et al., 2010 ; Tanaka and Sugeno, 1992 ; Tanaka and Wang, 2001 ; Wang et al., 1996). Par conséquent, la théorie de T-S est analogue à un système à paramètres variables dans le temps.

Afin d'illustrer le formalisme T-S et la création des matrices locales, prenons les deux exemples suivants :

- Exemple 1

Soit le domaine borné :  $\Omega_x = \{x : |x_i| \leq 1, i = 1, 2\}$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad (20)$$

Une manière d'écrire le système précédent est de définir une matrice non linéaire telle que :

$$\dot{x} = A(x)x, \quad A(x) = \begin{bmatrix} -1 & x_1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Si on considère la variable bornée par exemple  $x_1 \in [-1 \ 1]$ , les fonctions de pondération associées s'écrivent sous la forme de :

$$h_1(x_1) = \frac{x_1 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{x_1 + 1}{2} \text{ et } h_2(x_1) = \frac{1 - x_1}{1 - (-1)} = \frac{1 - x_1}{2} \quad (22)$$

Ainsi on peut définir les matrices locales linéaires :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & \bar{x}_1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \underline{x}_1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Et enfin le modèle T-S s'écrit :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 h_i(z) A_i x = (h_1(z) A_1 + h_2(z) A_2) x \quad (23)$$

(23) représente exactement (20) dans l'ensemble compact  $\Omega_x$ .

On note que cette représentation n'est pas unique, par exemple on peut écrire le modèle sous la forme

$\dot{x} = A(x)x$  avec  $A(x) = \begin{bmatrix} -1+x_2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , la non linéarité est cette fois  $x_2$  bornée dans  $[-1 \ 1]$ . Les

fonctions de pondération seront :

$$h_1(x_2) = \frac{x_2 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{x_2 + 1}{2} \text{ et } h_2(x_2) = \frac{1 - x_2}{1 - (-1)} = \frac{1 - x_2}{2} = 1 - h_1(x_2)$$

Dans ce cas les matrices locales linéaires seront :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 + \bar{x}_2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{bmatrix} -1 + \underline{x}_2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

#### - Exemple 2

Soit le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 - 12 \times \cos^2(x_1) & 10 - 5 \times |\cos(x_1)| \\ 4 \times (1 - |\cos(x_1)|) \times \cos^2(x_1) & -2 - 5 \times (1 - \cos^2(x_1)) \end{bmatrix} x(t) \quad (24)$$

En utilisant la méthode par secteur non linéaire, on obtient le modèle T-S suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (25)$$

Les matrices locales :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -15 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Les fonctions d'appartenance :

$$w_0^1(x_1) = |\cos(x_1)|, w_1^1(x_1) = 1 - w_0^1(x_1), w_0^2(x_1) = 1 - \cos^2(x_1), w_1^2(x_1) = 1 - w_0^2(x_1) \\ h_1 = w_0^1 w_0^2, h_2 = w_1^1 w_0^2, h_3 = w_0^1 w_1^2, h_4 = w_1^1 w_1^2$$

Le premier avantage de la décomposition par secteur non linéaire est que le modèle T-S résultant est une représentation exacte du modèle non linéaire de base dans un domaine compact donné  $\Omega_x$ . Le deuxième avantage est que l'analyse de la stabilité et la synthèse du contrôleur peuvent être réalisés à travers des LMI qui sont résolues à partir des techniques d'optimisation convexes (Boyd et al., 1994 ; Scherer, 2004). Néanmoins, l'inconvénient de cette approche est que le nombre des modèles locaux obtenus évolue exponentiellement en puissance 2 des non linéarités considérées dans le modèle (Taniguchi et al., 1999). Dans certaines applications, un grand nombre de modèles locaux peut créer des problèmes intraitables en raison de la limitation des algorithmes actuels, il est donc essentiel, quand c'est possible, de réduire la taille du modèle T-S. Dans le cas particulier de notre étude, résoudre le problème brut entraîne plus de 4.7 millions de variables et plus de 262000 contraintes LMI à résoudre. Evidemment ce type de problème est incompatible, non seulement avec la capacité des calculateurs numériques, mais aussi avec la RAM des ordinateurs modernes car rien que le stockage des matrices sur un logiciel comme MATLAB nécessite plus de 18 GB de mémoire (Thieffry et al., 2018).

Ainsi, plusieurs techniques (notamment présentées dans ce mémoire) sont possibles afin de simplifier la complexité du problème et tenter d'obtenir un nombre de variables et de contraintes LMI compatibles avec les solveurs. Le deuxième inconvénient est que les modèles affines ou linéaires obtenus ne sont pas automatiquement stables ou observables même si le modèle non linéaire d'origine l'est. Plusieurs représentations T-S peuvent être associées au même modèle non linéaire selon la manipulation algébrique des matrices et des non linéarités, donc différents vecteurs de prémisses peuvent être créés, les sommets résultants  $(A_i, B_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  peuvent par conséquent avoir des propriétés différentes. Ils peuvent être stables ou instables, incontrôlables ou inobservables. Chaque représentation T-S donne lieu à des résultats différents.

## III.2. Les problèmes LMI

Pour analyser la stabilité et concevoir des observateurs et/ou des contrôleurs pour les modèles TS, on utilise généralement des contraintes LMI.

Dans ce mémoire, les solutions sont obtenues en résolvant des LMI (Boyd et al., 1994) qui utilisent les outils de résolution de Gahinet et al. (1994).

### III.2.1. Définition

Les contraintes LMI sont des expressions dont les variables sont des matrices linéairement dépendantes. Une définition formelle des LMI a été donnée dans Boyd et al. (1994) :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (26)$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur contenant les variables de décision et  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont des matrices symétriques et constantes.

L'ensemble de solutions des contraintes LMI (26), appelé l'ensemble de faisabilité, est noté  $S = \{x \mid x \in \mathbb{R}^m, F(x) > 0\}$  et est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^m$ .

Trouver une solution à (26) est un problème d'optimisation convexe, quand les solutions n'existent pas au problème on dit qu'il est infaisable.

Plusieurs solveurs numériques sont utilisés pour résoudre ces problèmes d'optimisation tels que : LMILAB, SDPT3, LMIRank, SeDuMi et Mosek. Dans ce manuscrit, les contraintes LMI ont été résolues via la toolbox Yalmip (Lofberg, 2004).

Parfois, les conditions LMI n'apparaissent pas naturellement dans le problème de contrôle ou d'observation. L'un des objectifs lorsqu'on rencontre des problèmes de ce type est de les transformer en expressions LMI, cela est parfois possible en employant des propriétés matricielles. Les propriétés les plus utilisées sont : la congruence, le complément de Schur, la S-procédure et la complétion des carrés. Ces propriétés sont détaillées en annexe.

L'écriture descripteur est une généralisation de l'équation d'état classique. Dans le cas des systèmes mécaniques étendus, la forme descripteur est généralement conservée dans l'équation dynamique du modèle car elle permet d'obtenir un nombre réduit de contraintes LMI (Guerra et al., 2004) et d'augmenter le domaine de faisabilité du problème à résoudre.

Pour illustrer cette idée prenons l'exemple suivant :

$$E(x)\dot{x}(t) = A(x)x(t) \quad (27)$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1/(1+x_2^3) \\ 1/(1+x_2^3) & 3 \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} \sin(x_2)/x_2 & 1 \\ 3 & \cos(x_2) \end{bmatrix}$$

Selon une représentation TS sous forme de :

$$\sum_{i=1}^{r_e} v_i(z(t)) E_i \dot{x}(t) = \sum_{k=1}^r h_k(z(t)) A_k x(t) \quad (28)$$

$r_e = 2$  en raison du terme non linéaire  $1/(1+x_2^3)$  dans la matrice  $E(x)$  et  $r = 2^2$  en raison des deux termes non linéaires  $(\sin(x_2)/x_2, \cos(x_2))$ . Afin de revenir à la représentation d'état classique, il est nécessaire d'inverser la matrice  $E(x)$  telle que :  $\dot{x}(t) = (E(x))^{-1} A(x)x(t)$ .

$$(E(x))^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1/(1+x_2^3) \\ 1/(1+x_2^3) & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \Delta \begin{bmatrix} 3(1+x_2^3) & -1 \\ -1 & 2(1+x_2^3) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\Delta = (1+x_2^3)/(6x_2^6 + 12x_2^3 + 5) \quad (30)$$

Cette inversion engendre  $r = 2^4$  car toutes les non linéarités seront placées dans la partie droite de l'équation. Par conséquent, le nombre des contraintes LMI pour un modèle TS avec inversion de la matrice descripteur est de  $16^2 + 1 = 257$  alors que l'écriture TS en conservant la matrice descripteur dans la partie gauche de l'équation engendre  $2 \times 4^2 + 1 = 33$  contraintes LMI à résoudre.

Le fait d'écrire les problèmes avec des contraintes de type LMI permet de rajouter des contraintes LMI prenant en compte les performances, par exemple un taux de décroissance minimum, une atténuation du bruit de mesure ou de l'effet d'une perturbation

Par exemple, le taux de décroissance revient à rechercher  $\gamma > 0$  tel que la convergence de l'état  $x(t)$  soit plus rapide que  $e^{-\gamma t}$ , cela s'exprime pour une fonction de Lyapunov par :

$$V(x(t)) \leq e^{-2\gamma(t-t_0)} V(x(t_0)) \quad \forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n \quad (31)$$

### III.2.2. Formulation des contraintes LMI : application au modèle S3S-2D

La mise en œuvre de la loi de contrôle est basée sur le formalisme T-S et le gain de contrôle est déterminé via la résolution des LMI.

En utilisant le formalisme T-S, le modèle (16) s'écrit alors selon le principe de la décomposition par secteur non linéaire (Ohtake et al., 2001) :

$$\begin{cases} E_z \dot{x}^+ = (\Sigma_z - \Gamma \times L(x))x \\ y = Cx \end{cases} \quad (32)$$

Le système (32) représente exactement le modèle (16) dans un domaine compact issu des données anatomiques de flexion/extension des membres supérieurs (Kapandji, 2005a, 2005b) en ° et °/s :

$$\Omega_x = \left\{ \begin{array}{l} -5 \leq q_0 \leq 5 \quad \|\dot{q}_0\| \leq 29 \\ -20 \leq q_1 \leq 60, \|\dot{q}_1\| \leq 57 \\ -10 \leq q_2 \leq 45 \quad \|\dot{q}_2\| \leq 57 \end{array} \right\} \quad (33)$$

On note que l'angle positif correspond à la flexion et que l'angle négatif correspond à l'extension.

Chaque non linéarité définie dans le modèle (32) est bornée dans l'ensemble compact  $\Omega_x$ .

$E_z = \sum_{i=1}^r h_i(z) E_i$  et  $\Sigma_z = \sum_{i=1}^r h_i(z) \Sigma_i$  avec  $(E_i, \Sigma_i)$  des matrices constantes. La propriété de somme convexe est conservée pour les fonctions d'appartenance  $h_i(z)$ .

Le but est de définir un gain de contrôle par retour d'état  $L(x)$  qui permette de stabiliser le modèle en (16). La « meilleure » option dans le sens de limiter le nombre des contraintes LMI (éviter les doubles sommes) et le nombre des variables additionnelles (Estrada-Manzo, 2015) est de considérer  $L(x) = K_{zz-} G_{z-}^{-1}$ .

Avec  $K_{zz-} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k)) h_j(z(k-1)) K_{ij}$  et  $G_{z-}^{-1} = \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(k-1)) G_i \right)^{-1}$  sont des matrices à déterminer.

On considère la fonction de Lyapunov  $V(x_k) = x_k^T P_{z-}^{-1} x_k$  dont la variation  $\Delta V(x_k)$  s'écrit :

$$\Delta V(x_k) = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_{z-}^{-1} & 0 \\ 0 & P_z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} < 0. \quad (34)$$

(32) se réécrit sous forme d'une contrainte égalité :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_z - \Gamma K_{zz-} G_{z-}^{-1} & -E_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (35)$$

En appliquant le lemme de Finsler (voir annexe) avec  $M_{(\cdot)}$  une matrice libre, rechercher l'inégalité (34) sous les contraintes de (35) est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} -P_{z-}^{-1} & 0 \\ 0 & P_z^{-1} \end{bmatrix} + M_{(\cdot)} \begin{bmatrix} \Sigma_z - \Gamma K_{zz-} G_{z-}^{-1} & -E_z \end{bmatrix} + (*) < 0 \quad (36)$$

Un choix qui permet d'obtenir des contraintes LMI est  $M_{(\cdot)} = \begin{bmatrix} 0 & R_{z-}^{-1} \end{bmatrix}^T$ . En appliquant la propriété de congruence (voir annexe) avec  $\text{diag}(G_z^T, R_{z-}^{-T})$  à l'inégalité (36) on obtient :

$$\begin{bmatrix} -G_z^T P_{z-}^{-1} G_z & 0 \\ 0 & R_{z-}^T P_z^{-1} R_{z-} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_z G_z - \Gamma K_{zz-} & -E_z R_{z-} \end{bmatrix} + (*) < 0 \quad (37)$$

Et comme  $-G_{z-} - G_{z-}^T + P_{z-} \leq -G_z^T P_{z-}^{-1} G_z$  on obtient une condition suffisante :

$$\begin{bmatrix} -G_{z-} - G_{z-}^T + P_{z-} & (*) \\ \Sigma_z G_{z-} - \Gamma K_{zz-} & -E_z R_{z-} - (*) + R_{z-}^T P_z^{-1} R_{z-} \end{bmatrix} < 0 \quad (38)$$

Cela donne les conditions LMI suivantes suite à l'application du complément de Schur (voir annexe) :

$$\begin{bmatrix} -G_{z-} - G_{z-}^T + P_{z-} & (*) & (*) \\ \Sigma_z G_{z-} - \Gamma K_{zz-} & -E_z R_{z-} - (*) & (*) \\ 0 & R_{z-} & -P_z \end{bmatrix} < 0 \quad (39)$$

Si l'inégalité (38) est faisable, la positivité de  $G_{z-} + G_{z-}^T - P_{z-}$  sera garantie d'où la régularité de la matrice  $G_{z-}$  dans le gain de contrôle  $L(x)$ .

Les conditions LMI obtenues en (38) traduisent un problème LMI défini par 9 non linéarités. Ce qui conduit à  $r = 2^9 = 512$  sous modèles locaux linéaires selon le formalisme T-S et donc  $512^2 = 262144$  contraintes dues à la double somme dans  $K_{zz-}$ . Les 9 non linéarités sont réparties comme suit :

<p>Dans la matrice <math>\tilde{E}(q) = \cos(q_1), \cos(q_2), \cos(q_1 + q_2)</math></p> <p>Dans la matrice <math>[S_c(q)]_1 : \frac{\sin(q_0)}{q_0}, \frac{\sin(q_0 + q_1)}{q_0 + q_1}, \frac{\sin(q_0 + q_1 + q_2)}{q_0 + q_1 + q_2}</math></p> <p>Dans la matrice <math>[\tilde{A}(x)]_1 : a_{11}(q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2), a_{12}(x), a_{13}(x)</math></p>	Problème LMI-1
--	----------------

Les contraintes LMI =  $r^2$  et la taille des contraintes LMI =  $3n$

Le nombre des inconnues =  $r \times n(2.5n + 0.5 + r \times m)$

Le problème LMI 1 présente une complexité incompatible avec les calculateurs numériques actuels. Afin de réduire cette complexité, deux techniques de réduction des sommets sont possibles : la première consiste à remplacer des sommets du polytope par des incertitudes et la seconde consiste à utiliser des propriétés sur les fonctions d'appartenance (basées sur le développement limité de Taylor).

### III.2.3. La description en incertitudes

Afin de réduire le nombre de sommets, une partie des non linéarités peut être absorbée par les propriétés de robustesse de la loi Chadli et al. (2014), i.e. une partie des non linéarités incluses dans les matrices peut être modélisée en utilisant des incertitudes. La solution pratique dans le cas du modèle S3S-2D est de réduire le terme  $[\tilde{A}(x)]_1$ . On considère :

$$E(q)x^+ = (\Sigma(q) + s\Delta\Sigma(x) - \Gamma L(x))x \quad (40)$$

Avec :

$$\Sigma(q) = \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ [sS_c(q)]_1 & [\tilde{E}(q)]_1 \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix} \quad (41)$$

En utilisant la notation classique de la base vectorielle de  $\mathbb{R}^n$  :

$$e_i^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}_{i^{th} \text{ position}} \quad (42)$$

$$\Delta\Sigma(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & [\tilde{A}(x)]_1 \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix} = [e_4 \quad e_4 \quad e_4] \begin{bmatrix} a_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & a_{12}(x) & 0 \\ 0 & 0 & a_{13}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4^T \\ e_5^T \\ e_6^T \end{bmatrix} \quad (43)$$

Comme les termes  $a_{1i}(x), i \in \{1, 2, 3\}$  sont centrés on peut donc les réécrire sous la forme :

$a_{1i}(x) = \delta_i(x) f_i$  avec  $|\delta_i(x)| < 1$ . Finalement on obtient :

$$\Delta\Sigma(x) = H\delta(x)F, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 e_4^T \\ f_2 e_5^T \\ f_3 e_6^T \end{bmatrix}, \quad H = [e_4 \quad e_4 \quad e_4] \quad (44)$$

On peut donc réécrire (38) en :

$$\begin{bmatrix} -G_{z-} - G_{z-}^T + P_{z-} & (*) \\ \Sigma_z G_{z-} - \Gamma K_{zz-} & -E_z R_{z-} - (*) + R_{z-}^T P_z^{-1} R_{z-} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & (*) \\ \Delta\Sigma(x) G_{z-} & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

En utilisant la complétion des carrés classique (Boyd et al., 1994) avec un scalaire  $\mu > 0$  on obtient

$$\begin{bmatrix} 0 & (*) \\ H\delta(x)FG_{z-} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \delta(x) [FG_{z-} \quad 0] + (*) \leq \begin{bmatrix} \mu^{-1} G_{z-}^T F^T F G_{z-} & 0 \\ 0 & \mu H H^T \end{bmatrix} \quad (46)$$

Ainsi l'inégalité (45) est satisfaite si

$$\begin{bmatrix} -G_{z-} - G_{z-}^T + s\mu^{-1} G_{z-}^T F^T F G_{z-} + P_{z-} & (*) \\ \Sigma_z G_{z-} - \Gamma K_{zz-} & -E_z R_{z-} - (*) + s\mu H H^T + R_{z-}^T P_z^{-1} R_{z-} \end{bmatrix} < 0 \quad (47)$$

En utilisant le complément de Schur sur la première composante de (47) on obtient :

$$\begin{bmatrix} -G_{z-} - G_{z-}^T + P_{z-} & (*) & (*) \\ sFG_{z-} & -s\mu I & 0 \\ \Sigma_z G_{z-} - \Gamma K_{zz-} & 0 & -E_z R_{z-} - (*) + s\mu H H^T + R_{z-}^T P_z^{-1} R_{z-} \end{bmatrix} < 0 \quad (48)$$

On considère l'égalité :  $s\mu H H^T + R_{z-}^T P_z^{-1} R_{z-} = [s\mu H \quad R_{z-}^T] \begin{bmatrix} s^{-1}\mu^{-1}I & 0 \\ 0 & P_z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mu H^T \\ R_{z-} \end{bmatrix}$ .

Via un deuxième complément de Schur sur le dernier terme de (48), on obtient les conditions LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} -G_{z-} - G_{z-}^T + P_{z-} & (*) & (*) & 0 & 0 \\ sFG_{z-} & -s\mu I & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_z G_{z-} - \Gamma K_{zz-} & 0 & -E_z R_{z-} - R_{z-}^T E_z^T & (*) & (*) \\ 0 & 0 & s\mu H^T & -s\mu I & 0 \\ 0 & 0 & R_{z-} & 0 & -P_z \end{bmatrix} < 0 \quad (49)$$

Cette technique a permis de réduire le nombre des sommets dans le polytope à  $2^6 = 64$  ce qui donne le deuxième problème LMI défini par 6 non linéarités.



Pour $\tilde{E}(q) : \cos(q_1), \cos(q_2), \cos(q_1 + q_2)$	Problème LMI-2
Pour $[S_c(q)]_1 : \frac{\sin(q_0)}{q_0}, \frac{\sin(q_0 + q_1)}{q_0 + q_1}, \frac{\sin(q_0 + q_1 + q_2)}{q_0 + q_1 + q_2}$	

Une seconde possibilité pour réduire le nombre des sommets est d'utiliser la propriété de similarité entre certaines non linéarités.

### III.2.4. Les propriétés des fonctions d'appartenance

Il est possible de réduire encore le nombre des sommets en considérant les propriétés trigonométriques de certaines non linéarités. En effet, l'intérieur du polytope est partiellement vide et comme certaines non linéarités dépendent des mêmes variables alors l'intégralité de l'intérieur du polytope ne peut être atteinte.

La méthode proposée pour réduire le nombre des sommets a été proposée dans les travaux de Guerra et al. (2018) visant à réécrire une fonction  $g(x)$  via  $w_f(x)$  qui constitue la fonction d'appartenance d'une autre fonction  $f(x)$ .

Cela est équivalent à approximer  $g(x)$  par  $g_{app}(x)$  de la manière suivante :

$$g_{app}(x) = \bar{w}_f(x) \underline{g}_{app} + (1 - \bar{w}_f(x)) \bar{g}_{app} + g_j \quad (50)$$

On suppose une relation linéaire entre  $w_f(x)$  et  $w_g(x)$  telle qu'il existe deux scalaires  $\lambda_f$  et  $\lambda_0$  tels que :  $w_g(x) = \lambda_f w_f(x) + \lambda_0$ .

$g_{app}(x)$  s'écrit donc :

$$g_{app}(x) = (\lambda_f \bar{w}_f(x) + \lambda_0) \underline{g} + (1 - \lambda_f \bar{w}_f(x) - \lambda_0) \bar{g} \quad (51)$$

L'erreur d'approximation  $e_g = g(x) - g_{app}(x)$  s'écrit :

$$e_g = g(x) - \bar{w}_f(x) (\lambda_f \underline{g} + (1 - \lambda_f) \bar{g}) - (1 - \bar{w}_f(x)) \bar{g} - \lambda_0 (\underline{g} - \bar{g}) \quad (52)$$

L'objectif est donc de trouver les scalaires  $\lambda_f$  et  $\lambda_0$  pour minimiser l'erreur  $e_g$ . La méthode adoptée

est celle des moindres carrés en minimisant  $\sum_{i=1}^n e_{g_i}^2$ .

On peut réécrire :

$$e_g = g(x) - \bar{g} - \psi(x) \lambda \quad (53)$$

$$\text{Avec } \psi(x) = (\underline{g} - \bar{g}) \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_f(x) \end{bmatrix} \text{ et } \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_f \end{bmatrix}.$$

La solution optimale pour résoudre le problème est :

$$\lambda_{optimal} = (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T Y \quad (54)$$

avec  $\varphi = [\psi(x_1) \quad \dots \quad \psi(x_n)]^T$  et  $Y = [g(x_1) - \bar{g} \quad \dots \quad g(x_n) - \bar{g}]^T$ .

On applique cet algorithme au modèle S3S-2D pour les non linéarités  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  et  $g(x) = \cos(x)$  dans un intervalle où  $q_1 \in [-2, 2] \text{ rad}$ .

En utilisant le développement de Taylor on peut écrire :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ et } \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \quad (55)$$

Pour  $f(x)$  et  $g(x)$  avec  $x \in [-2, 2] \text{ rad}$ , on peut écrire :

$$\left. \frac{\sin(x)}{x} \right|_{app} = w_f(x) \times \cos(2) + (1 - w_f(x)) \times 1 \text{ avec } w_f(x) = \lambda_f \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(2)} + \lambda_0 \quad (56)$$

La valeur optimale de (54) donne  $(\lambda_0 = -0.014, \lambda_f = 0.9762)$  et l'erreur d'approximation maximale est  $|g(x) - g_{app}(x)| \leq 3.8\%$  (Guerra et al., 2018).

Et enfin on considère, à partir des propriétés trigonométriques :

$$\sin(q_2 + q_1 + q_0) = \sin(q_1 + q_2) \cos(q_0) + \sin(q_0) \cos(q_1 + q_2) = [q_0 \quad q_1 \quad q_2] \begin{bmatrix} \frac{\sin(q_0)}{q_0} \cos(q_1 + q_2) \\ \cos(q_0) \frac{\sin(q_1 + q_2)}{q_1 + q_2} \\ \cos(q_0) \frac{\sin(q_1 + q_2)}{q_1 + q_2} \end{bmatrix}.$$

Ainsi pour représenter  $\frac{\sin(q_0)}{q_0}, \frac{\sin(q_0 + q_1)}{q_0 + q_1}, \frac{\sin(q_0 + q_1 + q_2)}{q_0 + q_1 + q_2}, \cos(q_1), \cos(q_2), \cos(q_1 + q_2)$ , 4 non linéarités sont suffisantes et les non linéarités sous la forme de  $\frac{\sin(q_1)}{q_1}$  sont traitées via les valeurs optimales de  $(\lambda_0, \lambda_f)$  définies dans (56).

Vis-à-vis de la complexité, le nombre de sommets a été réduit à  $2^7 = 128$  ce qui permet de formuler le problème LMI-3 où les non linéarités sont :

Pour $\tilde{E}(q), [S_C(q)]_1 : \cos(q_0), \cos(q_1), \cos(q_2), \cos(q_1 + q_2)$ Et pour $[\tilde{A}(x)]_1 : a_{11}(q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2), a_{12}(x), a_{13}(x)$	Problème LMI-3
--	----------------

Trois problèmes LMI ont été formulés et on peut aussi créer le quatrième problème LMI en combinant les deux approches de réduction de nombre des sommets. D'où on obtient le problème final LMI 4 qui utilise la description d'incertitude pour  $[\tilde{A}(x)]_1$ .

Le problème LMI-4 est défini par  $2^4 = 16$  sommets et 4 non linéarités mesurables comme suit :

Pour $\tilde{E}(q), [S_c(q)]_1 : \cos(q_0), \cos(q_1), \cos(q_2), \cos(q_1 + q_2)$	Problème LMI-4
--	----------------

Le tableau récapitulatif suivant donne une comparaison entre les quatre problèmes LMI présentés en fonction de la dimension, du nombre des contraintes LMI et le nombre d'inconnues.

$n = 6, m = 3$	LMI	Dimension	Inconnues
LMI problème 1 : $r = 512$	262 144	18	4 766 208
LMI problème 2 : $r = 64$	4 096	30	79 680
LMI problème 3 : $r = 128$	16 384	18	306 816
LMI problème 4 : $r = 16$	256	30	6 096

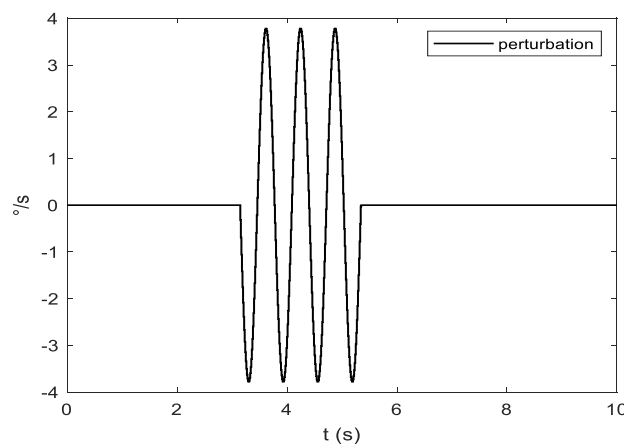
**Tableau 1: comparaison entre les 4 problèmes LMI**

La loi de contrôle relative au problème LMI-4 considère les trois segments composant le modèle S3S-2D via la représentation des angles correspondants  $(q_0 \ q_1 \ q_2)$ . Réduire davantage les termes non linéaires dans le modèle est « difficile » car la loi de contrôle qui sera créée ne respectera pas la structure du modèle non linéaire d'origine.

### III.3. Simulation numérique de la loi de contrôle

Tous les problèmes LMI ont été programmés sur MATLAB R2019b muni de l'interface YALMIP (Sturm, 1999) et du solveur MOSEK pour la résolution des contraintes LMI.

Le modèle non linéaire (9) stabilisé est simulé. La simulation respecte la structure suivante : on commence par des conditions initiales non nulles, puis une perturbation de type sinusoïdal de fréquence 10 Hz est appliquée sur la vitesse angulaire du tronc  $\dot{q}_0$  (figure 17) dans le but d'évaluer l'efficacité de la loi de contrôle. Cette perturbation correspond aux amplitudes des accélérations utilisées dans la phase expérimentale et lors des exercices de rééducation chez les patients vivant avec une LME (Bjerkefors et al., 2007).



**Figure 17: la perturbation**

La faisabilité des conditions LMI a été comparée entre les 4 problèmes LMI présentés. Le temps mis pour résoudre les contraintes LMI et calculer le gain de contrôle est d'environ :

- 10 minutes pour problème LMI-2
- 25 minutes pour le problème LMI-3
- 4 secondes pour le problème LMI-4

Le problème LMI-1 s'arrête au bout de 8 heures sans donner une solution faisable. En termes de domaine de faisabilité, seul 62% du domaine des variables admissibles  $\Omega_x$  (33) est atteignable en utilisant le problème LMI-2 alors que 100% du domaine est obtenu avec le problème LMI-4.

Dans la simulation ci-après, le modèle S3S-2D a été stabilisé par la loi de contrôle définie après résolution des contraintes LMI-4 (composées de 4 non linéarités mesurables). Le gain de la partie linéaire de la loi de contrôle a été calculé :

$$L=10^3 \begin{bmatrix} 7.2 & -0.21 & -1.9 & 22.1 & 23 & -3.9 \\ 10.23 & 5.77 & 114 & -0.34 & 67.01 & -0.02 \end{bmatrix}.$$

On voit sur la figure 18 qu'à l'issue de la perturbation, les angles relatifs au tronc, à l'épaule et au coude  $[q_0 \ q_1 \ q_2]$  ainsi que les vitesses articulaires associées  $[\dot{q}_0 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]$  convergent vers la position d'équilibre  $0^\circ$ .

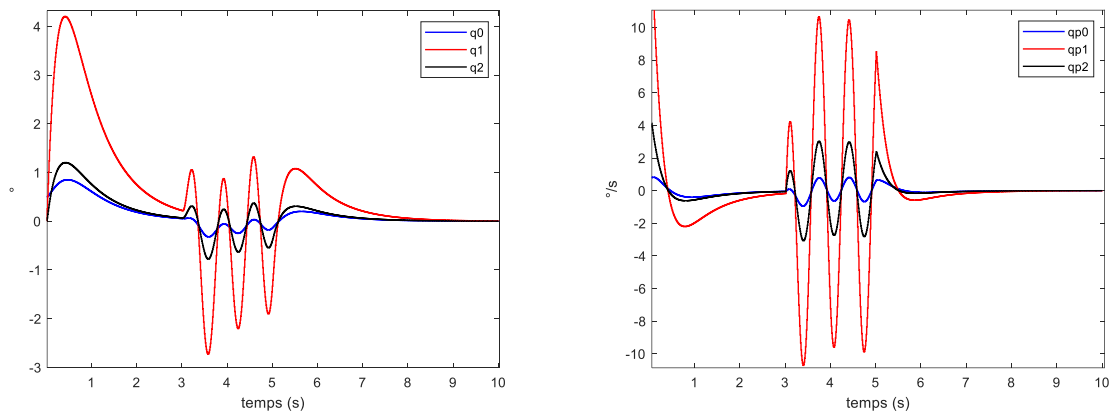


Figure 18: à gauche angles articulaires et à droite vitesses articulaires

Les couples articulaires actifs de l'épaule et du coude sont donnés par la figure 19 :

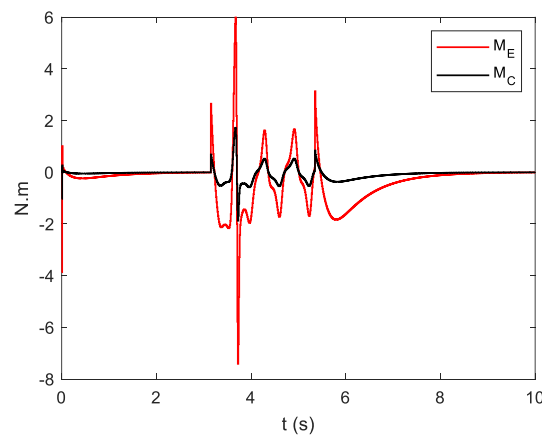
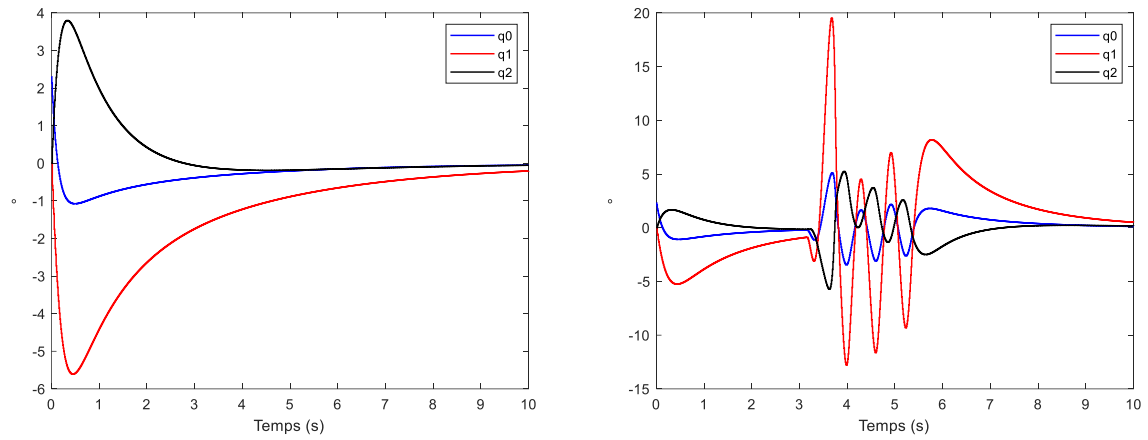


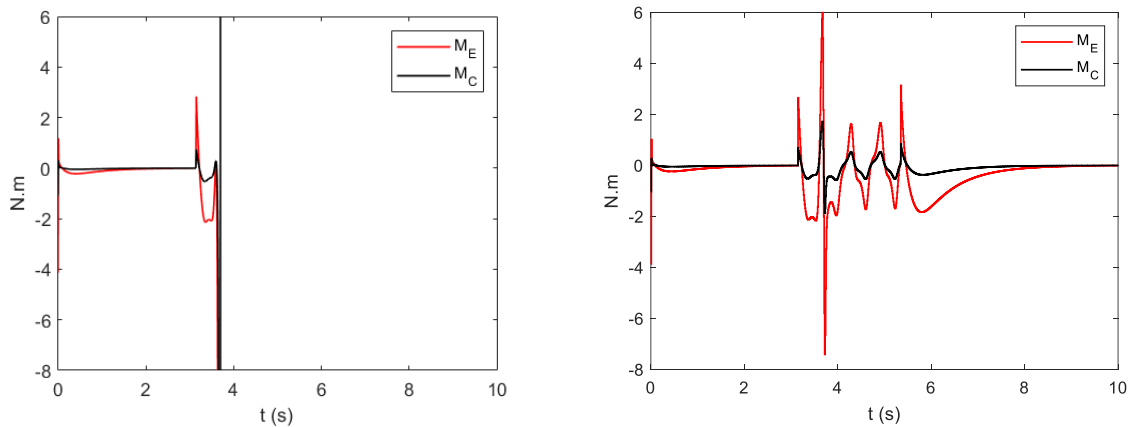
Figure 19: couples articulaires

La figure 20 montre un exemple de simulation du modèle S3S-2D contrôlé (gain de contrôle obtenu après résolution du problème LMI-4) avec des conditions initiales spécifiques (à droite) et une perturbation sur la vitesse angulaire du tronc (à gauche).



**Figure 20: Simulation du problème LMI 4, gain obtenu via des conditions initiales spécifiques (à droite) et perturbation (à gauche)**

Les simulations suivantes ont été testées avec les gains de contrôle obtenus après résolution des problèmes LMI-2 et LMI-4. Afin de tester la robustesse des lois de commande, deux paramètres ont été étudiés : l'amplitude de la perturbation et l'amplitude des conditions initiales. Les deux amplitudes ont été augmentés progressivement jusqu'à déstabiliser la boucle de commande. L'amplitude maximale des conditions initiales avant déstabilisation est similaire pour les deux gains de contrôle alors que le gain obtenu via le problème LMI-4 permet d'augmenter l'amplitude de la perturbation de 12.5% par rapport au problème LMI-2. Si on augmente la perturbation, on remarque le problème LMI-2 diverge avec l'arrivée de la perturbation ce qui n'est pas le cas pour le problème LMI-4 à 16 règles. Les couples articulaires associés sont donnés par les figures suivantes :



**Problème LMI-2**

**Problème LMI-4**

Cette divergence est due aux conditions d'obtention du problème LMI-2 et LMI-4. En effet, le problème LMI-2 est obtenu via la technique de robustesse sur les termes non mesurables dans le modèle non linéaire alors que le problème LMI-4 est obtenu via la technique de robustesse + la similarité entre les non linéarités trigonométriques ( $\cos(x), \sin(x)/x$ ). La différence de comportement entre les deux

problèmes LMI lorsque la perturbation croît, provient de la géométrie des termes en  $(\sin(x)/x)$ . Ces fonctions en sinus amortie qui sont paires et continues déstabilisent la boucle de commande lorsque l'amplitude de la perturbation (arrivant sur la vitesse angulaire du tronc) augmente considérablement. Contrairement au problème LMI-4 composé de 4 non linéarités en  $\cos(x)$ , ces fonctions périodiques paires gardent la même géométrie et amplitude indépendamment des conditions initiales et de l'amplitude de la perturbation.

La loi de contrôle créée permet de stabiliser le modèle S3S-2D, instable en boucle ouverte avec les caractéristiques désirées, notamment par rapport aux conditions initiales, mais aussi pour les perturbations arrivant au niveau du tronc. On note que le domaine de stabilité est réduit et seules des conditions initiales à faibles amplitudes sont possibles.

L'étape suivante consiste à concevoir un observateur permettant de reconstruire les variables non mesurées à travers la sortie du modèle et le vecteur d'entrée.

#### IV. L'observateur global discret du modèle S3S-2D

Dans le cas des systèmes non-linéaires, la conception de l'observateur est loin d'être systématique et directe. Le modèle S3S-2D qui constitue notre cadre d'étude est un modèle non-linéaire avec des non-linéarités qui peuvent dépendre des sorties mesurées et/ou de l'état non mesuré ; ce dernier cas étant le plus difficile à gérer.

Le modèle S3S-2D en discret s'écrit sous la forme de :

$$\begin{cases} E(q_k)x_{k+1} = A(x_k)x_k + sBu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (57)$$

$$\text{Avec } A(x_k) = \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ sS_c(q_k) & s\tilde{A}(x_k) + \tilde{E}(q_k) \end{bmatrix}.$$

Les non linéarités dans la matrice  $S_c(q)$  dépendent uniquement des variables mesurées de l'état. Ainsi il est intéressant dans la conception de l'observateur de faire la séparation entre la matrice  $S_c(q)$  et la matrice  $\tilde{A}(q, \dot{q})$  qui contient des termes non mesurés.

$$\begin{aligned} \text{On note que : } A(x_k)x_k &= \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ sS_c(q_k) & s\tilde{A}(x_k) + \tilde{E}(q_k) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ 0 & s\tilde{A}(x_k) + \tilde{E}(q_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 \\ sS_c(q_k) & 0_3 \end{bmatrix} \right) x_k \\ &= \begin{bmatrix} 0_3 \\ sS_c(q_k) & 0_3 \end{bmatrix} x_k + s \begin{bmatrix} 0_3 \\ \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 + s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{012} & s_{012} & s_{012} \end{bmatrix}}_{\tilde{S}(q_k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

On peut donc réécrire l'équation dynamique du modèle S3S-2D en faisant apparaître une nouvelle matrice dont les termes sont mesurés  $S(q) = \begin{bmatrix} 0_3 \\ \tilde{S}(q) \end{bmatrix}$  :

$$\begin{cases} E(q_k)x_{k+1} = A(x_k)x_k + S(q_k) + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (59)$$

En appliquant sur (59) la méthode par secteur non linéaire (Ohtake et al., 2001) définie sur l'ensemble  $\Omega_x$ , le modèle T-S suivant est obtenu :

$$\begin{cases} E_h x_{k+1} = A_h x_k + S(q_k) + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (60)$$

Avec :  $E_h = \sum_{i=1}^r h_i(z)E_i$  et  $A_h = \sum_{i=1}^r h_i(z)A_i$ . Les fonctions non linéaires  $h_i$  satisfont la propriété de la somme convexe :  $\sum_{i=1}^r h_i(z) = 1$  et  $0 \leq h_i(z) \leq 1$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

A partir de (60) il est possible d'écrire directement l'observateur (Blandeau, 2018) :

$$\begin{cases} E_h \hat{x}_{k+1} = A_h \hat{x}_k + S(q_k) + Bu_k + K(\cdot)(y_k - \hat{y}_k), \\ \hat{y}_k = C\hat{x}_k \end{cases} \quad (61)$$

$K(\cdot)$  est le gain d'observation à déterminer.  $(\cdot)$  indique que les variables peuvent être de plusieurs nature en fonction de la synthèse effectuée, elles seront donc définies au cas-par-cas.

L'observateur à entrées inconnues défini est de type proportionnel intégral (Koenig and Mammar, 2002) qui permet de reconstruire simultanément l'état et les entrées inconnues. La dynamique des entrées inconnues a été assimilée à une cascade de double intégrateur sous forme de  $(z-1)^2 d_k \approx 0$ ,

ceci implique  $\begin{bmatrix} d_{k+1} \\ d_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k \\ d_{k+1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow D_{k+1} = \Gamma \times D_k$ . Ce choix permet d'assurer un compromis acceptable entre la complexité des équations et la précision des variables estimées.

Ainsi la forme finale de l'observateur adoptée est celle inspirée des travaux de Estrada-Manzo et al. (2016b) :

$$\begin{cases} E_h^e \hat{x}_{k+1}^e = A_h^e \hat{x}_k^e + S^e(q_k) + H(q_k)^{-1} K_h(y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = C^e \hat{x}_k^e \end{cases} \quad (62)$$

Avec les matrices étendues :

$$x_k^e = \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12}, A_h^e = \begin{bmatrix} A_h & [B & 0] \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}, E_h^e = \begin{bmatrix} E_h & 0 \\ 0 & I_6 \end{bmatrix}, C^e = [C \quad 0_{3 \times 6}], S^e = \begin{bmatrix} S(q) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les contraintes LMI relatives à ce problème en discret sont :

$$\begin{bmatrix} -\beta P & (\overline{HA_i^e} - K_i C^e)^T \\ \overline{HA_i^e} - K_i C^e & P - \overline{HE_i^e} - (\overline{HE_i^e})^T \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 128\}. \quad (63)$$

La matrice  $H(\cdot)$  est utilisée afin d'augmenter les degrés de liberté des LMI sans augmenter le nombre des contraintes LMI. Ainsi, la notation utilisée dans (63) correspond à  $\overline{HA_i^e} = \begin{bmatrix} H_{1,i} & H_2 & H_{3,i} \end{bmatrix} A_i^e$ ,  $H_{1,h} \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$ ,  $H_2 \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$  et  $H_{3,h} \in \mathbb{R}^{12 \times 6}$ . Etant donné que  $H_2$  est une matrice constante qui multiplie les colonnes 4,5 et 6, les produits  $H(q_k)A_h^e$  et  $H(q_k)E_h^e$  restent des sommes simples. La preuve du théorème est détaillée dans les travaux de Blandeau (2018).

Pour conclure, l'approche discrète a permis de proposer une solution d'observation même s'il n'est pas complètement « abouti ». Effectivement, la problématique des prémisses non mesurables (vitesses angulaires) a été résolue en considérant que l'approximation  $\dot{q}_k \approx \dot{q}_{k-1}$  était justifiée par le fait du sur-échantillonnage des données mesurées par rapport à la dynamique globale du mouvement. Cette hypothèse a été validée dans les travaux de Blandeau (2018) en comparant la réponse d'un observateur faisant l'hypothèse de  $\dot{q}_k \approx \dot{q}_{k-1}$  et la réponse d'un observateur idéal qui dispose de la mesure de  $\dot{q}_k$  (un observateur irréaliste). L'erreur d'estimation des couples articulaires est inférieure à 0.5% le long des conditions d'essai.

Cette hypothèse est bien utile et pratique mais théoriquement elle n'est pas tout à fait justifiée car il manque encore la preuve que l'écart induit par ce retard d'un échantillon permet toujours de garantir la convergence asymptotique de l'erreur d'observation.

Après ce rappel des travaux précédents, consacrés principalement au cas discret, l'approche menée a tenté de répondre au même problème d'observation en continu.

## V. L'observateur global continu du modèle S3S-2D

Ce problème en continu n'admet jusqu'à présent de résultats satisfaisants, notamment dû au problème évoqué juste avant : les prémisses non mesurables. En continu cela revient à avoir dans les variables de prémisses de l'observateur  $\dot{q}(t)$  au lieu de  $\dot{q}(t)$ . Ce problème de prémisses non mesurables n'a pas de solution satisfaisante dans le cas général et reste un challenge d'actualité ; une solution pour le S3S-2D est proposée ci-après. On rappelle que la mise en œuvre de l'observateur utilise la forme (60) faisant apparaître la matrice  $S(q)$  explicitement car toutes les non linéarités sont mesurables.

### V.1. L'observateur PI continu

De la même manière, le modèle non linéaire en continu s'écrit sous forme de :

$$\begin{cases} E(q(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + S(q(t)) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (64)$$

$$E(q(t)) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & \tilde{E}(q(t)) \end{bmatrix}, A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & \tilde{A}(x(t)) \end{bmatrix}, S(q(t)) = \begin{bmatrix} 0_3 \\ \tilde{S}(q(t)) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_3 \\ I_3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \end{bmatrix}$$

Avec  $y(t) = q(t) \in \mathbb{R}^3$  le vecteur de sortie composé des angles articulaires.

La forme descripteur est usuelle dans la définition des systèmes mécaniques, cette écriture relève de la forme naturelle des équations issues de la méthode de Euler-Lagrange (Guelton et al., 2008 ; Lendek,



et al., 2018). Pour la plupart des systèmes mécaniques la matrice descripteur  $E(q(t))$  est régulière, c'est aussi le cas pour le modèle S3S-2D.

La matrice  $E(q(t))$  étant régulière, une représentation d'état classique pourrait être obtenue à partir de (64). Mais le point clé afin de réduire la complexité des calculs (résoudre des conditions LMI moins conservatives) est de garder la matrice  $B$  constante (Bouarar et al., 2010). Utiliser une forme descripteur comme c'est le cas en (64) permet d'obtenir des résultats moins conservatifs en réduisant le nombre des sommets (Lendek et al., 2018) et (Chadli et Darouach, 2012).

Dans cette partie on présente une solution pour le modèle (64) en combinant les résultats des travaux de Guerra et al. (2015), Zemouche et al. (2008) et Ichalal et Guerra (2019). En particulier, la description polytopique est utilisée le plus loin possible dans le développement des expressions.

On rappelle que l'objectif de base est de reconstruire les données d'entrée. Plusieurs méthodes peuvent être exploitées, par contre on ne peut pas utiliser un observateur à entrées inconnues (Chen et al., 1996) car la condition nécessaire de  $\text{rang}(C \times D) = \text{rang}(C)$  n'est pas satisfaite. Une structure de type PI-observateur est alors utilisée.

A partir des données expérimentales, une cascade de deux intégrateurs pour chaque entrée  $\ddot{\Gamma}_k \approx 0, k \in \{0, 1, 2\}$  est utilisée, elle représente un bon compromis entre la complexité des calculs et la précision des résultats pour estimer les couples inconnus (Blandeau, 2018). Ainsi on définit une nouvelle variable qui représente les entrées étendues :  $u = [\Gamma_0 \quad \Gamma_1 \quad \Gamma_2], d = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}$ .

Le modèle S3S-2D (64) s'écrit à l'aide de cette variable :

$$\begin{cases} E^e(q) \dot{x}^e = A^e(x) x^e(t) + S^e(q) \\ y(t) = C^e x^e(t) \end{cases}, x^e = \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix}, \dot{d} = \Gamma \times d = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix} d \quad (65)$$

Avec les matrices étendues :

$$E^e(q) = \begin{bmatrix} E(q) & 0_6 \\ 0_6 & I_6 \end{bmatrix}, A^e(x) = \begin{bmatrix} A(x) & [B \quad 0_{6 \times 3}] \\ 0_6 & \Gamma \end{bmatrix}, S^e(q) = \begin{bmatrix} S(q) \\ 0_{6 \times 1} \end{bmatrix}, C^e = [C \quad 0_{3 \times 6}].$$

Un observateur pour le modèle étendu (65) est obtenu :

$$\begin{cases} E^e(q) \hat{\dot{x}}^e(t) = A^e(\hat{x}) \hat{x}^e(t) + S^e(q) + K(\cdot)(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) = C^e \hat{x}^e(t) \end{cases} \quad (66)$$

La matrice  $K(\cdot)$  est définie plus tard en fonction des conditions d'obtention des contraintes LMI.

L'erreur d'observation s'écrit  $e = x^e - \hat{x}^e$ .

Comme  $E^e(q)$  est inversible, si  $E^e(x^e - \hat{x}^e) \rightarrow 0$  alors  $x^e - \hat{x}^e \rightarrow 0$ . Ainsi on peut écrire :

$$E^e(q) \dot{e} = A^e(x) x^e(t) - A^e(\hat{x}) \hat{x}^e(t) - K(\cdot) C^e e \quad (67)$$

Ce qui est équivalent à

$$E^e(q)\dot{e} = (A^e(x) - K(\cdot)C^e)e + (A^e(x) - A^e(\hat{x}))x^e(t) \quad (68)$$

(68) Contient un terme supplémentaire qui ne dépend pas explicitement de l'erreur d'observation mais des variables non mesurées. Pour cette raison la convergence asymptotique ne peut pas être garantie directement. L'étape suivante présente comment résoudre le problème.

Le terme additionnel étant lié à la matrice  $A^e(x) = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & \tilde{A}(x(t)) \\ & 0_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0_{6 \times 3} \\ & \Gamma \end{bmatrix}$ , on s'aperçoit

directement que les seuls termes non linéaires sont inclus dans  $\tilde{A}(x)$ , i.e.  $A^e(x) - A^e(\hat{x})$  sera nulle pour tous ces autres éléments. On propose de réécrire  $\tilde{A}(x) = [a_{ij}]_{i,j \in \{1,2,3\}}$ . Pour ce faire, on définit la matrice :

$$\Sigma(q) = \begin{bmatrix} \sigma_1 + \sigma_3 & \sigma_2 - \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_1 + \sigma_3 \\ \sigma_2 & 0 & \sigma_3 - \sigma_2 \end{bmatrix}, \begin{cases} \sigma_1 = (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) \\ \sigma_2 = m_2 l_{G_2} l_1 \sin(q_2) \\ \sigma_3 = m_2 l_{G_2} l_0 \sin(q_2 + q_1) \end{cases} \quad (69)$$

Avec cette nouvelle matrice on peut écrire :

$$\tilde{A}(x)\dot{q} = \Sigma(q)\Omega(\dot{q})\dot{q} = \Sigma(q)\Theta(\dot{q})\dot{q} \quad (70)$$

$$\text{Avec : } \Omega(\dot{q}) = \begin{bmatrix} -2\dot{q}_1 & -\dot{q}_1 & 0 \\ 2\dot{q}_2 & 2\dot{q}_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \Theta(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -2\dot{q}_0 - \dot{q}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{q}_0 + 2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ \dot{q}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme  $\Omega(\dot{q})\dot{q} = \Theta(\dot{q})\dot{q}$ , il est facile d'écrire la deuxième partie de (68) comme

$$(\tilde{A}(x) - \tilde{A}(\hat{x}))\dot{q} = \Sigma(q)(\Theta(\dot{q}) - \Theta(\hat{\dot{q}}))\dot{q} \quad (71)$$

$$\text{En écrivant : } (\Theta(\dot{q}) - \Theta(\hat{\dot{q}}))\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & -2\dot{e}_0 - \dot{e}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{e}_0 + 2\dot{e}_1 + \dot{e}_2 \\ \dot{e}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2\dot{e}_0 + \dot{e}_1)\dot{q}_1 \\ (2\dot{e}_0 + 2\dot{e}_1 + \dot{e}_2)\dot{q}_2 \\ \dot{e}_0\dot{q}_0 \end{bmatrix}, \text{ il vient}$$

$$(\tilde{A}(x) - \tilde{A}(\hat{x}))\dot{q} = \Sigma(q) \begin{bmatrix} -2\dot{q}_1 & -\dot{q}_1 & 0 \\ 2\dot{q}_2 & 2\dot{q}_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} \quad (72)$$

Ainsi, dans la forme étendue :

$$A^e(\hat{x})e + \begin{bmatrix} 0_3 \\ \Sigma(q) \end{bmatrix} (\Theta(\dot{q}) - \Theta(\hat{\dot{q}}))\dot{q} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & \Sigma(q) \left( \Omega(\hat{\dot{q}}) + \begin{bmatrix} -2\dot{q}_1 & -\dot{q}_1 & 0 \\ 2\dot{q}_2 & 2\dot{q}_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} e \text{ Équivalent à}$$

$$A^e(\hat{x})e + \begin{bmatrix} 0_3 \\ \Sigma(q) \end{bmatrix} (\Theta(\dot{q}) - \Theta(\hat{\dot{q}}))\dot{q} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & \Sigma(q) \begin{bmatrix} -2(\dot{q}_1 + \hat{\dot{q}}_1) & -\dot{q}_1 - \hat{\dot{q}}_1 & 0 \\ 2(\dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2) & 2(\dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2) & \dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2 \\ \dot{q}_0 + \hat{\dot{q}}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} e \quad (73)$$

On peut réécrire :  $\begin{bmatrix} -2(\dot{q}_1 + \hat{\dot{q}}_1) & -\dot{q}_1 - \hat{\dot{q}}_1 & 0 \\ 2(\dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2) & 2(\dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2) & \dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2 \\ \dot{q}_0 + \hat{\dot{q}}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D(\dot{q} + \hat{\dot{q}})U$  avec :  $U = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  et

$D(\dot{q} + \hat{\dot{q}}) = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} \dot{q}_1 + \hat{\dot{q}}_1 & \dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2 & \dot{q}_0 + \hat{\dot{q}}_0 \end{bmatrix} \right)$ . Ainsi, une nouvelle écriture de (68) telle que :

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & 0_{3 \times 6} \\ 0_3 & \tilde{E}(q) & 0_{3 \times 6} \\ 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} & I_6 \end{bmatrix} \dot{e} = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & \Sigma(q) D(\dot{q} + \hat{\dot{q}}) U \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 \\ I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \\ 0_6 & \Gamma \end{bmatrix}}_{\Phi(\cdot)} - K(\cdot) \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 9} \end{bmatrix} \right) e \quad (74)$$

En admettant l'hypothèse que l'état est borné, il est possible à partir de (74) qui est strictement équivalent à (68) d'obtenir les conditions asymptotiques d'observation.

Pour cela, on considère une description polytopique à partir de (74) avec 4 non linéarités mesurables et 3 non linéarités non mesurables. Les 4 fonctions  $\sin(q_1), \sin(q_2), \cos(q_1), \cos(q_2)$  sont les seules non linéarités dont on a besoin pour décrire la forme polytopique,  $\sin(q_2 + q_1)$  et  $\cos(q_2 + q_1)$  étant directement construites à partir d'elles au travers de relations trigonométriques.

Par conséquent,  $\tilde{E}(q)$  et  $\Sigma(q)$  sont représentés exactement en utilisant  $2^4$  sommets, auxquels il convient de rajouter à partir de la définition de  $D(\dot{q} + \hat{\dot{q}})$ , les 3 fonctions  $q_0 + \hat{q}_0, q_1 + \hat{q}_1, q_2 + \hat{q}_2$  pour représenter en intégralité (74) avec  $2^4 \times 2^3 = 128$  sommets. Soit :

$$\sum_{i=1}^{16} v_i(q) E_i \dot{e} = \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^8 v_i(q) h_j(\dot{q} + \hat{\dot{q}}) (\Phi_{ij} - K_i(\cdot) C) e \quad (75)$$

En se basant sur les travaux de Guerra et al. (2015), les contraintes LMI sont données par :

Trouver  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$ ,  $P_1 = P_1^T \succ 0$ ,  $\begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix}$  tel que :

$$\begin{bmatrix} P_3^T \Phi_{ij} - K_{1i} C + (*) & (*) \\ P_4^T \Phi_{ij} - K_{2i} C + P_1 - E_i^T P_3 & -P_4^T E_i - E_i^T P_4 \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \{1, \dots, 16\}, j \in \{1, \dots, 8\} \quad (76)$$

La structure particulière de la matrice  $P$  est établie en respectant l'égalité suivante (Guelton et al., 2008) :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P = P^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (77)$$

En effet, si  $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$  cela implique :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T & P_3^T \\ P_2^T & P_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (78)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T & 0 \\ P_2^T & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (79)$$

Ce qui impose le choix de  $P_1 = P_1^T \geq 0$ ,  $P_2 = 0$ .

La forme finale de l'observateur est donnée par (Guerra et al., 2015) :

$$\begin{cases} E^e(q) \hat{\hat{x}}^e(t) = A^e(\hat{x}) \hat{\hat{x}}^e(t) + S^e(q) + \begin{bmatrix} E^e(q) & I_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}^{-T} \sum_{i=1}^{16} v_i(q) \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix} (y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}(t) = C^e \hat{\hat{x}}^e(t) \end{cases} \quad (80)$$

Cette structure particulière de l'observateur provient de la preuve détaillée dans les travaux de Guerra et al. (2015).

**Remarque :** Le gain de l'observateur est synthétisé via 4 non linéarités mesurables et les fonctions  $v_i(q), i \in \{1, \dots, 16\}$ . Si (76) est satisfaite, alors la dernière matrice diagonale  $P_4^T E_i + E_i^T P_4$  est strictement positive ce qui permet de garantir la régularité de  $P_4$  et par conséquent l'inverse de la matrice  $P$ , i.e.  $P^{-T}$  sera bien définie en (80).

## V.2. Simulation de l'observateur continu

Afin de visualiser les résultats obtenus, on procède à la simulation numérique. Le protocole de la simulation est schématisé comme suit :

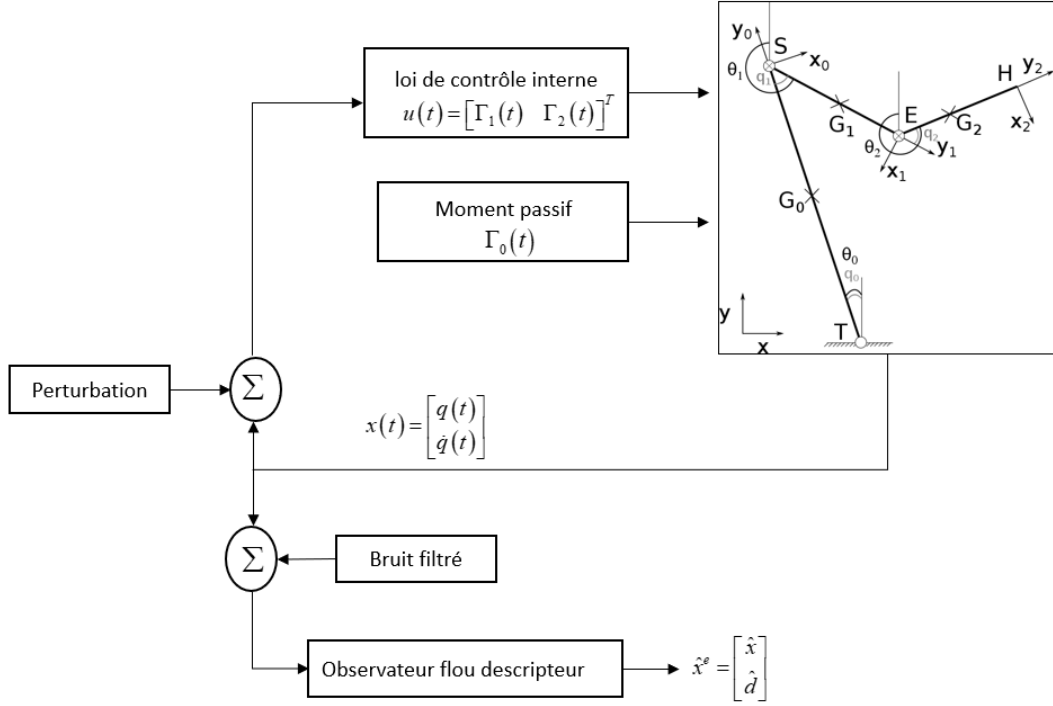


Figure 21: protocole de simulation de l'observateur global continu

La loi de contrôle n'agit que sur les couples aux niveaux de l'épaule et du coude afin de se rapprocher des mouvements adoptés par une personne lésée médullaire (le tronc étant peu ou pas mobilisable). Un bruit blanc filtré est ajouté aux angles mesurés afin de répliquer le bruit mesure.

L'observateur continu estime l'état étendu composé de l'état réduit, angles et vitesses, ainsi que les couples articulaires non mesurés qui constituent les entrées inconnues.

Deux simulations seront présentées en fonction de la nature du signal passif au niveau du tronc afin d'évaluer la robustesse de l'observateur continu global. Une première simulation consiste à définir la contribution passive du tronc comme un signal sinusoïdal d'amplitude 0.4 N.m et de fréquence 2 Hz.

Concernant l'observateur PI, résoudre les contraintes LMI (76) dans l'ensemble compact  $\Omega_x$  est faisable. Afin de pouvoir influencer sur les performances, on a ajouté un taux de décroissance (revient à ajouter  $\tau P_1, \tau > 0$  au terme  $P_3^T \Phi_{ij} - K_{1i} C + (*)$ ) à (76).

La norme des gains peut également être « contrôlée » à l'aide de  $\begin{bmatrix} K_{1i} & K_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix} \leq \varepsilon I_3$ .

En utilisant un complément de Schur (voir annexe) l'inégalité précédente prend une forme positive :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon I_3 & \begin{bmatrix} K_{1i} & K_{2i} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix} & I_{24} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Un bon compromis a été obtenu en utilisant un taux  $\tau = 6$  et  $\varepsilon = 10^6$ .

Les 16 matrices de gains ont été obtenues, pour illustrer les résultats  $K_{2,1}$  et  $K_{2,16}$  sont donnés ci-après :

$$K_{2,1} = \begin{bmatrix} 71.1 & 4.3 & -2.2 \\ -0.5 & 111 & -33 \\ -2.9 & -35.3 & 222 \\ 79 & 12 & -2 \\ 10.5 & 45.4 & 12 \\ 1.7 & 13.4 & 1.1 \\ -1.6 & 1.4 & 0.01 \\ -0.33 & -12.3 & -6 \\ 1.9 & -4.7 & 8.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K_{2,16} = \begin{bmatrix} 66.2 & -0.7 & -1.8 \\ -2.3 & 115 & -36 \\ -4.3 & -35 & 230 \\ 83 & 7.5 & 3.8 \\ 7.4 & 50 & 17.6 \\ 2.8 & 16.8 & -2.2 \\ -1.5 & -1.6 & -0.5 \\ -7.7 & -5.7 & -9.5 \\ 7.8 & -7 & 23 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les figures suivantes présentent les angles, les vitesses et les couples articulaires estimés ainsi que l'erreur d'observation entre les variables simulées et les variables reconstruites par l'observateur. La convergence est atteinte au bout de 0.3 secondes.

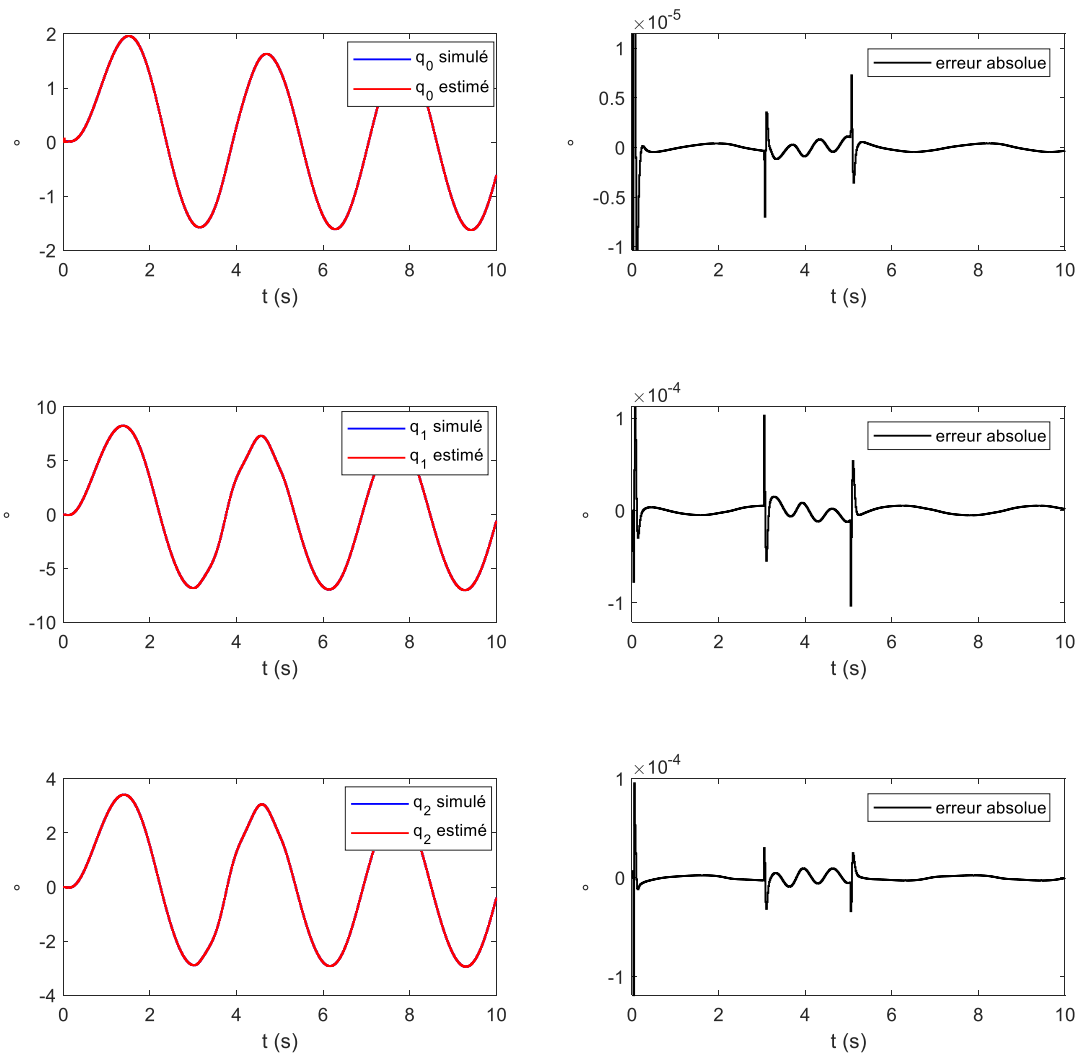


Figure 22: angles estimés (passif sinusoïdal)

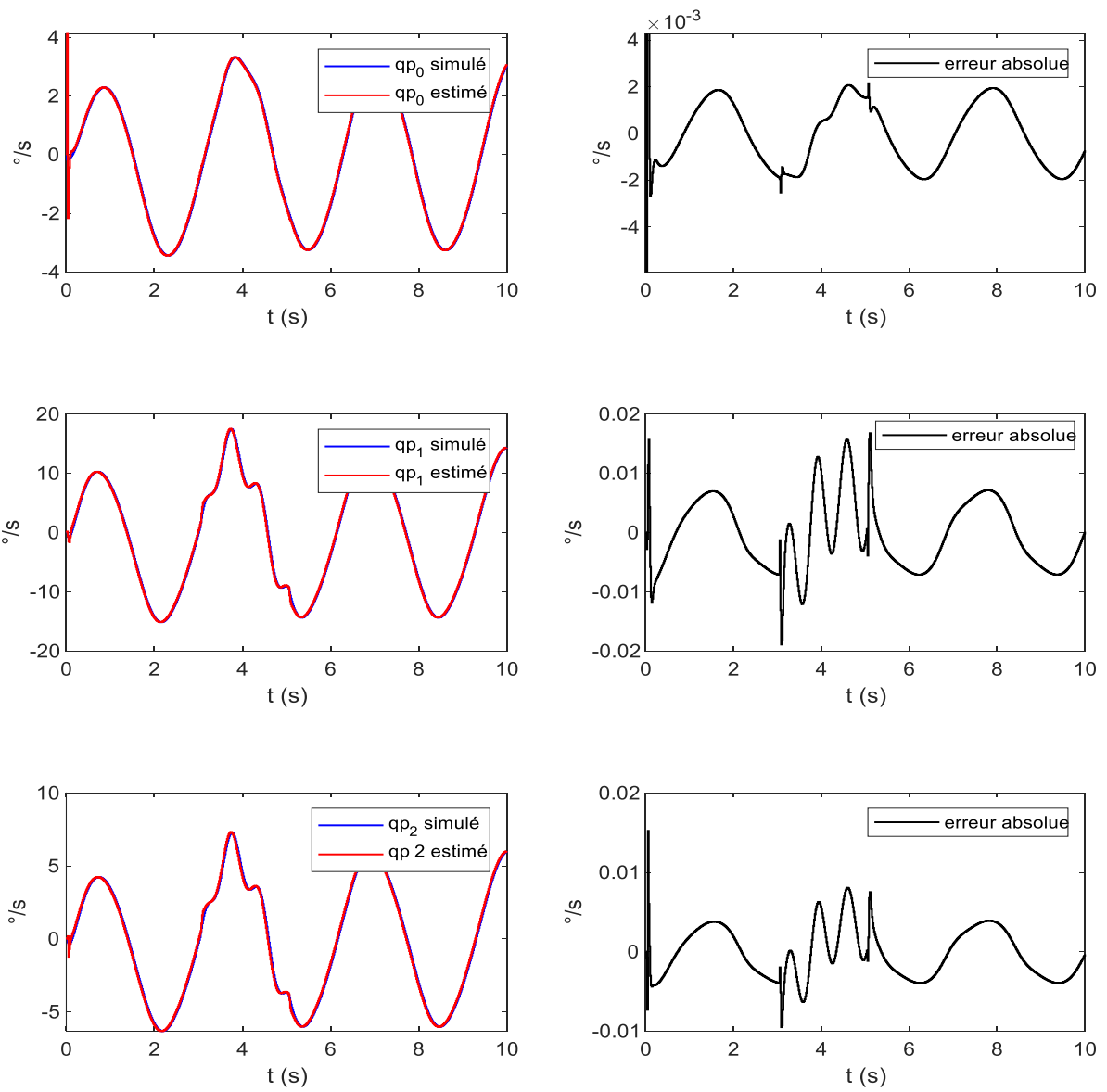
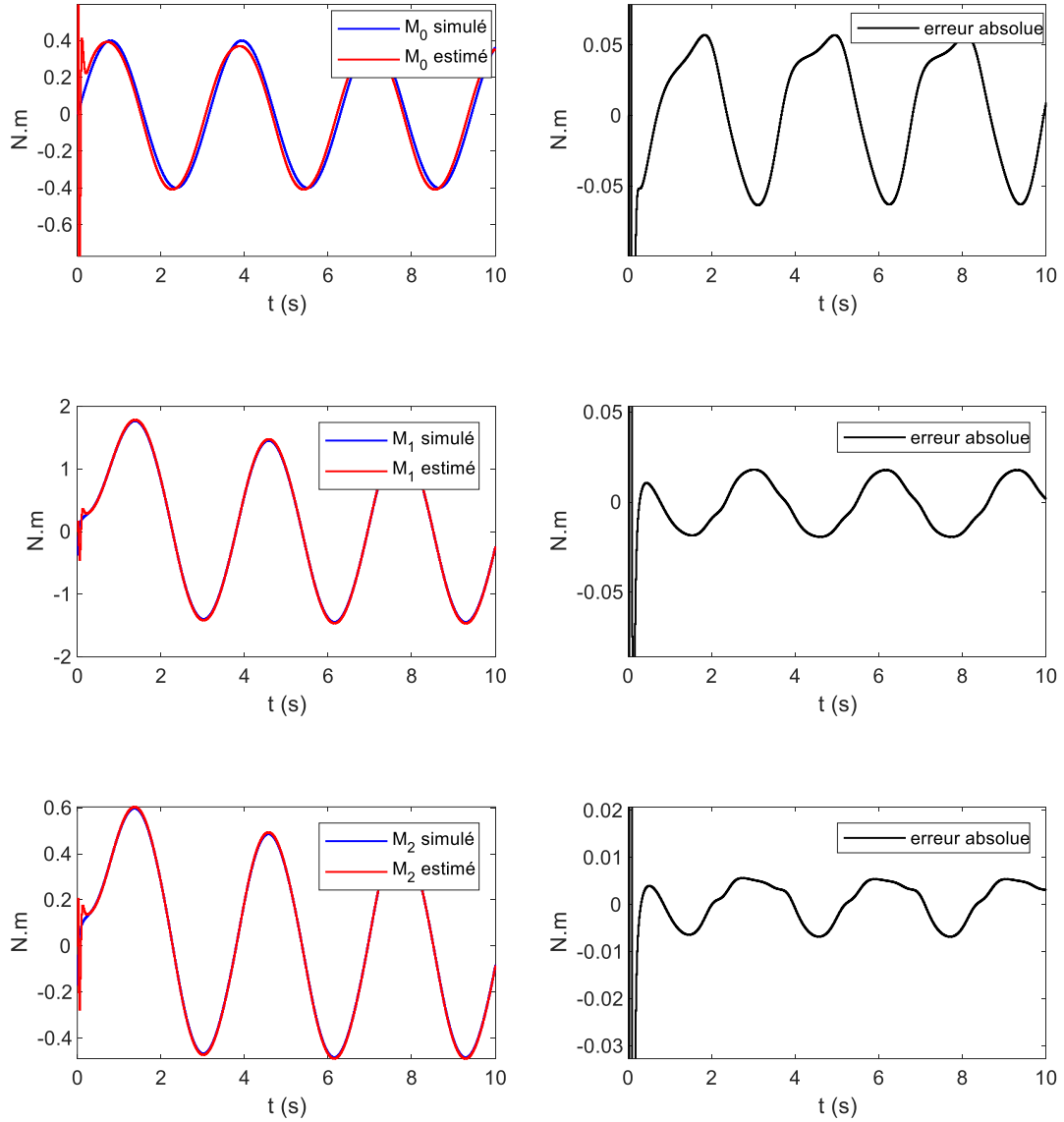


Figure 23: vitesses estimées (passif sinusoïdal)



**Figure 24: couples estimés (passif sinusoïdal)**

Un deuxième exemple de simulation consiste à imposer un couple passif traduit par un signal échelon d'amplitude 0.3  $N.m$ . Cette contribution passive implique un décalage de la position d'équilibre du système car les angles ne se stabilisent pas autour de  $0^\circ$ .

Les résultats d'estimation sont affichés figure 25 et 26 pour les angles et les vitesses articulaires et figure 27 pour les couples non mesurés au niveau du tronc, de l'épaule et du coude.



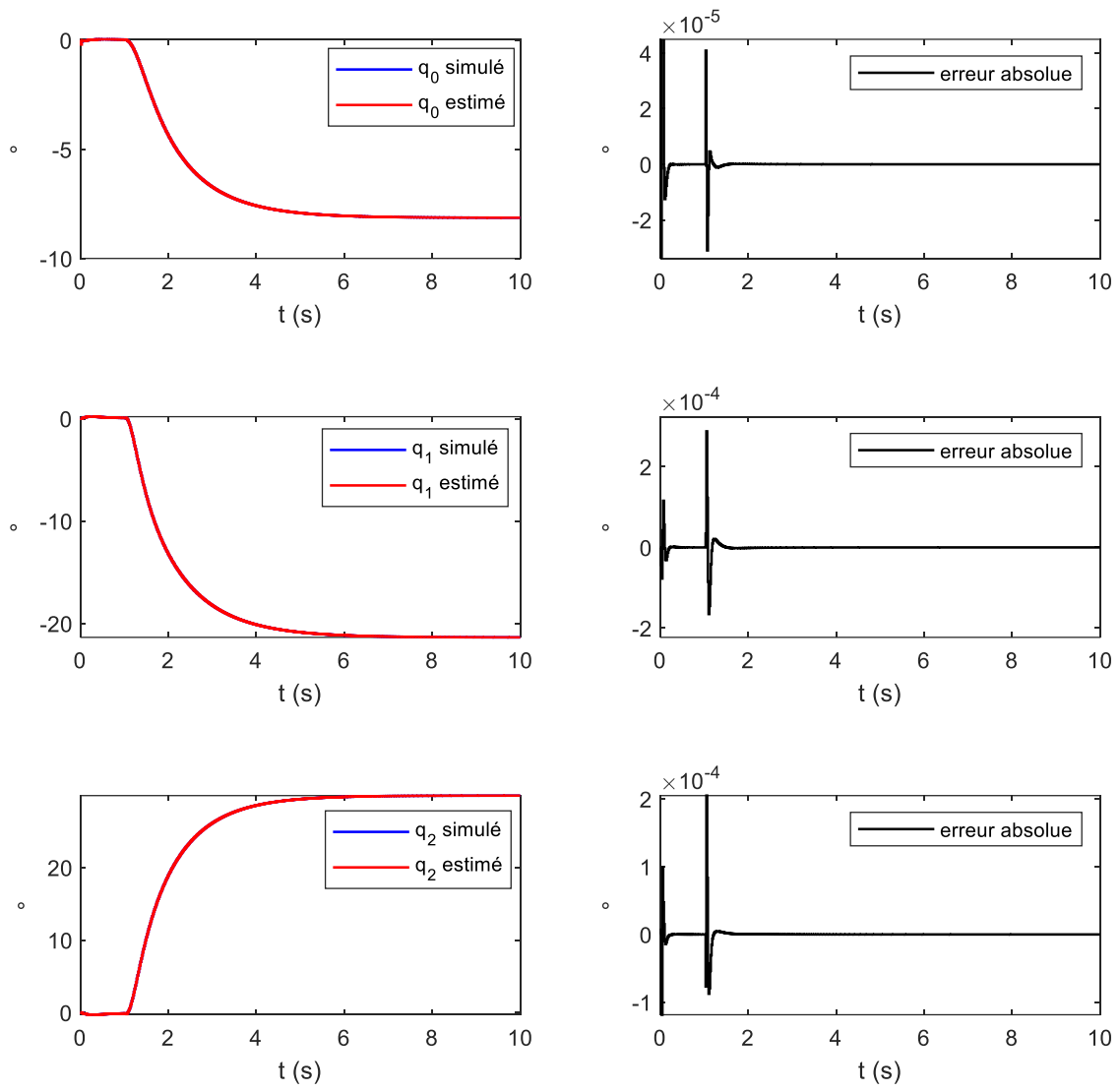


Figure 25: angles estimés (passif échelon)

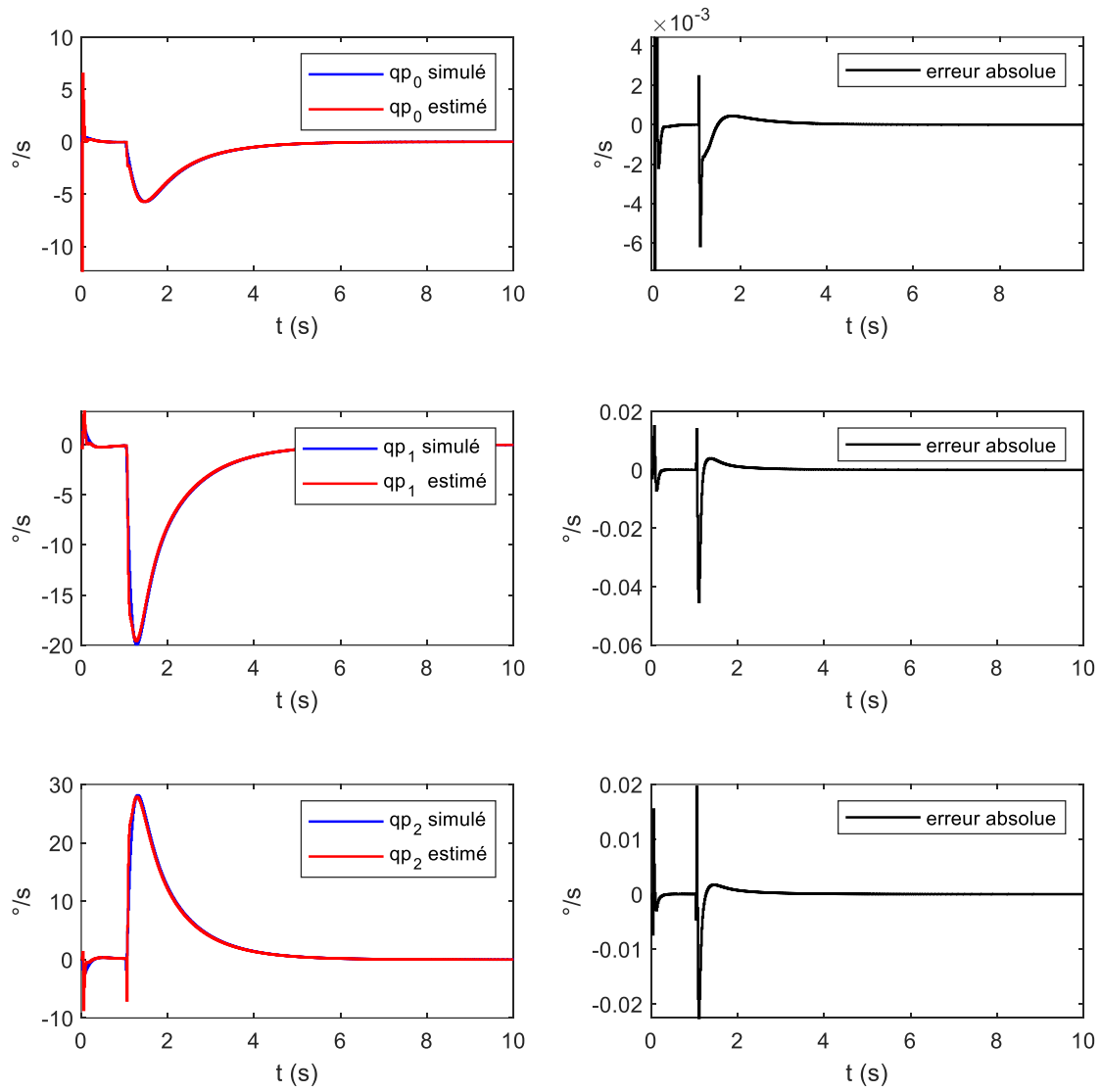


Figure 26 vitesses estimées (passif échelon)

Et enfin les couples articulaires sont donnés par la figure 27 :

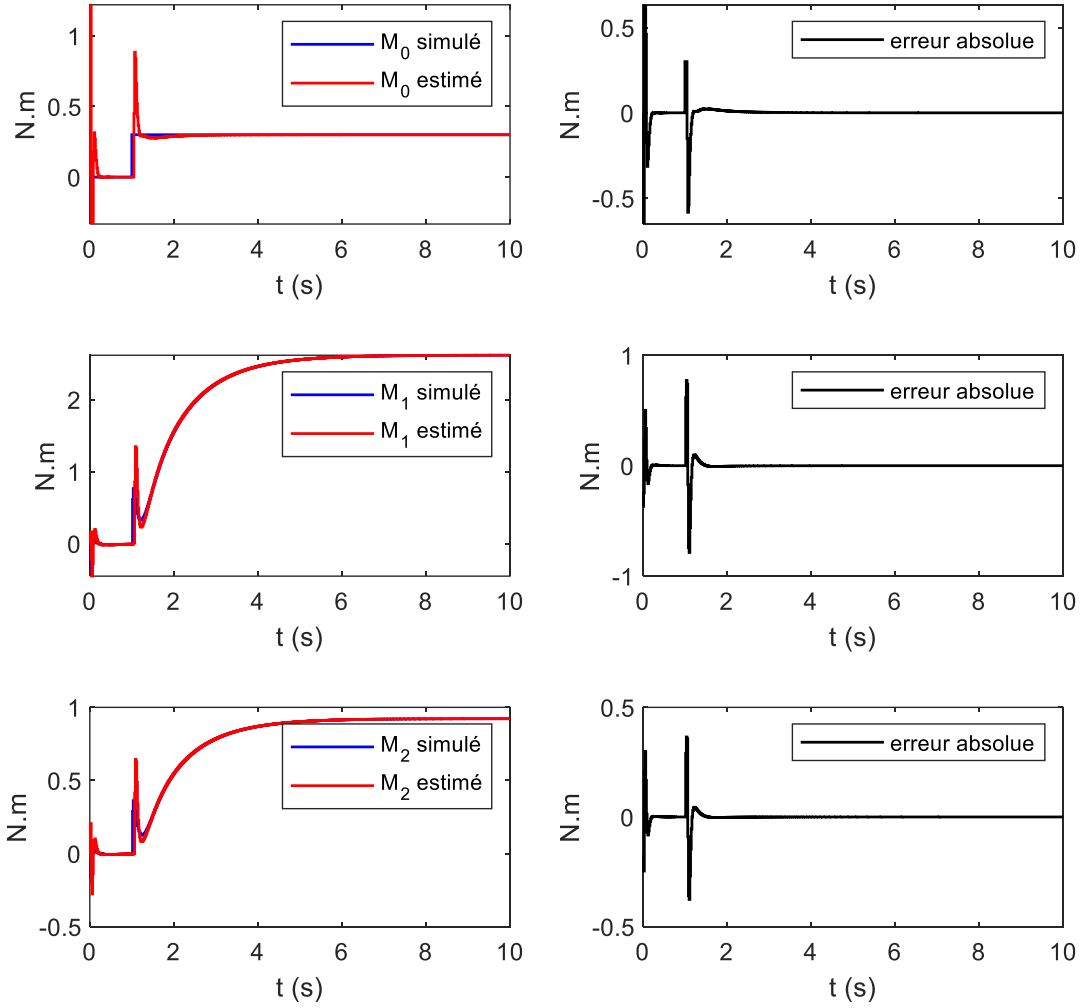


Figure 27: couples estimés (passif échelon)

Dans les deux exemples de simulation, L'erreur d'observation est de l'ordre de  $10^{-4}$  ce qui confirme l'efficacité de l'observateur global continu malgré la variation de la participation passive.

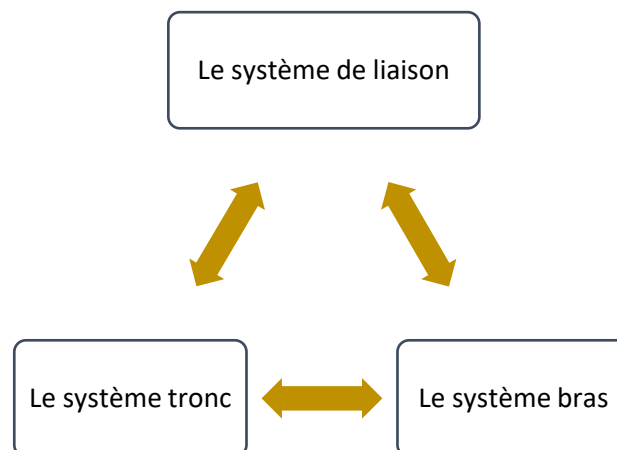
**Remarque 1 :** l'observateur « décroche » si les conditions initiales sont en dehors du domaine des mouvements admissibles  $\Omega_x$  ou si la perturbation arrivant sur le tronc est très forte. Dans le deuxième exemple de simulation où le signal passif est assimilé à un échelon, l'erreur est faible avant 1 seconde puis elle est à 100% à 1 seconde (l'instant où le signal échelon passe à sa valeur finale) pour le couples articulaires (figure 27). En effet, à cet instant (1 seconde) le signal transitoire est rapide et l'observateur, qui est caractérisé par une dynamique donnée, est incapable de suivre les mouvements incompatibles avec la réalité des mouvements humains.

**Remarque 2 :** la complexité du problème (76) correspond à  $128 + 1$  contraintes LMI avec  $n = 12$  et  $m = 3$ ,  $0.5n(n+1) + 2n^2 + 2n \times m \times 2^4 = 1518$  variables. Si la résolution numérique est faisable, il est très difficile d'étendre les résultats en considérant des problèmes LMI moins conservatifs par exemple utilisant les matrices  $(P_3, P_4)$  dépendantes des prémisses,  $P_3 = \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^8 v_i(q) h_j(\dot{q} + \hat{q}) P_{3ij}$ . Dans ce cas de figure, le problème LMI inclura, en fonction des approches de relaxation employées (voir annexe), au minimum 8256 et  $0.5n(n+1) + 2n^2 \times 2^7 + 2n \times m \times 2^4 = 38094$  variables.

Enrichir le modèle S3S-2D avec des segments additionnels ou étendre le modèle au 3D par exemple implique de nouveaux degrés de liberté. Par exemple, l'extension au 3D induit 7 degrés de liberté supplémentaires : 1 au niveau du tronc et 2 au niveau de l'épaule et du coude. Cette extension 3D considère 3 dimensions à chaque point dans l'espace afin de représenter deux rotations de l'épaule (dans le plan sagittal et en dehors du plan sagittal). Par conséquent, l'ensemble des degrés de liberté supplémentaires sera distribué comme suit :

- ❖ Le tronc : une rotation dans le plan sagittal et en dehors du plan sagittal
- ❖ L'épaule : 2 rotations : abduction et adduction, flexion et extension (x2 épaules)
- ❖ Le coude : 2 rotations (x2 coudes)

Finalement, un modèle S3S-3D sera composé de 10 DDL, ce qui signifie un vecteur d'état de taille 20. Cette extension, ajoute une complexité à la fois méthodologique et numérique notamment avec la limitation des solveurs actuels (Thieffry et al., 2018). L'idée est donc d'employer une approche alternative permettant de remplir l'objectif avec une complexité numérique modérée. Etant donné que l'objectif final consiste à travailler avec des modèles étendus, une approche intéressante à étudier est la décomposition en cascade. L'idée consiste donc à décomposer le modèle S3S-2D global en 2 systèmes dynamiques, un système tronc et un système bras, qui seront couplés par un système de liaison (figure 30).



**Figure 28: la décomposition du modèle S3S-2D**

L'approche de décomposition en cascade a été étudiée dans nombreux travaux par exemple dans Loria et Panteley (2005) et Arcak et al. (2002). Les conditions de stabilité des systèmes en cascade ont été démontrées dans Chaillet et Loria (2006) et Roebenack et Lynch (2006). La décomposition en cascade engendre également un partitionnement dans la conception des observateurs. Chaque modèle possèdera son propre observateur local dont les entrées peuvent être également les sorties et/ou les états estimés de l'observateur précédent.

## VI. Conclusion du chapitre 2

Dans ce deuxième chapitre, on a abordé les caractéristiques du modèle S3S-2D global ainsi que les lois de contrôle permettant de le stabiliser. On a défini au total 4 lois de contrôle associée chacune à un problème LMI. Devant la complexité méthodologique, deux techniques de réduction du nombre des non linéarités ont été successivement employées. La première basée sur une écriture avec incertitudes, la seconde basée sur des approximations via les développements limités (Guerra et al., 2018). Un premier résultat d'observation issu de Blandeau (2018) a été rappelé. Il a été synthétisé en

discret, notamment pour éviter le problème des non linéarités utilisant des variables d'état non mesurables. Une proposition d'observateur en continu a été ensuite faite, et permet de résoudre le problème et de donner des résultats comparables. On rappelle que le but du modèle S3S-2D est de fournir une estimation des couples non mesurables par le biais des observateurs d'état. Ainsi, plus le modèle est proche des mouvements humains plus les résultats seront précis. Le problème est que l'extension du modèle S3S-2D s'associe à une complexité numérique accrue, alors que la résolution des problèmes LMI d'observation est déjà proche des limitations des solveurs actuels. Une alternative en automatique consiste à décomposer le problème global en sous problèmes réduits et à résoudre ainsi localement chaque problème d'observation. Afin de tester la faisabilité de l'approche et de pouvoir la comparer à des résultats existants, on s'intéressera d'abord à la développer dans le cadre du modèle S3S-2D.

Cette étude fait l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE 3 : LE MODÈLE S3S-2D DECOMPOSE

I. Introduction	87
II. Le modèle S3S-2D décomposé en continu	87
III. Le problème d'observation à entrées inconnues	89
III.1. Observateurs en cascade : principe de séparation en continu	90
III.2. La cascade des PI-observateurs du modèle S3S-2D décomposé en continu	92
III.2.1. La synthèse de l'observateur-PI en continu du $\Sigma_T$	95
III.2.2. La synthèse de l'observateur-PI en continu du $\Sigma_A$	95
III.3. Résolution des contraintes LMI en continu	97
VI. La validation expérimentale de l'observateur décomposé en continu	101
V. Le modèle S3S-2D décomposé en discret	104
V.1. Le système tronc en discret	104
V.2. Le système bras en discret	105
V.3. Le principe de séparation en discret	106
V.4. La cascade des PI-observateurs du modèle S3S-2D décomposé en discret	107
V.4.1. L'observateur local discret du système tronc	108
V.4.2. L'observateur local discret du système bras	109
V.5. Simulation de la cascade des PI-observateurs en discret	110
VI. Conclusion du chapitre 3	115

## I. Introduction

Dans le chapitre précédent, on a montré que l'enrichissement du modèle S3S-2D se fait au prix d'une complexité accrue en modélisation et en conditions nécessaires à mettre en œuvre pour concevoir les observateurs. On a montré également qu'on arrive à la limite de ce que les outils numériques sont capables de résoudre aujourd'hui (Ortiz et al., 2021).

Enrichir le modèle, afin d'apporter des éléments de compréhension plus élaborés, tel qu'ajouter des degrés de liberté supplémentaires et des segments additionnels ou par exemple passer du S3S-2D au S3S-3D nous expose à un problème où la résolution des conditions d'optimisation est peu probable car le nombre des non linéarités augmente ainsi que la dimension de l'état du système. Surmonter ces difficultés est nécessaire afin d'étendre la représentation géométrique et biomécanique des modèles existants et envisager la création des modèles plus proches des mouvements humains et donc plus précis en termes des estimations fournies.

Dans le but de résoudre cette complexité, on propose dans ce chapitre de décomposer le modèle S3S-2D global avec sa forme descripteur en systèmes interconnectés. Cette décomposition engendre des observateurs locaux en cascade non linéaires et de taille réduite propres à chaque système local (Lendek et al., 2018). La décomposition du problème global en sous-problèmes locaux doit conserver également une bonne qualité d'estimation (Lendek et al., 2011). Les travaux de Lendek et al. (2010) montrent que l'approche de décomposition d'un système non linéaire et par conséquent des observateurs associés permet d'améliorer le réglage du système non linéaire et contribue à réduire la complexité du problème initial ainsi que son coût numérique.

L'objectif de ce chapitre est de démontrer que la méthode de décomposition du modèle S3S-2D global et la synthèse des observateurs locaux est capable d'aboutir à des résultats similaires comparés à ceux obtenus par l'approche du modèle S3S-2D global, en termes d'estimation des variables non mesurées, en simulation et avec des données issues de la collecte expérimentale de Blandeau (2018).

## II. Le modèle S3S-2D décomposé en continu

Le modèle S3S-2D décomposé (figure 29) correspond à deux modèles dynamiques  $(\Sigma_T, \Sigma_A)$  interconnectés par un terme statique de couplage  $(\Gamma_c = f(\cdot))$  :

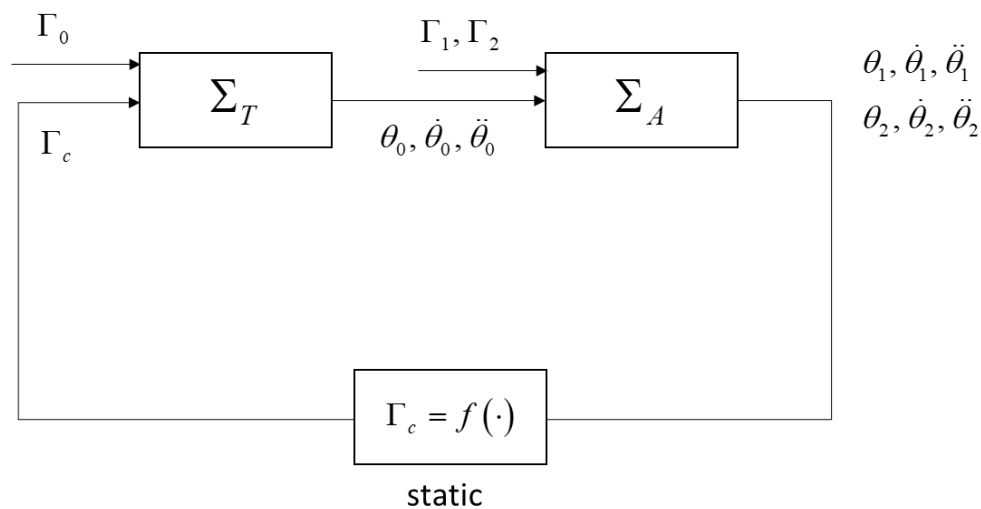


Figure 29: Le modèle S3S-2D décomposé

Les entrées et les sorties de chaque système local sont détaillées dans le tableau suivant :

Systèmes locaux	Entrées	Sorties
Système tronc $\Sigma_T$	couple du tronc et le couple de couplage $(\Gamma_0, \Gamma_c)$ .	angle, vitesse, accélération du tronc : $\theta_0, \dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0$ .
Système bras $\Sigma_A$	Couples épaule et coude $(\Gamma_1, \Gamma_2)$ angle, vitesse, accélération du tronc : $\theta_0, \dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0$ .	angle, vitesse, et accélération de l'épaule et du coude $\theta_i, \dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i, i \in \{1, 2\}$ .
Système de liaison	angle, vitesse, et accélération de l'épaule et du coude $\theta_i, \dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i, i \in \{1, 2\}$ . Couple de l'épaule $\Gamma_1$ .	couple de couplage $\Gamma_c = f(\cdot)$ .

Tableau 2: les systèmes du modèle S3S-2D décomposé

La sortie du système tronc délivre les données cinématiques en angle, vitesse et accélération qui seront injectées dans le système bras pour délivrer les données cinématiques relatives à l'articulation de l'épaule et du coude. Un système de liaison statique est ensuite mis en place afin de déterminer le terme de couplage ayant pour fonction de relier les deux systèmes dynamiques précédents. L'acronyme "T" désigne le tronc et "A" désigne le bras.

Pour le système décomposé, on utilise la même notation des angle relatifs et absolues du modèle S3S-2D global :  $q_0 = \theta_0, q_1 + \pi = \theta_1 - \theta_0, q_2 = \theta_2 - \theta_1$ .

Les constantes biomécaniques issues directement des paramètres inertiels et géométriques relevées des articulations humaines sont données par :  $p_i, i \in \{1, \dots, 10\}$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= I_{G0} + m_0 a_0^2 + (m_1 + m_2) l_0^2, & p_2 &= (m_0 a_0 + (m_1 + m_2) l_0) g, & p_3 &= I_{G1} + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2 \\
 p_4 &= m_2 a_2 l_1, & p_5 &= I_{G2} + m_2 a_2^2, & p_6 &= (-m_1 b_1 + (m_1 + m_2) l_1) g, & p_7 &= m_2 a_2 g \\
 p_8 &= m_1 a_1 l_0 + m_2 l_0 l_1, & p_9 &= m_2 a_2 l_0, & p_{10} &= (m_1 a_1 + m_2 l_1) l_0
 \end{aligned}$$

Le système tronc  $\Sigma_T$  correspond à l'équation suivante :

$$p_1 \ddot{\theta}_0 = p_2 \sin(\theta_0) + \Gamma_c + \Gamma_0 \quad (81)$$

Et le système bras  $\Sigma_A$  est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \cos(q_2) \\ p_4 \cos(q_2) & p_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} &= p_4 \sin(q_2) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_6 \sin(\theta_1) \\ p_7 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} p_8 \sin(q_1) \dot{\theta}_0 & p_8 \cos(q_1) \\ p_9 \sin(q_1 + q_2) \dot{\theta}_0 & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} & \quad (82)
 \end{aligned}$$

On peut écrire (82) sous forme d'une équation d'état par :



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & p_4 \cos(q_2) \\ 0 & 0 & p_4 \cos(q_2) & p_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & -p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_6 \sin(\theta_1) \\ p_7 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ p_8 \sin(q_1) \dot{\theta}_0 & p_8 \cos(q_1) \\ p_9 \sin(q_1 + q_2) \dot{\theta}_0 & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

L'équation du système tronc (81) est réécrite sous forme d'une équation d'état par :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_c + \Gamma_0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Le terme statique de couplage est donné par l'équation :

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} -p_{10} \sin(q_1) \dot{\theta}_1 & -p_9 \sin(q_1 + q_2) \dot{\theta}_2 & p_{10} \cos(q_1) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \Gamma_1 \quad (85)$$

Ainsi l'écriture décomposée est définie par 3 systèmes interconnectés  $\Sigma_T$  (84),  $\Sigma_A$  (83) et le terme de couplage (85). L'ensemble représente exactement le modèle S3S-2D global.

Une fois le modèle S3S-2D décomposé est construit, l'étape suivante consiste à concevoir les observateurs associés au modèle permettant de reconstruire les variables non mesurées.

### III. Le problème d'observation à entrées inconnues

Comme le modèle S3S-2D décomposé est constitué de deux systèmes dynamiques (le système tronc et le système bras), l'idée est de concevoir un observateur local pour chaque système dynamique.

A l'instar du modèle S3S-2D global, la dynamique des entrées inconnues est de type double intégrateur en cascade :  $\ddot{\Gamma}_k \approx 0$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$ , ce choix permet d'assurer un compromis acceptable entre la qualité des résultats et la complexité de calcul.

Pour le système tronc  $\Sigma_T$ , l'état est augmenté afin d'inclure le couple  $\Gamma_U = \Gamma_c + \Gamma_0$ . En regardant l'équation (81) on note qu'il est impossible de faire la différence (en termes d'observation) entre les deux couples  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_0$  comme ils apparaissent au même endroit de l'entrée.

On réécrit donc l'équation (84) relative au système tronc sous forme étendue :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \dot{\Omega}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \Omega_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_U \\ \Gamma_0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\Omega_T = \begin{bmatrix} \Gamma_U \\ \dot{\Gamma}_U \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour le modèle bras  $\Sigma_A$  (83), l'état est augmenté afin d'inclure les couples  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . On note, pour simplifier les notations, les matrices suivantes :

$$A_A(x_A) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_2 \\ -p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad E_A(\theta_2) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \cos(q_2) \\ p_4 \cos(q_2) & p_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$B_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}.$$

Muni de la définition des matrices ci-dessus, (83) s'écrit donc sous la forme :

$$E_A(\theta_A) \dot{x}_A = A_A(x_A) x_A + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Avec la matrice  $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et le vecteur  $\Omega_A = [\Gamma_1 \quad \dot{\Gamma}_1 \quad \Gamma_2 \quad \dot{\Gamma}_2]^T$ .

Le système étendu  $\Sigma_A$  s'écrit sous de forme de :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{\Omega}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A(x_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \\ y_A = [I_2 \quad 0] \begin{bmatrix} x_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} = \theta_A = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (88)$$

Avec (86), (88) et le terme de couplage (85) le but est de concevoir une cascade de deux observateurs pour les deux systèmes dynamiques  $\Sigma_T$  et  $\Sigma_A$  en assurant une preuve de convergence asymptotique et en garantissant des performances comparables à l'observateur du modèle S3S-2D global.

### III.1. Observateurs en cascade : principe de séparation en continu

L'observation en cascade a été étudiée pour les systèmes non linéaires interconnectés, par exemple dans les travaux de Lendek et al. (2018) et Grippa et al. (2012). L'idée est de créer des observateurs indépendants de manière à garantir des performances globales satisfaisantes. Ainsi, on peut créer différents types d'observateurs correspondants au système local concerné. Un principe de séparation est proposé, il est basé sur le principe de comparaison vectorielle et suit le même genre de preuves que le principe de séparation observation / commande pour les systèmes quasi-LPV (Ma et al., 1998). L'avantage de ce principe de séparation est de pouvoir régler de façon indépendante chaque observateur et de garder, sous les hypothèses formulées, la garantie d'une convergence d'estimation globale.

Considérons la proposition suivante :

#### Théorème 1 :

On considère deux systèmes  $(E_i(\cdot), A_i(\cdot), C_i(\cdot)), i \in \{1, 2\}$  avec  $E_i(\cdot)$  toujours régulière; tels qu'il existe des matrices  $K_i(\cdot), i \in \{1, 2\}$  assurant que les erreurs d'estimation d'état définies par les systèmes  $E_i(\cdot)\dot{e}_i = (A_i(\cdot) - K_i(\cdot)C_i(\cdot))e_i$  sont globalement asymptotiquement stable (GAS); il existe deux fonctions de Lyapunov  $V_i(e_i)$  et des scalaires  $\bar{\lambda}_i \geq \underline{\lambda}_i > 0$ ,  $\mu_i > 0$ ,  $\delta_i > 0$  satisfaisant :

$$\text{i.} \quad 0 < \underline{\lambda}_i \|e_i\|^2 \leq V_i(e_i) \leq \bar{\lambda}_i \|e_i\|^2 \quad (89)$$

$$\text{ii.} \quad \frac{\partial V_i(e_i)}{\partial e_i} \dot{e}_i = \frac{\partial V_i(e_i)}{\partial e_i} E_i^{-1}(\cdot) (A_i(\cdot) - K_i(\cdot)C_i(\cdot)) \leq -\mu_i \|e_i\|^2 \quad (90)$$

$$\text{iii.} \quad \left\| \frac{\partial V_i(e_i)}{\partial e_i} \right\| \leq \delta_i \|e_i\|^2 \quad (91)$$

On considère le système :

$$\begin{bmatrix} E_1(\cdot) & 0 \\ E_{12}(\cdot) & E_2(\cdot) \end{bmatrix} \dot{e} = \begin{bmatrix} A_1(\cdot) - K_1(\cdot)C_1(\cdot) & 0 \\ A_{12}(\cdot) & A_2(\cdot) - K_2(\cdot)C_2(\cdot) \end{bmatrix} e \quad (92)$$

Avec  $E_{12}(\cdot)$  et  $A_{12}(\cdot)$  des matrices bornées en norme ; alors (92) est aussi GAS.

#### Preuve du Théorème 1 :

On pose la matrice  $A_i^*(\cdot)$  telle que  $A_i^*(\cdot) = E_i^{-1}(\cdot) (A_i(\cdot) - K_i(\cdot)C_i(\cdot))$  et on calcule :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_1(\cdot) & 0 \\ E_{12}(\cdot) & E_2(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} E_1^{-1}(\cdot) & 0 \\ -E_2^{-1}(\cdot)E_{12}(\cdot)E_1^{-1}(\cdot) & E_2^{-1}(\cdot) \end{bmatrix}. \text{ L'égalité (92) est donc équivalente à :} \\ \dot{e} &= \begin{bmatrix} A_1^*(\cdot) & 0 \\ E_2^{-1}(\cdot)(A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot)A_1^*(\cdot)) & A_2^*(\cdot) \end{bmatrix} e \end{aligned} \quad (93)$$

On considère maintenant un scalaire positif  $\gamma > 0$  et la fonction de Lyapunov :

$$V(e_1, e_2) = V_1(e_1) + \gamma V_2(e_2) \quad (94)$$

Ainsi sa dérivée le long de la trajectoire de (93) est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1, e_2) &= \frac{\partial V_1(e_1)}{\partial e_1} \dot{e}_1 + \gamma \frac{\partial V_2(e_2)}{\partial e_2} \dot{e}_2 \\ &= \frac{\partial V_1(e_1)}{\partial e_1} A_1^*(\cdot) e_1 + \gamma \frac{\partial V_2(e_2)}{\partial e_2} A_2^*(\cdot) e_2 + \gamma \frac{\partial V_2(e_2)}{\partial e_2} E_2^{-1}(\cdot) (A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot)A_1^*(\cdot)) e_1 \end{aligned} \quad (95)$$

En utilisant (90) et par passage aux normes :

$$\dot{V}(e_1, e_2) \leq -\mu_1 \|e_1\|^2 - \gamma \mu_2 \|e_2\|^2 + \gamma \left\| \frac{\partial V_2(e_2)}{\partial e_2} \right\| \left\| E_2^{-1}(\cdot) (A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot)A_1^*(\cdot)) \right\| \|e_1\| \quad (96)$$

$A_1^*(\cdot)$  est GAS,  $E_{12}(\cdot)$  et  $A_{12}(\cdot)$  sont bornées en norme ; on peut écrire qu'il existe un scalaire positif  $M > 0$  tel que  $\left\| E_2^{-1}(\cdot) (A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot)A_1^*(\cdot)) \right\| \leq M$ .

En utilisant (91), (96) est satisfaite si :

$$\dot{V}(e_1, e_2) \leq -\mu_1 \|e_1\|^2 - \gamma \mu_2 \|e_2\|^2 + \gamma \delta_2 M \|e_1\| \|e_2\| \quad (97)$$

En utilisant la complétion des carrés, (97) est équivalent à :

$$\dot{V}(e_1, e_2) \leq -\left(\mu_1 - \gamma \frac{\delta_2^2 M^2}{4\mu_2}\right) \|e_1\|^2 - \gamma \left(\sqrt{\mu_2} \|e_2\| - \frac{\delta_2 M}{2\sqrt{\mu_2}} \|e_1\|\right)^2 \quad (98)$$

Comme  $\gamma > 0$  est un paramètre libre, on peut toujours le choisir tel que :  $\gamma < \frac{4\mu_1\mu_2}{\delta_2^2 M^2}$ .

Ainsi  $\dot{V}(e_1, e_2) < 0 \quad \forall (e_1, e_2) \neq 0$  ce qui prouve que le système (92) est également GAS.

**Remarque :** ces résultats peuvent être étendus facilement à une cascade de n-observateurs ayant la forme triangulaire (92) et conservant la propriété des termes non diagonaux bornés en norme. Cette caractéristique est intéressante lorsqu'on envisage de travailler avec des systèmes plus complexes comme le système 3D-S3S.

A partir de ce principe de séparation garantissant la convergence de l'estimation globale, la partie suivante montre comment obtenir la cascade de PI-observateurs via la résolution des contraintes LMI.

### III.2. La cascade des PI-observateurs du modèle S3S-2D décomposé en continu

La décomposition du modèle S3S-2D engendre deux observateurs locaux associés à chaque modèle local selon le schéma suivant :

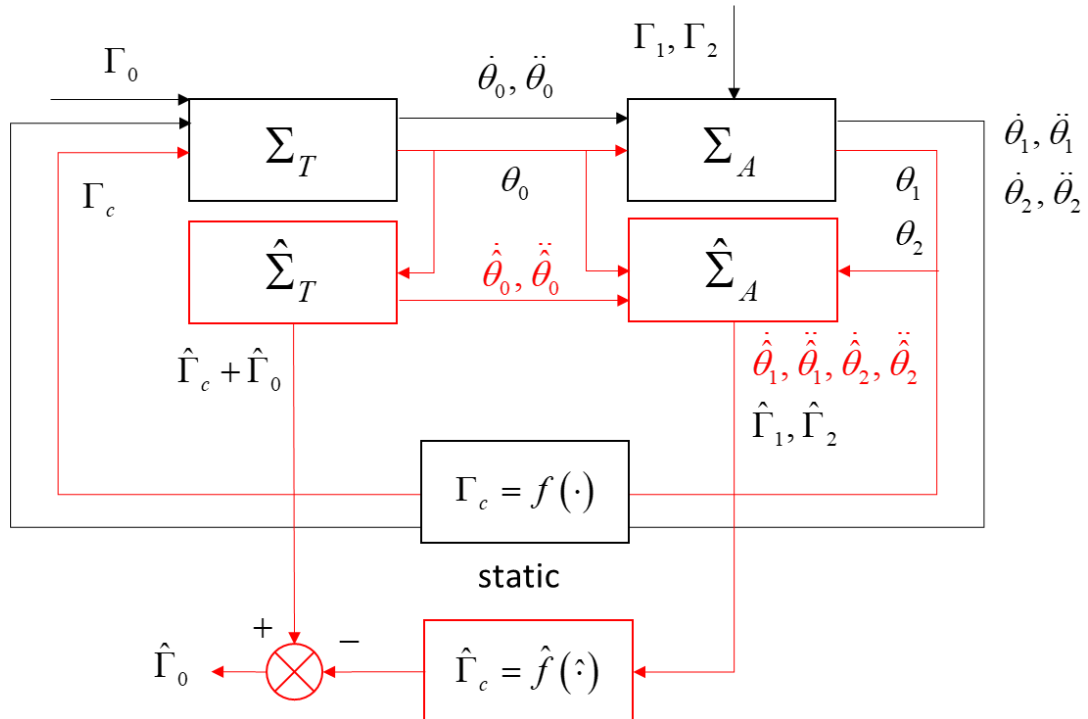


Figure 30: le multi-observateur pour le modèle S3S-2D décomposé

Les variables injectées à l'entrée des deux observateurs locaux ainsi que les variables estimées sont données dans le tableau 3.

2 observateurs PI en cascade	Les variables injectées à l'entrée	Les variables estimées
L'observateur local du tronc $\hat{\Sigma}_T$	$\theta_0$	$\hat{\theta}_0, \dot{\hat{\theta}}_0, \ddot{\hat{\theta}}_0, \hat{\Gamma}_U = \hat{\Gamma}_c + \hat{\Gamma}_0$
L'observateur local des bras $\hat{\Sigma}_A$	$\hat{\theta}_0, \dot{\hat{\theta}}_0, \ddot{\hat{\theta}}_0, \theta_1, \theta_2$	$\hat{\theta}_i, \dot{\hat{\theta}}_i, \ddot{\hat{\theta}}_i, \hat{\Gamma}_i, i \in \{1, 2\}$

**Tableau 3: les variables injectées à l'entrée et les variables estimées par les 2 observateurs en cascade**

On considère la forme étendue du système tronc  $\Sigma_T$  munie des matrices suivantes :

$$x_T = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}, A_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selon une écriture non-descripteur, on obtient la forme compacte suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{\Omega}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_T \\ \Omega_T \end{bmatrix} \quad (99)$$

Avec :  $\Omega_T = \begin{bmatrix} \Gamma_U \\ \dot{\Gamma}_U \end{bmatrix}$ ,  $\Gamma_U = \Gamma_c + \Gamma_0$ . Ainsi, on considère l'observateur local pour le système tronc :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_T \\ \dot{\hat{\Omega}}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_T \\ \hat{\Omega}_T \end{bmatrix} + K_T(\theta_0)(y_T - \hat{y}_T), \\ \hat{y}_T = C_T \hat{x}_T = \theta_0 \end{cases} \quad (100)$$

On définit la dynamique de l'erreur d'observation :  $e_T = \begin{bmatrix} x_T \\ \Omega_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_T \\ \hat{\Omega}_T \end{bmatrix}$

$$\dot{e}_T = \left( \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_T(\theta_0)C_T \right) e_T \quad (101)$$

Le but est de trouver  $K_T(\theta_0)$  tel que (101) est asymptotiquement stable.

Pour le système bras  $\Sigma_A$  (88)  $(\dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0)$  ne sont pas mesurables, elles seront donc remplacées par leurs estimées  $(\hat{\dot{\theta}}_0, \hat{\ddot{\theta}}_0)$ . L'expression (88) devient donc :

$$\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_A \\ \dot{\hat{\Omega}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A(\hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} + K_A(\cdot)(y_A - \hat{y}_A) \quad (102)$$

On définit l'erreur d'observation étendue relative au système bras par :  $e_A = \begin{bmatrix} x_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix}$  et en

considérant  $\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{e}_A$ , on peut écrire la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{e}_A = \begin{bmatrix} A_A(x_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_A(\hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix} - K_A(\cdot) C e_A + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} \right) \quad (103)$$

On définit  $\Delta A_A(\cdot) = A_A(x_A) - A_A(\hat{x}_A)$  et  $\Delta \theta_T = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix}$  :

$$\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{e}_A = \left( \begin{bmatrix} A_A(x_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot) C \right) e_A + \begin{bmatrix} \Delta A_A(\cdot) \hat{x}_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} \right) \quad (104)$$

Dans l'objectif d'utiliser les résultats du théorème 1, (104) doit être écrite en adéquation avec la deuxième ligne de (92). Le dernier terme de (104) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 + \dot{\hat{\theta}}_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 - \dot{\hat{\theta}}_0 \\ \ddot{\theta}_0 - \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} \text{ D'où on obtient l'égalité suivante :}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 + \dot{\hat{\theta}}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 - \dot{\hat{\theta}}_0 \\ \ddot{\theta}_0 - \ddot{\hat{\theta}}_0 \\ \Omega_T - \hat{\Omega}_T \end{bmatrix} = -E_{12}(\theta_A, \dot{\theta}_0, \dot{\hat{\theta}}_0) \dot{e}_T \quad (105)$$

$$\text{Avec : } E_{12}(\theta_A, \dot{\theta}_0, \dot{\hat{\theta}}_0) = - \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 + \dot{\hat{\theta}}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La dernière transformation concerne le terme du milieu de (104). On considère :

$$\Delta A_A(\cdot) = p_4 \sin(q_2) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 - \dot{\hat{\theta}}_2 \\ -\dot{\theta}_1 + \dot{\hat{\theta}}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \text{ on écrit donc : } A_A(x_A) e_A + \Delta A_A(\cdot) \hat{x}_A \text{ dans (104) tel}$$

que :

$$A_A(x_A) e_A + \Delta A_A(\cdot) \hat{x}_A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \sin(q_2) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 + \dot{\hat{\theta}}_2 \\ -\dot{\theta}_1 - \dot{\hat{\theta}}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} e_A = H(x_A, \hat{x}_A) e_A \quad (106)$$

Finalement, (104) peut être réécrite :

$$E_{12}(\theta_A, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_0) \dot{e}_T + \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{e}_A = \left( \begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot)C \right) e_A \quad (107)$$

Et le problème d'observation global s'écrit en utilisant (101) et (107) :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ E_{12}(\cdot) & \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_T \\ \dot{e}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_T(\theta_0)C_T & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_T \\ e_A \end{bmatrix} \quad (108)$$

L'équation (108) correspond aux conditions du théorème 1, les termes non-diagonaux sont bornés en norme. On conclut que les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites et donc le principe de séparation est applicable.

### III.2.1. La synthèse de l'observateur-PI en continu du $\Sigma_T$

Le premier observateur (100) du système tronç est associé à la dynamique de l'erreur (101).

$$A_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix}, C_T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \text{ On considère le gain d'observation suivant :}$$

$$K_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0 & \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + K_{LT} \quad (109)$$

$K_{LT} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  est une matrice à définir. Ainsi (109) permet de linéariser l'erreur d'observation qui s'écrit :

$$\dot{e}_T = \left( \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_{LT}C_T \right) e_T \quad (110)$$

Le système à résoudre étant linéaire, n'importe quelle technique d'obtention de  $K_{LT}$  peut-être utilisée comme un placement de pôles ou une commande linéaire quadratique LQ. La forme finale de l'observateur s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_T \\ \dot{\hat{\Omega}}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_T \\ \hat{\Omega}_T \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 0 & \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + K_{LT} \right) (y_T - \hat{y}_T) \quad (111)$$

Une fois l'équation du premier observateur est formulée, la deuxième étape consiste à estimer les paramètres cinématiques de l'épaule et du coude, c'est l'objectif du deuxième observateur local.

### III.2.2. La synthèse de l'observateur-PI en continu du $\Sigma_A$

Le second observateur (102) relatif au système bras  $\Sigma_A$  est associé à une erreur réduite issue de (107) avec  $H(x_A, \hat{x}_A)$  explicité dans (106) :

$$\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{\varepsilon}_A = \left( \begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot)C \right) \varepsilon_A \quad (112)$$

La variable  $\varepsilon_A$  apparait dans le système (112), car elle n'est qu'une partie de l'erreur complète  $e_A$  du modèle  $\Sigma_A$ . Ainsi, en utilisant le principe de séparation si (101) et (112) sont GAS, (108) est par conséquent également GAS.

Le modèle non linéaire (112) possède une partie non linéaire  $E_A(\theta_2)$  à gauche.  $E_A(\theta_2)$  possède une seule non linéarité  $\cos(q_2)$  et  $H(x_A, \hat{x}_A)$  contient deux non linéarités dépendantes des variables non mesurées :  $\sin(q_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\hat{\theta}}_1)$  et  $\sin(q_2)(\dot{\theta}_2 + \dot{\hat{\theta}}_2)$ .

Le modèle quasi-LPV complet s'écrit donc avec  $2^3 = 8$  sommets :

$$\sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{\varepsilon}_A = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{1i}(x_A, \hat{x}_A) w_{2j}(x_A, \hat{x}_A) \left( \begin{bmatrix} H_{ij} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot)C \right) \varepsilon_A \quad (113)$$

avec :

$$\cos(q_2) \in [v, 1], v_1(q_2) = \frac{1 - \cos(q_2)}{1 - v} = 1 - v_2(q_2).$$

$$\sin(q_2)(\dot{\theta}_i + \dot{\hat{\theta}}_i) \in [\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i], i \in \{1, 2\}. w_{1i}(x_A, \hat{x}_A) = \frac{\bar{\rho}_i - \sin(q_2)(\dot{\theta}_i + \dot{\hat{\theta}}_i)}{\bar{\rho}_i - \underline{\rho}_i} = 1 - w_{i2}(x_A, \hat{x}_A), i \in \{1, 2\}.$$

Et les matrices locales :

$$E_{Ai} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E_{ai} \end{bmatrix}, i \in \{1, 2\}, E_{a1} = \begin{bmatrix} p_3 & vp_4 \\ vp_4 & p_5 \end{bmatrix}, E_{a2} = \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \\ p_4 & p_5 \end{bmatrix}, H_{11} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \begin{bmatrix} 0 & \underline{\rho}_2 \\ -\underline{\rho}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$H_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \begin{bmatrix} 0 & \underline{\rho}_2 \\ -\bar{\rho}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \begin{bmatrix} 0 & \bar{\rho}_2 \\ -\underline{\rho}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, H_{22} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \begin{bmatrix} 0 & \bar{\rho}_2 \\ -\bar{\rho}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

À partir de cette description polytopique, une description étendue de (113) est employée (Taniguchi et al., 1999). L'état étendu  $\varepsilon^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_A \\ \dot{\varepsilon}_A \end{bmatrix}$  est choisi avec une fonction de Lyapunov incluant la matrice

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

$$V(\varepsilon^*) = \varepsilon^{*T} \bar{E}^T P \varepsilon^*, P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, P_1 = P_1^T \succ 0 \quad (114)$$

Le gain de l'observateur ne peut dépendre que des variables mesurées, ainsi vu la définition de  $w_{1i}$   $i \in \{1, 2\}$ , uniquement  $v_i(q_2)$  peut être utilisée et  $K_A(\cdot)$  de (113) devient  $P^{-T} \bar{K}_v$  :

$$\bar{E} \varepsilon^* = (\bar{A}_{w_1 w_2} - P^{-T} \bar{K}_v \bar{C}) \varepsilon^* \quad (115)$$



Avec :  $\bar{A}_{vw_1w_2} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \begin{bmatrix} H_{w_1w_2} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} E_{Av} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \bar{K}_v = \begin{bmatrix} K_{1v} \\ K_{2v} \end{bmatrix}.$

En se basant sur les travaux de Guerra et al. (2015), le problème LMI en continu s'écrit :

Trouver  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, P_1 = P_1^T \succ 0, \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix}$  tel que,  $i, j, k \in \{1, 2\}$

$$\begin{bmatrix} P_3^T \begin{bmatrix} H_{jk} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_{1i}C + (*) & (*) \\ P_4^T \begin{bmatrix} H_{jk} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_{2i}C + P_1 - \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T P_3 - P_4^T \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T P_4 \end{bmatrix} < 0 \quad (116)$$

**Remarque:** si (116) est satisfaite, la positivité de  $P_4^T \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T P_4$  garantit la régularité de  $P_4$  et par conséquent  $P^{-T}$  recherché dans (115) sera bien définie.

Finalement et selon les travaux de Guerra et al. (2015), l'observateur  $\Sigma_A$  s'écrit, avec

$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, P_1 = P_1^T \succ 0, \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix} i \in \{1, 2\}$ , solution de (116) :

$$\sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_A \\ \dot{\hat{\Omega}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A(\hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} +$$

$$\left[ \sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} I \right] P_{(\cdot)}^{-T} \sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} K_{1i}(\cdot) \\ K_{2i}(\cdot) \end{bmatrix} (y_A - \hat{y}_A) \quad (117)$$

Et pour coupler les deux observateurs locaux  $\hat{\Sigma}_T$  et  $\hat{\Sigma}_A$  des deux systèmes dynamiques, le couple de couplage estimé  $\hat{\Gamma}_c$  est donné par :

$$\hat{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} -p_{10} \sin(q_1) \dot{\hat{\theta}}_1 & -p_9 \sin(q_1 + q_2) \dot{\hat{\theta}}_2 & p_{10} \cos(q_1) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_A \\ \dot{\hat{\Omega}}_A \end{bmatrix} - \hat{\Gamma}_1 \quad (118)$$

### III.3. Résolution des contraintes LMI en continu

Le protocole de simulation (figure 31) suit le même déroulement. Le modèle S3S-2D stabilisé est simulé, la sortie mesurée est composée des angles articulaires qui seront ensuite injectés à l'entrée de la cascade des PI-observateurs et de l'observateur global. Afin d'évaluer la fiabilité de l'observateur, l'erreur d'estimation des entrées inconnues a été calculée. Une participation passive au niveau du tronc a été assimilée à un signal sinusoïdal d'amplitude 0.2 N.m et de fréquence 10 Hz.

On rappelle que pour l'observateur global continu défini dans le chapitre précédent, la faisabilité du problème LMI (incluant un taux de décroissance de la fonction de Lyapunov et une borne maximum sur la norme des gains) était garantie dans tout l'ensemble des contraintes  $\Omega_x$ .

Le gain de l'observateur local du système tronc  $K_{LT}$  est obtenu donc via placement de pôles, après quelques essais la solution adoptée est  $K_{LT} = 10^2 [6 \ 4 \ 540 \ 190]^T$ .

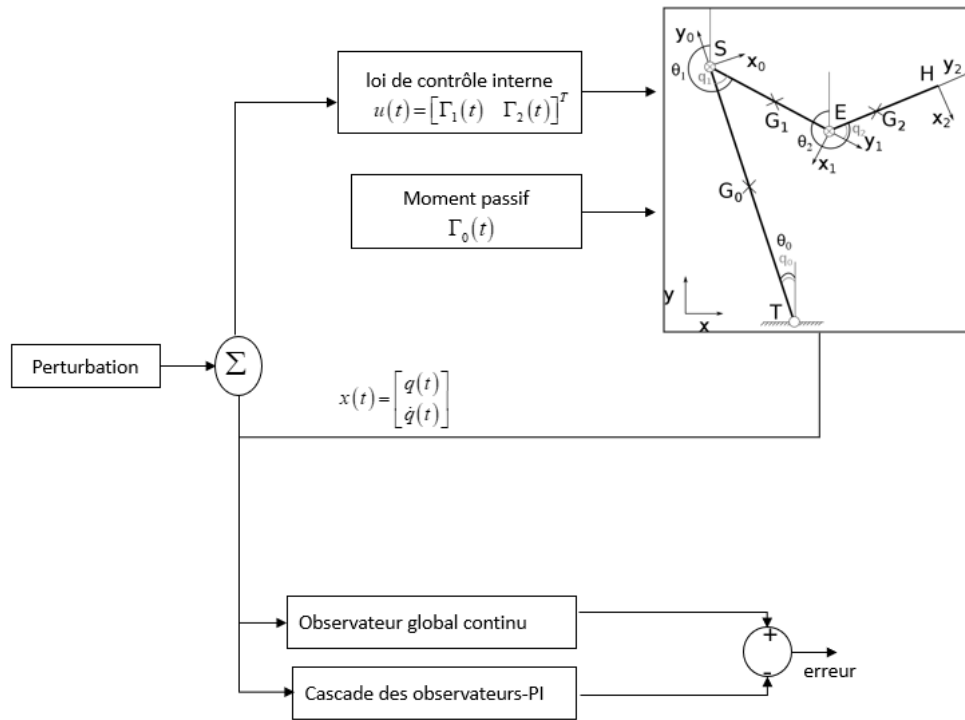


Figure 31: protocole de simulation de la cascade des PI-observateurs en continu

La résolution du problème (116), en ajoutant un taux de décroissance  $\tau = 7$  (dans le but de garantir une performance de convergence à l'observateur) au premier terme de (116) a abouti aux gains

$$\begin{bmatrix} K_{1i}(\cdot) \\ K_{2i}(\cdot) \end{bmatrix}, i \in \{1, 2\} :$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 141.2 & -31.3 \\ -31.3 & 144.4 \\ 11.8 & -3 \\ -3.6 & 12.7 \\ 8 \times 10^{-3} & 6 \times 10^{-3} \\ 3 \times 10^{-3} & -5 \times 10^{-3} \\ 10^{-3} & 2 \times 10^{-3} \\ 10^{-4} & -3 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, K_{12} = \begin{bmatrix} 131.6 & -27.1 \\ -21.2 & 122.6 \\ 10.7 & -2.7 \\ -1.4 & 9.8 \times 10^{-1} \\ 2 \times 10^{-3} & 4 \times 10^{-3} \\ 8 \times 10^{-3} & -3.3 \times 10^{-1} \\ 10^{-3} & 9 \times 10^{-3} \\ 10^{-4} & -21 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, K_{21} = \begin{bmatrix} 19.3 & -4.5 \\ -4.6 & 20.1 \\ -2.7 \times 10^{-1} & 92 \times 10^{-2} \\ -3.6 \times 10^{-2} & -18 \times 10^{-2} \\ 6 \times 10^{-4} & 49 \times 10^{-3} \\ 13 \times 10^{-4} & 8 \times 10^{-3} \\ 10^{-4} & 2 \times 10^{-3} \\ 10^{-3} & -3 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} 15.3 & -7.5 \\ -4.98 & 28.1 \\ -2 \times 10^{-1} & 8.7 \times 10^{-1} \\ -2 \times 10^{-2} & -5 \times 10^{-2} \\ 8 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-3} \\ 5 \times 10^{-3} & 6 \times 10^{-3} \\ 10^{-4} & 2.7 \times 10^{-3} \\ 10^{-3} & -1.6 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

Les résultats de simulation des observateurs sont donnés sur les figures suivantes. L'erreur d'observation est l'écart entre les variables estimées par l'observateur global et l'observateur décomposé.

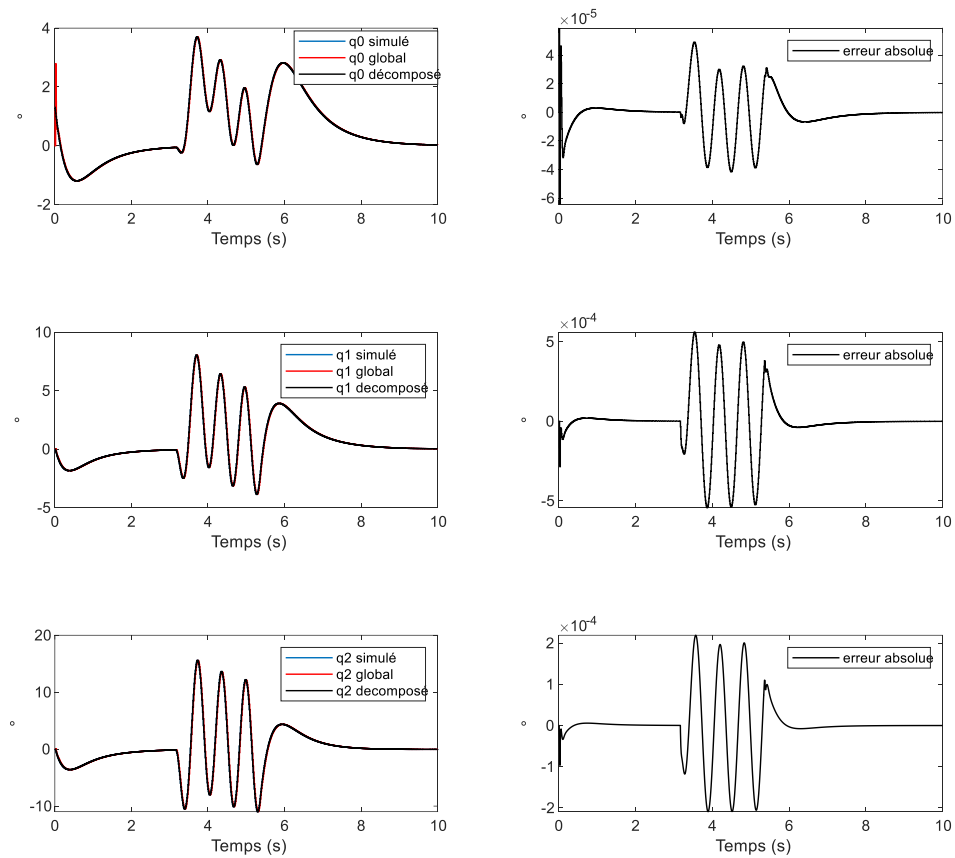


Figure 32: Les angles estimés par l'observateur global et décomposé

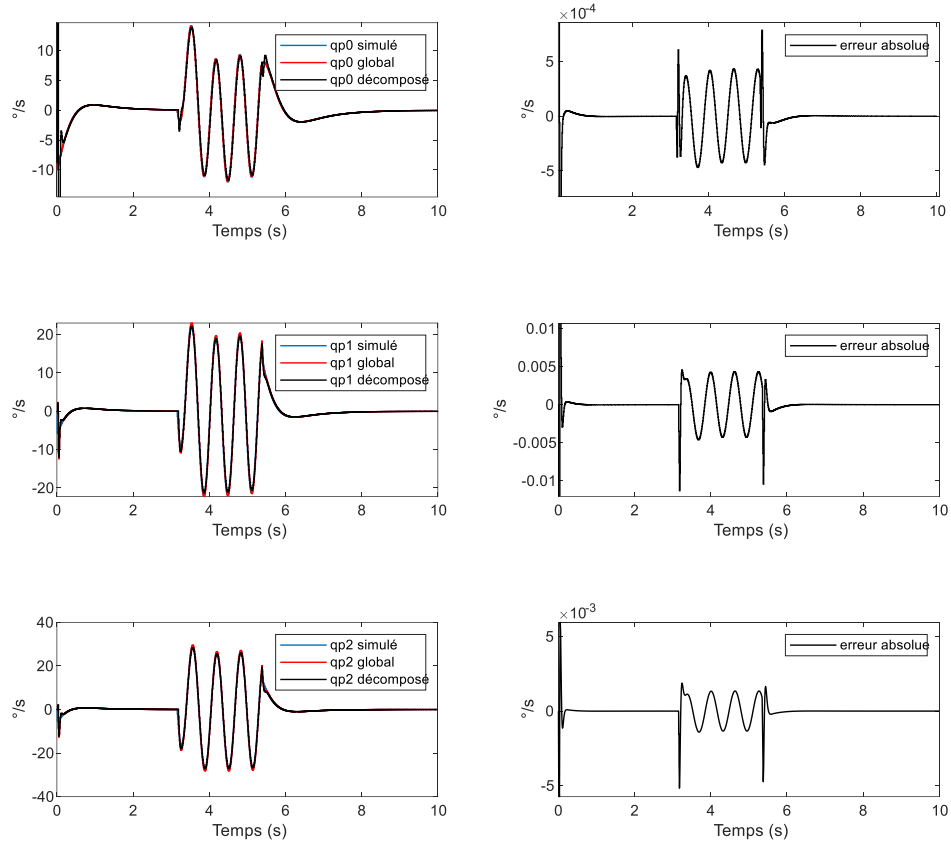


Figure 33: Les vitesses estimées par l'observateur global et décomposé

La convergence des variables estimées vers les variables simulées est atteinte en moins de 0.5 secondes. Les couples en niveau de l'épaule  $M_1$  et au niveau du coude  $M_2$  sont donnés par la figure 34.

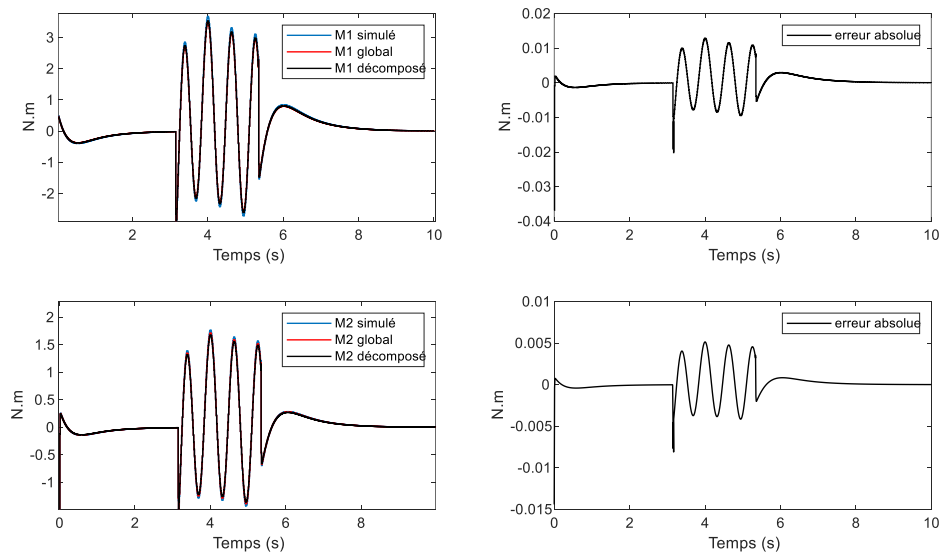


Figure 34: Les couples actifs estimés par l'observateur global et l'observateur décomposé

Pour boucler les deux PI-observateurs continus, on finit par l'équation du couplage qui permet de donner l'estimée du couple  $\hat{\Gamma}_c$  à partir de l'estimée du couple au niveau de l'épaule ainsi que les vitesses et les accélérations extraites de l'observateur du système bras.

$$\hat{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} -p_{10} \sin(q_1) \dot{\theta}_1 & -p_9 \sin(q_1 + q_2) \dot{\theta}_2 & p_{10} \cos(q_1) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_A \\ \dot{\hat{\Omega}}_A \end{bmatrix} - \hat{\Gamma}_1 \quad (119)$$

Le couple au niveau du tronc est enfin retrouvé via l'équation  $\Gamma_U = \Gamma_c + \Gamma_0$ .

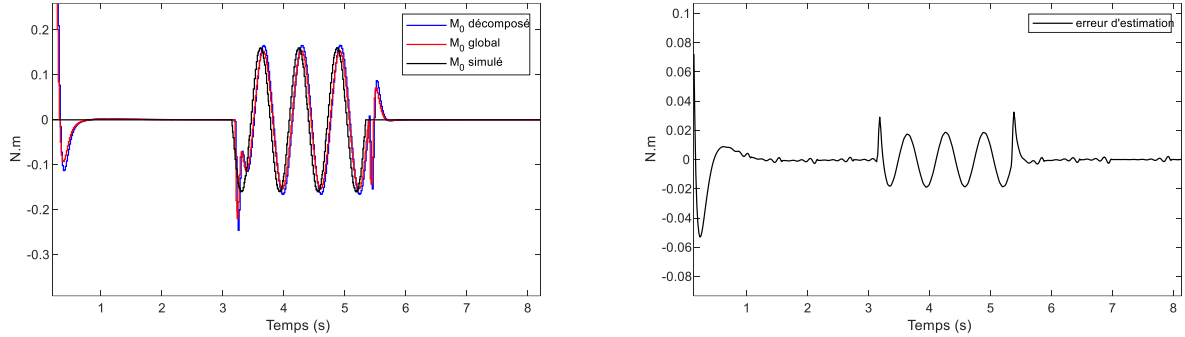


Figure 35: le couple du tronc estimé par l'observateur global et la cascade des PI-observateurs

L'observateur global et la cascade des PI-observateurs montrent des performances équivalentes en simulation (l'erreur sur les couples est inférieure à 5%). La prochaine étape consiste à évaluer les deux observateurs avec des données cliniques.

## VI. La validation expérimentale de l'observateur décomposé en continu

Cette partie consiste à évaluer expérimentalement la cascade des PI-observateurs, ceci est réalisé en testant sa réponse comparée à l'observateur global continu et en injectant les angles articulaires issus de la collecte expérimentale réalisée dans les travaux de doctorat de Blandeau (2018). On rappelle que l'observateur est actionné entre la stabilisation complète du sujet après la perturbation et la fin de la stabilisation selon le schéma suivant (Blandeau, 2018) :

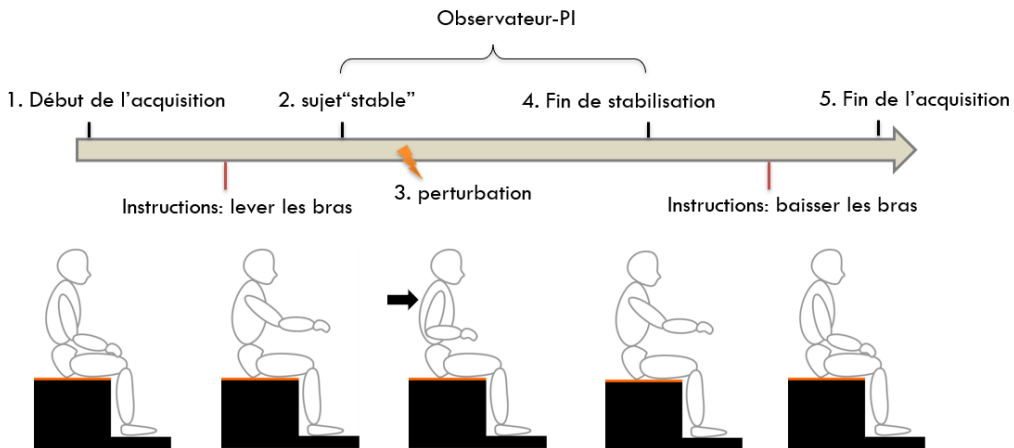


Figure 36: protocole expérimental (Blandeau, 2018)

On note que le modèle S3S-2D n'est exploitable que pour analyser les mouvements symétriques relatifs aux stratégies BM et HF.

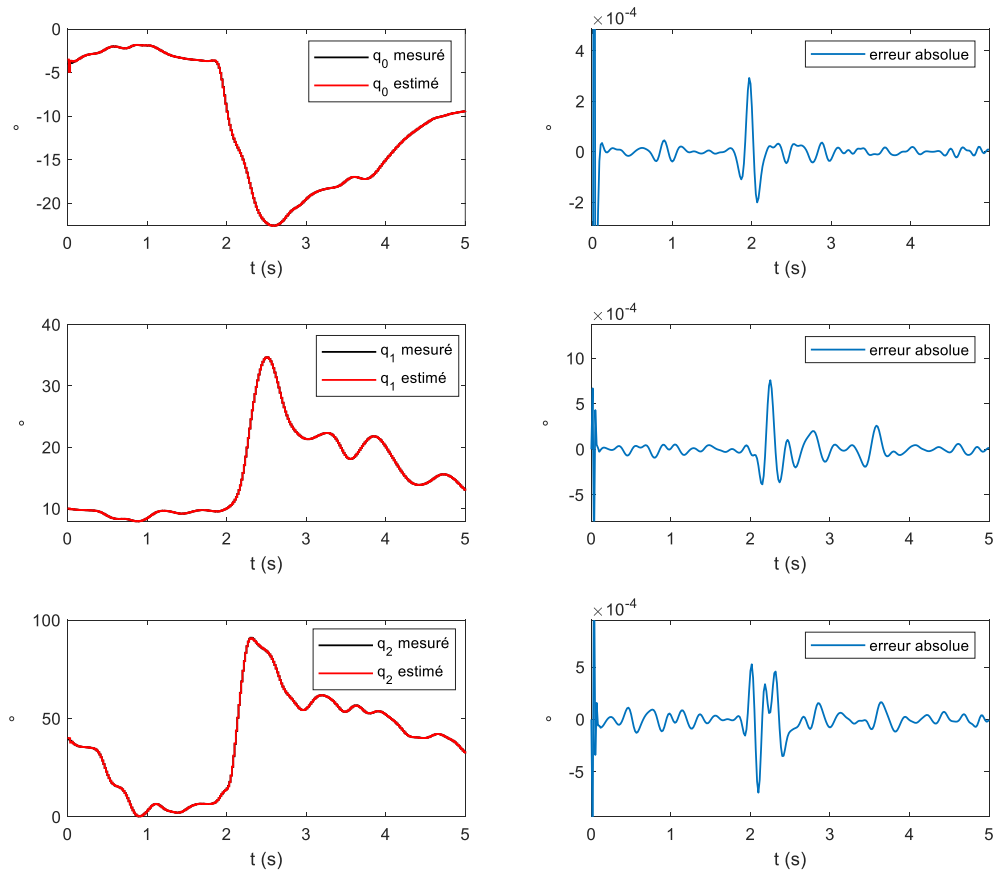
Afin de tester les observateurs décomposés on injecte les angles articulaires de deux sujets choisis et on compare les résultats d'estimation. Les caractéristiques de chaque sujet sont données dans le tableau suivant :

Sujet	Âge	Sexe	Masse (kg)	Taille (cm)	Lésion	Âge Lésion (Année)	Fusion vertébrale	Tour de taille (cm)	Score ASIA
S239	32	F	54,8	162,6	T6	2,3	T11-T4	79	A
S246	32	F	57.5	163	T8	2.8	T11-T5	84	A

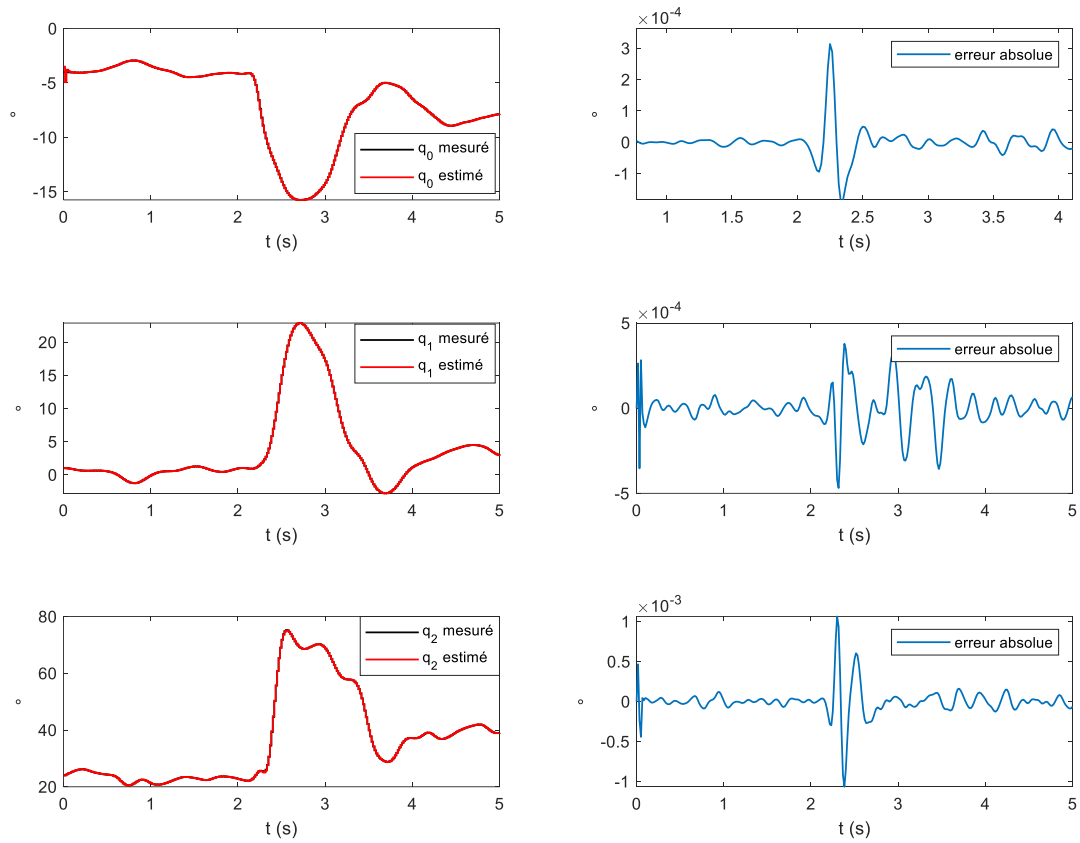
**Tableau 4: caractéristiques des sujets issues de la collecte expérimentale (Blandeau, 2018)**

On note que ces caractéristiques ont été renseignées par les sujets. Des informations spécifiques à la lésion ont été également demandées comme le score ASIA « American Spinal Injury Association » (Kirshblum et al., 2011) qui permet de classer la sévérité de la lésion (complète ou plus ou moins complète) ainsi que le score TIC « Trunk Impairment Classification » (Altmann et al., 2013) relatifs aux modifications fonctionnelles provoquées par la lésion sur le sujet. En effet, tous les sujets ne possèdent pas les mêmes capacités à maintenir un équilibre assis, cette capacité est déterminée via le score ASIA et le score TIC et elle est aussi fonction du niveau de la lésion (Gauthier et al., 2013).

Pour les deux sujets étudiés leurs score ASIA étaient classés A (une lésion médullaire complète) c'est-à-dire qu'aucune fonction sensorielle ou motrice n'est préservée au niveau des segments sacrés S4-S5 (Encaoua, 2019). Avant de comparer les variables estimées par l'observateur global et l'observateur décomposé et afin de tester la fiabilité de la cascade des PI-observateurs, on compare tout d'abord les variables estimées avec des données connues (les angles articulaires). Pour les sujets S239 et S246, on choisit une acquisition spécifique de la collecte expérimentale et on récupère les variables estimées par la cascade des PI-observateurs. Les angles articulaires estimés pour les deux sujets étudiés sont donnés par les figures 37 et 38.



**Figure 37: angles estimés sujet S239**



**Figure 38: angles estimés sujet S246**

Pour les deux sujets adoptants deux stratégies de stabilisation différentes, l'erreur est de l'ordre de  $10^{-4}$  entre les angles estimés par la cascade des PI-observateurs et les angles issus de la collecte expérimentale. L'erreur d'observateur augmente suite à la perturbation ce qui s'explique par les mouvements des membres supérieurs afin de se stabiliser lorsque les angles varient rapidement. Les résultats fournis attestent de la fiabilité de la cascade des PI-observateurs ce qui permet de passer à l'estimation des couples non mesurés en particulier le couple au niveau de la région lombaire.

Pour les sujets S239 et S246 adoptant respectivement les stratégies BM et HF, on visualise (figure 39) les deux couples au niveau du tronc estimés par les observateurs en cascade et l'observateur continu global.

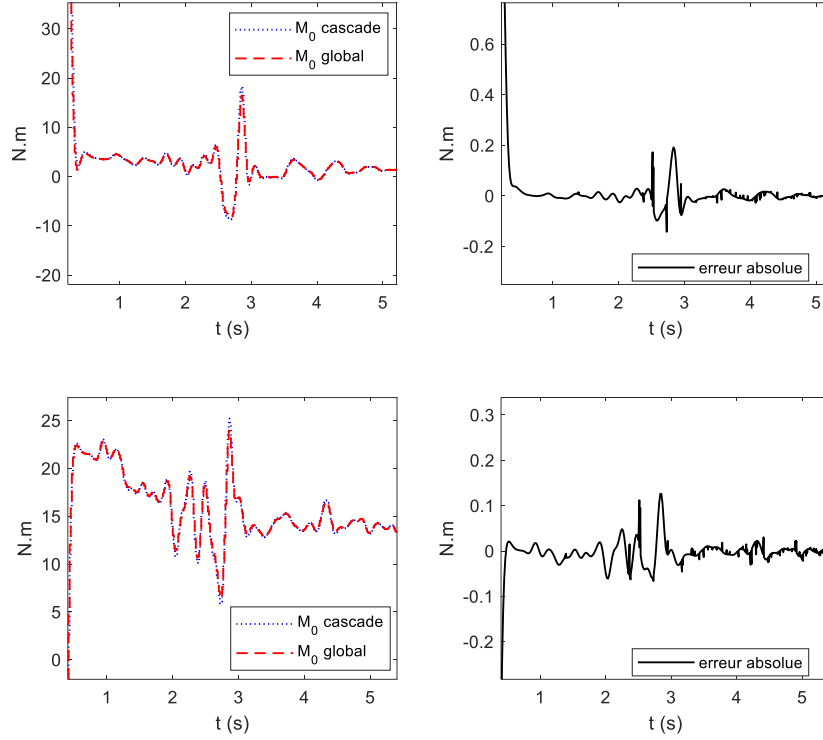


Figure 39: à gauche le couple du tronc et à droite l'erreur d'estimation

Les résultats montrent une équivalence entre l'observateur global continu du modèle S3S-2D non linéaire et sa version décomposée. On peut donc conclure quant à la validité de l'approche de décomposition et la synthèse des observateurs locaux en cascade sur le modèle étudié.

La partie suivante est dédiée à la discrétisation du modèle S3S-2D décomposé et la synthèse des observateurs décomposés discrets. Le but est d'étudier les performances de ceux-ci comparés à l'observateur global discret élaboré dans les travaux de recherche de Blandeau (2018).

## V. Le modèle S3S-2D décomposé en discret

Une version dans le domaine discret du modèle S3S-2D décomposé peut être déduite à partir du modèle en continu défini par les équations : (81), (82) et (85).

Pour discrétiser le système continu, la méthode d'Euler est utilisée.

Elle permet d'écrire le modèle discret en fonction de la période d'échantillonnage  $s$  :

$$\dot{x}(t) = s^{-1}(x^+ - x).$$

On note pour simplifier les notations :

$$x^+ \rightarrow x_{k+1}, x \rightarrow x_k \quad (120)$$

### V.1. Le système tronc en discret

L'équation du système tronc est définie par :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\Gamma_c + \Gamma_0), \theta_0 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} \quad (121)$$



Le modèle discret s'écrit directement :

$$x_T^+ = \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix} + I \right) x_T + s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\Gamma_c + \Gamma_0) \quad (122)$$

Ce qui donne l'équation discrète finale du système tronç :

$$x_T^+ = \left( s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix} + I \right) x_T + s \begin{bmatrix} 0 \\ p_1^{-1} \end{bmatrix} (\Gamma_c + \Gamma_0) \quad (123)$$

## V.2. Le système bras en discret

Le modèle bras en continu s'écrit sous forme d'une équation d'état par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & p_4 \cos(q_2) \\ 0 & 0 & p_4 \cos(q_2) & p_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & -p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_6 \sin(\theta_1) \\ p_7 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ p_8 \sin(q_1) & p_8 \cos(q_1) \\ p_9 \sin(q_1 + q_2) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (124)$$

En discret :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \cos(q_2) \\ p_4 \cos(q_2) & p_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} (x_A^+ - x_A) &= s \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_2 \\ -p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x_A \\ &+ s \begin{bmatrix} 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_A) \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (125)$$

$$\text{Avec : } \ddot{\theta}_0 = s^{-1} (\dot{\theta}_0^+ - \dot{\theta}_0), C(\theta_A) = \begin{bmatrix} p_8 \sin(q_1) & p_8 \cos(q_1) \\ p_9 \sin(q_1 + q_2) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \text{ et } D_a(\theta_A) = \begin{bmatrix} p_6 \sin(\theta_1) \\ p_7 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}$$

On finit par l'équation de couplage permettant d'interconnecter le système tronç et le système bras.

Le terme de couplage en discret est donc défini par :

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} -p_{10} \sin(q_1) \dot{\theta}_1 & -p_9 \sin(q_1 + q_2) \dot{\theta}_2 & p_{10} \cos(q_1) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \Gamma_1 \quad (126)$$

Une fois le modèle S3S-2D décomposé est discrétisé, il convient d'étudier, à l'instar du cas continu, le principe de séparation en discret.

### V.3. Le principe de séparation en discret

Les hypothèses du principe de séparation relatives aux observateurs locaux doivent être validées avant de concevoir la cascade des observateurs non linéaires dans le but de garantir la preuve de convergence asymptotique.

**Théorème 2 :** On considère deux systèmes  $(E_i(\cdot), A_i(\cdot), C_i(\cdot))$ ,  $i \in \{1, 2\}$  ( $E_i(\cdot)$  est une matrice inversible). On suppose qu'il existe deux matrices  $L_i(\cdot)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  telles que les erreurs d'estimation d'état des deux systèmes  $E_i(\cdot)\Theta^+ = (A_i(\cdot) - L_i(\cdot)C_i(\cdot))\Theta$  sont GAS ; il existe deux fonctions de Lyapunov  $V_i(e_i) = e_i^T P_i(\cdot)e_i$  et des scalaires  $\bar{\lambda}_i \geq \underline{\lambda}_i > 0$ ,  $\mu_i > 0$ ,  $\delta_i > 0$  satisfaisant :

$$\text{i.} \quad 0 < \underline{\lambda}_i \|\Theta_i\|^2 \leq V_i(\Theta_i) \leq \bar{\lambda}_i \|\Theta_i\|^2, \bar{\lambda}_i \geq \underline{\lambda}_i > 0 \quad (127)$$

$$\text{ii.} \quad \Delta V_i(e_i) = e_i^{T+} P_i^+(\cdot) e_i^+ - e_i^T P_i(\cdot) e_i < 0 \quad (128)$$

On considère le système :

$$\begin{bmatrix} E_1(\cdot) & 0 \\ E_{12}(\cdot) & E_2(\cdot) \end{bmatrix} \Theta^+ = \begin{bmatrix} A_1(\cdot) - L_1(\cdot)C_1(\cdot) & 0 \\ A_{12}(\cdot) & A_2(\cdot) - L_2(\cdot)C_2(\cdot) \end{bmatrix} \Theta \quad (129)$$

$E_{12}(\cdot)$  et  $A_{12}(\cdot)$  des matrices bornées en norme, alors (129) est aussi GAS.

**Preuve du Théorème 2 :**

On considère la matrice :  $A_j^*(\cdot) = E_j^{-1}(\cdot)(A_j(\cdot) - L_j(\cdot)C_j(\cdot))$ , et l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} E_1(\cdot) & 0 \\ E_{12}(\cdot) & E_2(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^+ \\ \varepsilon^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(\cdot) - L_1(\cdot)C_1(\cdot) & 0 \\ A_{12}(\cdot) & A_2(\cdot) - L_2(\cdot)C_2(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (130)$$

$$\text{Ce qui implique} \begin{bmatrix} e^+ \\ \varepsilon^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*(\cdot) & 0 \\ E_2^{-1}(\cdot)(A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot)A_1^*(\cdot)) & A_2^*(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (131)$$

On pose la matrice  $\chi(\cdot)$  telle que  $\chi(\cdot) = E_2^{-1}(\cdot)(A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot)A_1^*(\cdot))$ .

On considère une fonction de Lyapunov :  $V(e, \varepsilon) = V_1(e) + \gamma V_2(\varepsilon)$  avec  $\gamma > 0$  un scalaire positif.

Sa variation le long de la trajectoire de (131) est définie par :

$$\Delta V(e, \varepsilon) = V(e^+, \varepsilon^+) - V(e, \varepsilon) = \Delta V_1(e) + \gamma \Delta V_2(\varepsilon) \quad (132)$$

$$= e_1^T (A_1^{*T} P_1^+(\cdot) A_1^* - P_1(\cdot)) e_1 + \gamma (\chi(\cdot) e_1 + A_2^* \varepsilon)^T P_2^+(\cdot) (\chi(\cdot) e_1 + A_2^* \varepsilon) - \gamma \varepsilon^T P_2(\cdot) \varepsilon \leq 0 \quad (133)$$

$$e_1 \left( A_1^{*T} P_1^+ (\cdot) A_1^* - P_1 (\cdot) \right) e_1 + \varepsilon^T \left( A_2^{*T} P_2^+ (\cdot) A_2^* - P_2 (\cdot) \right) \varepsilon + \gamma \left( \chi (\cdot) e_1 \right)^T P_2^+ (\cdot) \chi (\cdot) e_1 + \gamma \left( \chi (\cdot) e_1 \right)^T P_2^+ (\cdot) A_2^* \varepsilon + (*) \leq 0 \quad (134)$$

On peut réécrire (134) de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_1^{*T} P_1^+ (\cdot) A_1^* - P_1 (\cdot) + \gamma \chi^T (\cdot) P_2^+ (\cdot) \chi (\cdot) & * \\ \gamma A_2^{*T} P_2^+ (\cdot) \chi (\cdot) & \gamma (A_2^{*T} P_2^+ (\cdot) A_2^* - P_2 (\cdot)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \leq 0 \quad (135)$$

Ainsi en utilisant (128), la propriété de décroissance de chacune des fonctions de Lyapunov, il existe  $\mu_j > 0$  tel que  $A_j^{*T} P_j^+ (\cdot) A_j^* - P_j (\cdot) \leq -\mu_j I$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , la condition (135) est satisfaite si :

$$\begin{pmatrix} -\mu_1 I + \gamma \chi^T (\cdot) P_2^+ (\cdot) \chi (\cdot) & * \\ \gamma A_2^{*T} P_2^+ (\cdot) \chi (\cdot) & -\gamma \mu_2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (136)$$

Via un complément de Schur, (136) est équivalent à :

$$\gamma \left( \mu_2^{-1} (*) A_2^{*T} P_2^+ (\cdot) \chi (\cdot) + \chi^T (\cdot) P_2^+ (\cdot) \chi (\cdot) \right) - \mu_1 I < 0 \quad (137)$$

$\mu_1 > 0$  étant fixe et  $\chi (\cdot)$  bornée en norme, il existe toujours un  $\gamma > 0$  suffisamment petit pour vérifier l'inégalité (137).

A partir de ce principe de séparation entre les observateurs locaux garantissant une convergence de l'erreur globale, la partie suivante montre comment obtenir la cascade des PI-observateurs via la résolution des contraintes LMI.

#### V.4. La cascade des observateurs du modèle S3S-2D décomposé en discret

A l'instar du cas continu, il convient de synthétiser un observateur à chaque modèle local.

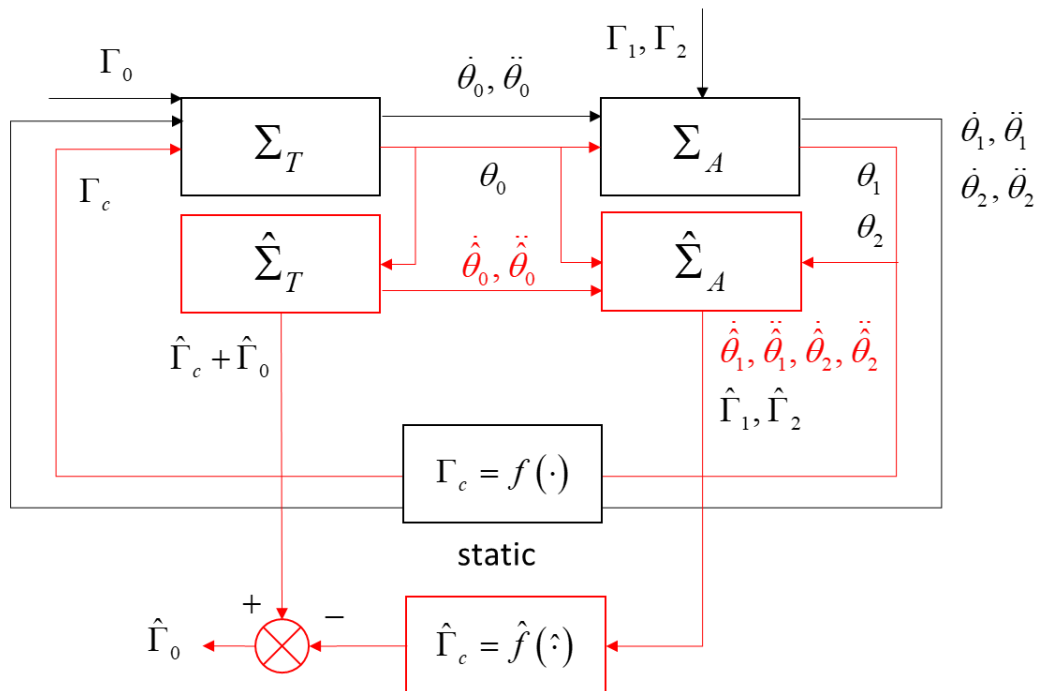


Figure 40: multi-observateurs d'état

#### V.4.1. L'observateur local discret du système tronc

On estime que la dynamique des entrées inconnues est capturée par une cascade de double intégrateur  $\ddot{\Gamma}_k \approx 0$ ,  $k \in \{0,1,2\}$ . En discret cela correspond donc à  $(z-1)^2 \Gamma_k \approx 0$ . Pour le système tronc, l'état est augmenté afin d'inclure les entrées inconnues  $\Gamma_U = \Gamma_c + \Gamma_0$ . A l'instar du cas continu, on note qu'il est impossible à ce stade de faire la distinction entre les deux couples  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_0$ , car ils apparaissent au même endroit à l'entrée.

Le système augmenté du tronc est défini par :

$$x_T^{e+} = \left( s \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} + I \right) x_T^e \quad (138)$$

Avec l'état augmenté :

$$x_T^{e+} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \Omega_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T \\ \Omega_T \end{bmatrix}, \quad x_T = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_T = \begin{bmatrix} \Gamma_U \\ \dot{\Gamma}_U \end{bmatrix}.$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 2I \end{bmatrix}, \quad A_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}.$$

L'observateur local du tronc est donné par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}_T^{e+} = \left( s \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} + I \right) \hat{x}_T^e + K_T(\theta_0)(y_T - \hat{y}_T), \\ \hat{y}_T = C_T \hat{x}_T^e = \theta_0 \end{cases} \quad (139)$$

L'erreur d'estimation est définie par  $e_T = \hat{x}_T^{e+} - x_T^{e+}$ . Sa variation est donnée par :

$$e_T^+ = \left( s \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_T(\theta_0)C_T + I \right) e_T \quad (140)$$

$$\text{Avec } A_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le gain d'observation qui permet de linéariser l'erreur (140) :

$$K_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0 & \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + K_{LT}, \quad K_{LT} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \quad (141)$$

$$\text{L'erreur d'observation s'écrit alors } e_T^+ = \left( s \begin{bmatrix} J & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_{LT}C_T + I \right) e_T \quad (142)$$

A l'instar du cas continu, le gain  $K_{LT}$  peut être calculé par n'importe quelle technique linéaire comme un placement de pôles ou une commande linéaire quadratique LQ. La forme finale de l'observateur du système tronc s'écrit donc :

$$\hat{x}_T^{e+} = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} \hat{x}_T^e - \left( \begin{bmatrix} 0 & \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + K_{LT} \right) (y_T - \hat{y}_T) \quad (143)$$

#### V.4.2. L'observateur local discret du système bras

La dynamique réduite de l'erreur est définie en continu par :

$$\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{\varepsilon}_A = \left( \begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot)C \right) \varepsilon_A \quad (144)$$

Avec  $H(x_A, \hat{x}_A) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \sin(q_2) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 + \dot{\hat{\theta}}_2 \\ -\dot{\theta}_1 - \dot{\hat{\theta}}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ ,  $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . En discret on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \varepsilon_A^+ = \left( s \begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - sK_A(\cdot)C + \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \varepsilon_A \quad (145)$$

On réécrit (145) sous forme d'une égalité :

$$\left( \left( s \begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - sK_A(\cdot)C \right) - \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_A^+ \end{pmatrix} = 0 \quad (146)$$

On considère une fonction quadratique de Lyapunov définie par :

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^T P \varepsilon, \quad P = P^T > 0 \quad (147)$$

Sa variation s'écrit  $\Delta V(\varepsilon) = V(\varepsilon^+) - \lambda V(\varepsilon)$  avec le scalaire  $\lambda$  tel que  $0 < \lambda \leq 1$  défini comme un taux de décroissance afin de garantir une performance de convergence à l'observateur local :

$$\Delta V(e) = \begin{bmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_A^+ \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\lambda P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_A^+ \end{bmatrix} < 0 \quad (148)$$

On définit le gain d'observation sous forme de :  $K_A = Q(q_k)^{-1} K_h$  avec  $Q(q_k)$  une matrice à déterminer (voir sa justification plus loin). En utilisant le lemme de Finsler (Oliveira and Skelton, 2001) vérifier (148) sous la contrainte égalité (146) est équivalent à trouver une matrice quelconque  $M(\cdot)$  telle que :

$$M(\cdot) \left[ s \begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - sK_A(\cdot)C - \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right] + (*) + \begin{bmatrix} -\lambda P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} < 0. \quad (149)$$

Pour simplifier les écritures, on définit :  $\begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = H_\gamma(x_A, \hat{x}_A)$  et  $\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = E_\gamma(\theta_2)$ .

Un choix judicieux (car aboutissant à des contraintes LMI) et classique est d'utiliser  $M(\cdot)$  telle que

$$M(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 \\ Q(q_k) \end{bmatrix}; \text{ ainsi (149) est vérifiée si :}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ Q(q_k) \end{bmatrix} \left[ sH_\gamma(x_A, \hat{x}_A) + E_\gamma(\theta_2) - sQ(q_k)^{-1} K_h C \quad -E_\gamma(\theta_2) \right] + (*) + \begin{bmatrix} -\lambda P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} < 0. \quad (150)$$

En développant, on obtient la forme LMI :

$$\begin{bmatrix} -\lambda P & (*) \\ Q(q_k)(sH_\gamma(x_A, \hat{x}_A) + E_\gamma(\theta_2)) - sK_h C & P - Q(q_k)E_\gamma(\theta_2) - (Q(q_k)E_\gamma(\theta_2))^T \end{bmatrix} < 0 \quad (151)$$

$H_\gamma(x_A, \hat{x}_A)$  contient les mêmes non linéarités que  $H(x_A, \hat{x}_A)$ , c'est-à-dire  $\sin(q_1)(\theta_1 + \dot{\theta}_1)$  et  $\sin(q_2)(\theta_2 + \dot{\theta}_2)$ , on peut donc écrire les matrices à l'aide de polytopes :

$$E_\gamma(\theta_2) = E_{\gamma v} = \sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ et } H_\gamma(x_A, \hat{x}_A) = H_{\gamma w_1 w_2} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{1i}(x_A, \hat{x}_A) w_{2j}(x_A, \hat{x}_A) \begin{bmatrix} H_{ij} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}.$$

Seules les variables mesurées peuvent être utilisées dans l'observateur, on peut donc utiliser  $Q(q_2)$  et  $K(q_2)$  dans les LMI mais pas introduire les variables  $(x_A, \hat{x}_A)$  servant à construire le polytope de  $H_\gamma(x_A, \hat{x}_A)$ . En écrivant (151) sous forme polytopique on obtient :

$$\sum_{i,j,k=1}^2 v_i(q_2) w_{1j}(x_A, \hat{x}_A) w_{2k}(x_A, \hat{x}_A) \begin{bmatrix} -\lambda P & (*) \\ Q_i(sH_{\gamma_{jk}} + E_{\gamma_i}) - sK_i C & P - Q_i E_{\gamma_i} - (Q_i E_{\gamma_i})^T \end{bmatrix} \quad (152)$$

Et l'observateur discret du système bras :

$$\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \hat{x}_A^{e+} = \left( s \begin{bmatrix} A_A(\hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \hat{x}_A^e + s \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddots \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} + K_A(\cdot)(y_A - \hat{y}_A) \quad (153)$$

Avec  $K_A = Q(q_k)^{-1} K_v = Q(q_k)^{-1} \sum_{i=1}^2 v_i(q_2) K_i$ .

## V.5. Simulation de la cascade des PI-observateurs en discret

Le protocole de simulation suit le même principe que la cascade des PI-observateurs en continu. L'écart entre les variables estimées par les observateurs en cascade en discret et l'observateur global discret présenté dans les travaux de Blandeau (2018) est recherché.

Le gain d'observation du système tronc est obtenu par placement de pôles après quelques essais, la solution adoptée est :  $K_{LT} = 10^3 [6.98 \quad 1.33 \quad 2.9 \quad 4.1]^T$ .

Concernant la résolution du problème (152) relatif au système bras et afin de pouvoir influencer sur les performances, un taux de décroissance a été ajouté au premier terme de (151). Un bon compromis a été obtenu en utilisant  $\tau = 0.56$ .

La résolution des LMI a permis de trouver les gains  $\begin{bmatrix} K_{1i}(\cdot) \\ K_{2i}(\cdot) \end{bmatrix}, i \in \{1, 2\}$  :

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 134.1 & -90.2 \\ -24.9 & 98.2 \\ 9.7 & -0.5 \\ -2.1 & 7.32 \\ 0.5 & 0.03 \\ 0.9 & -0.9 \\ 0.02 & 0.18 \\ 0.01 & 0.03 \end{bmatrix}, K_{12} = \begin{bmatrix} 49.6 & -27.1 \\ -11.2 & 122.6 \\ 10.7 & -2.7 \\ -1.4 & 0.98 \\ 0.2 & 0.4 \\ 8 & -0.33 \\ 10^{-3} & 0.9 \\ 10^{-4} & -0.21 \end{bmatrix}, K_{21} = \begin{bmatrix} 11.3 & 2.98 \\ -2.9 & 13.2 \\ -0.79 & 0.98 \\ 0.12 & -13.2 \\ 0.92 & 8.02 \\ 0.13 & 0.03 \\ 0.1 & -0.02 \\ -0.11 & 0.021 \end{bmatrix}, K_{22} = \begin{bmatrix} 11.3 & -0.98 \\ -7.98 & 11.78 \\ 0.02 & -0.18 \\ -0.08 & 8.98 \\ 9.09 & 2.23 \\ 2.09 & 9.45 \\ 0.01 & 0.002 \\ 0.9 & 6.11 \end{bmatrix}.$$

Les résultats de simulation de la cascade des PI-observateurs en discret sont illustrés par les figures suivantes.

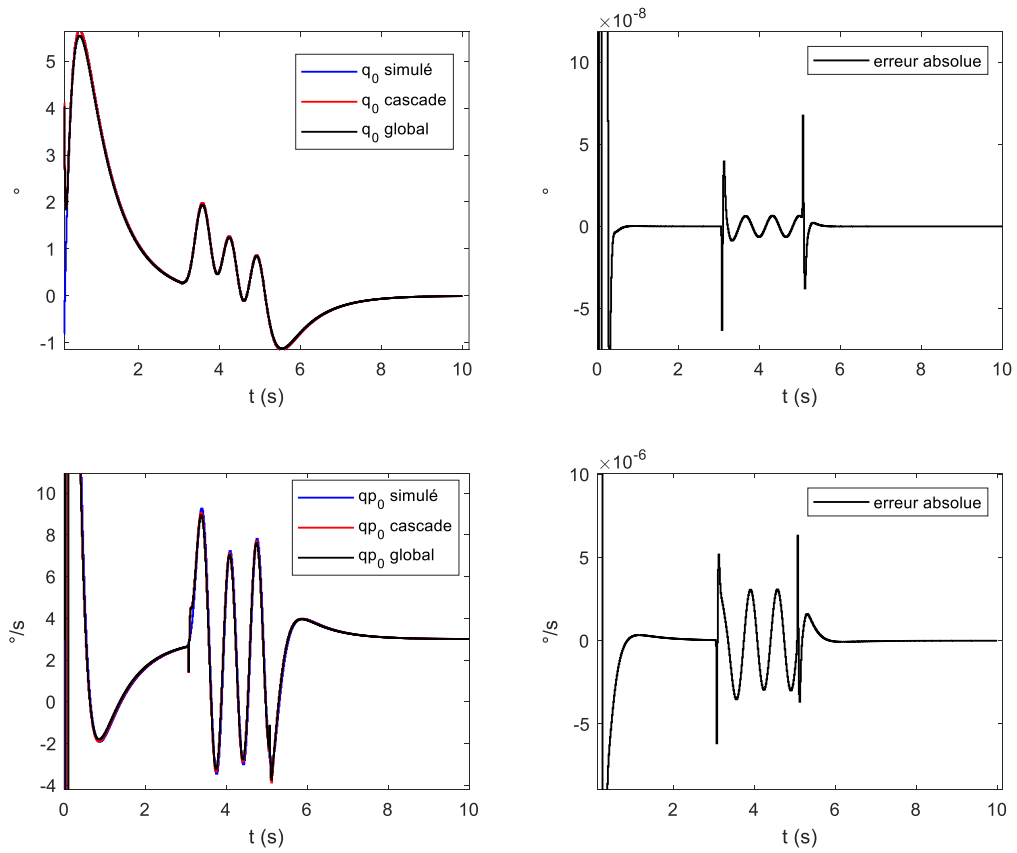
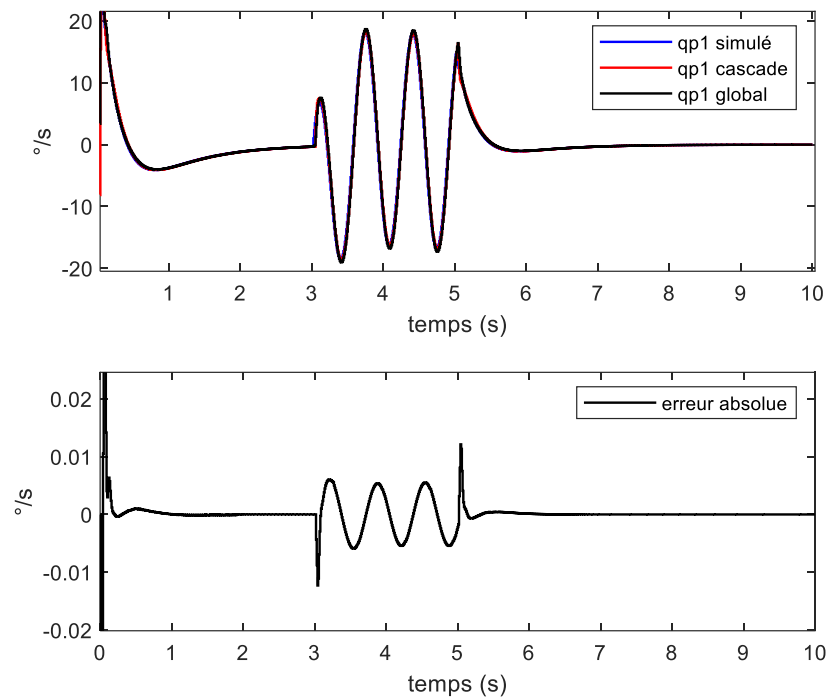
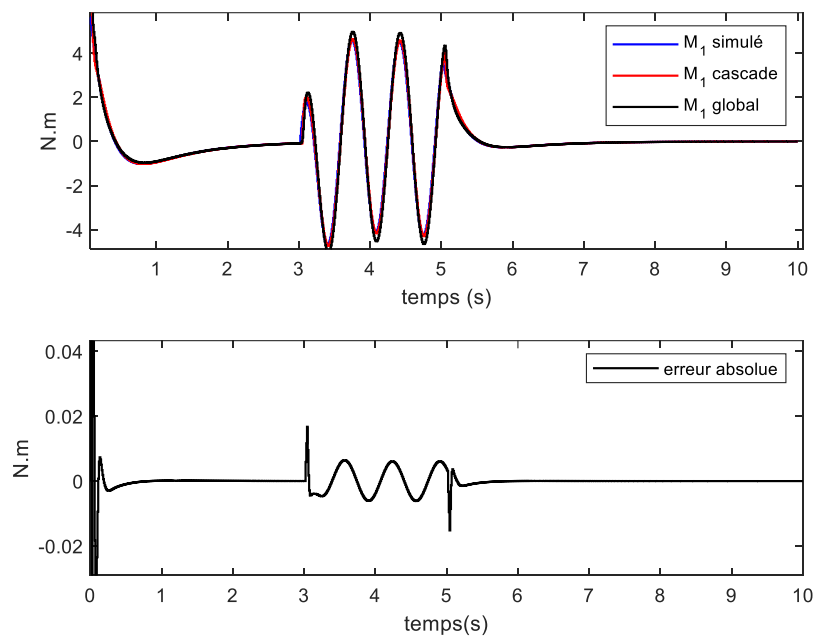


Figure 41: à gauche : angles et vitesses au niveau du tronc, à droite : erreur d'observation



**Figure 42: vitesse estimée au niveau de l'épaule**

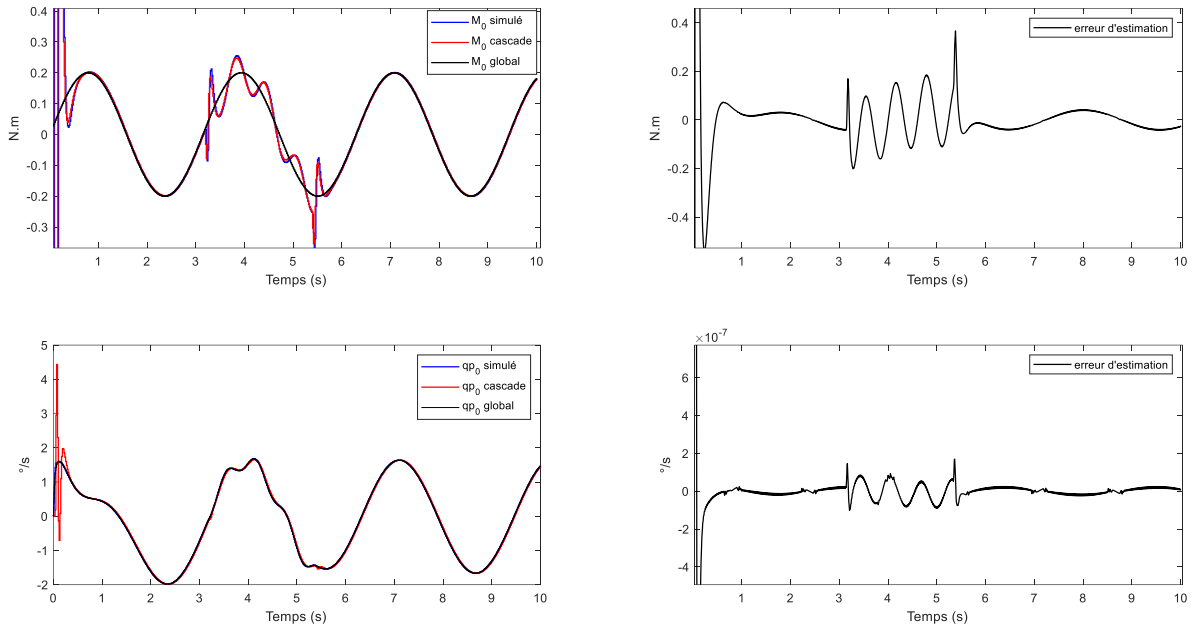


**Figure 43: couple estimé au niveau de l'épaule**

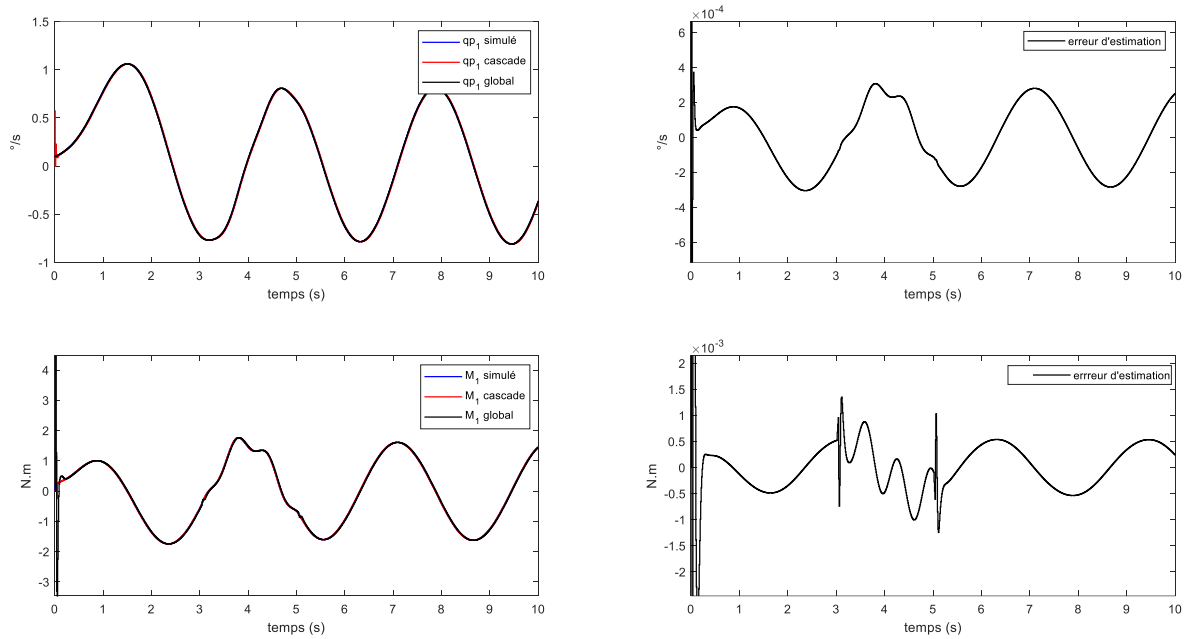
Dans un deuxième exemple de simulation, le couple passif a été assimilé à un signal sinusoïdal d'amplitude 0.2 N.m et de fréquence 2 Hz.

Les résultats de simulation sont affichés sur les figures suivantes pour les vitesses et les couples au niveau du tronc et de l'épaule :





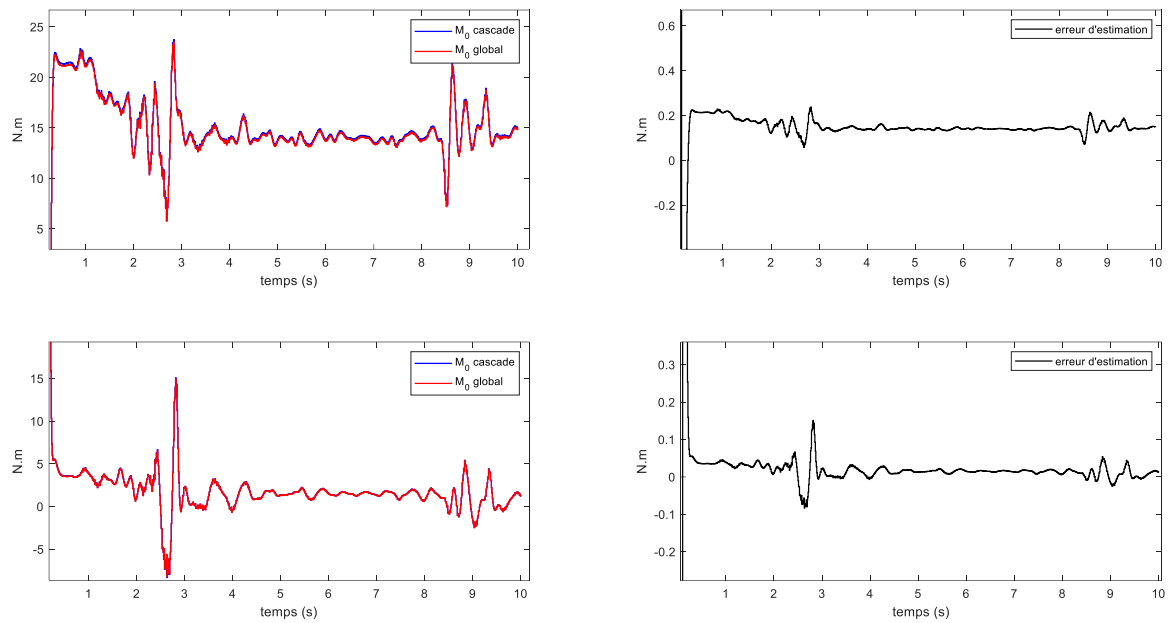
**Figure 44: couple et vitesse du tronc à gauche et erreur d'estimation à droite**



**Figure 45: couple et vitesse de l'épaule à gauche et erreur d'estimation à droite**

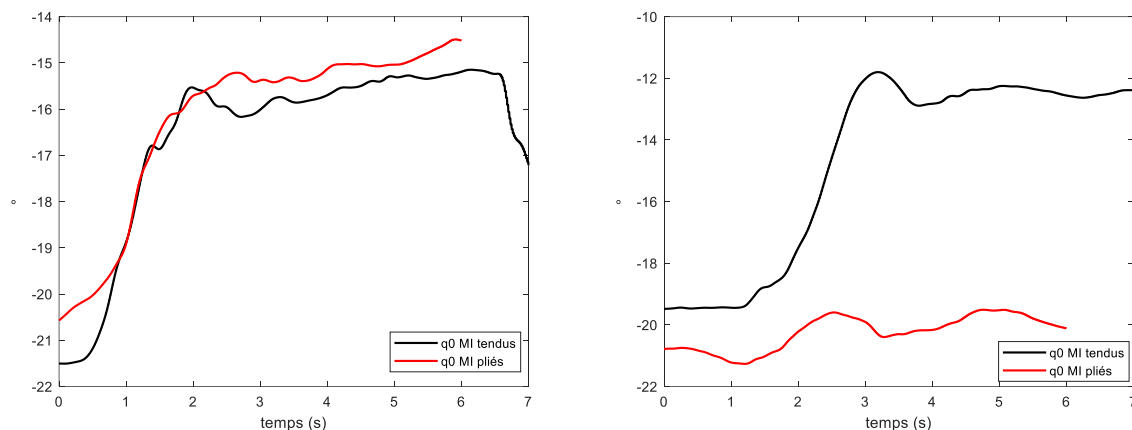
La convergence des états estimés vers les états simulés est atteinte en moins de 0.3 secondes. En simulation et sur l'ensemble des tests réalisés (dont 2 seulement ont été montrés ici) les deux observateurs se comportent de façon très similaire. Globalement pour les couples testés (restant dans des gammes de couples admissibles pour un sujet), l'erreur d'estimation est inférieure à 8%, ce qui démontre une bonne robustesse aux variations des conditions d'essais.

La seconde étape consiste à valider les résultats avec les données issues de la collecte expérimentale. On reprend les 2 mêmes sujets que lors de la précédente validation S239 et S246 qui relèvent des stratégies BM et HF. Les résultats montrent la même adéquation entre les observateurs, ils sont donnés par la figure 46.



**Figure 46: couples lombaires estimés sujet S246 et S239**

Les angles au niveau du tronc pour les mêmes sujets S246 et S239 en fonction des conditions initiales relatives aux membres inférieurs (MI tendus ou MI fléchis) sont donnés par la figure 47 :



**Figure 47: angles  $q_0$  des sujets S246 (à droite) et S239 (à gauche)**

Les courbes des angles au niveau du tronc sont assez similaires pour le sujet S246 malgré le changement des conditions d'essai portant sur la flexion des membres inférieurs tandis que les mêmes angles sont très différents pour le sujet S239, ce résultat est conforme aux stratégies de stabilisation. En effet, le sujet S239 a adopté une stratégie BM pour laquelle des mouvements significatifs des membres supérieurs ont été observés en dessous du niveau des épaules afin de contrer la perturbation tandis que le sujet S246 a adopté une stratégie HF où les membres supérieurs n'ont pas besoin de se déplacer pour contrer la perturbation.

Un angle lombaire négatif signifie que le tronc est positionné avant la verticale pour une position assise avec des membres inférieurs tendus tandis qu'un angle lombaire positif est associé à un tronc en arrière de la verticale pour une position où les membres inférieurs sont pliés. La diminution de l'angle lombaire est naturellement associée à la perturbation qui pousse le sujet dans la direction antérieure. Pour un sujet adoptant la stratégie BM, la trajectoire de l'angle lombaire présente des dépassements

par rapport aux valeurs avant la perturbation. Pour un sujet adoptant la stratégie HF, la trajectoire de l'angle lombaire présente un comportement répétable et proche des sujets asymptomatiques. A l'issue de la perturbation les valeurs des angles lombaires retournent aux valeurs avant l'impact sans créer un dépassement.

On note que le couple lombaire est positif au début de chaque acquisition ce qui est cohérent d'un point de vue biomécanique car l'angle lombaire est négatif au même moment (les angles négatifs correspondent à un mouvement d'extension). Un couple est dit positif s'il fait tourner un segment dans le sens antihoraire et inversement. Suite à la perturbation, le couple diminue et cette diminution est liée à la perturbation qui pousse le sujet dans une direction antérieure ce qui semble équivalent à injecter un couple négatif (respectivement positif) au niveau du tronc (respectivement au niveau de l'épaule) (Blandeau, 2018).

## VI. Conclusion du chapitre 3

Modéliser et estimer est une voie prometteuse pour la compréhension des situations telle que la stabilité assise des personnes lésées médullaires. L'approche globale présentée dans Blandeau (2018) a ouvert cette voie, avec des limitations dues à la complexité des problèmes à résoudre ; dont les solutions sont à la limite de ce que les solveurs sont capables de résoudre aujourd'hui. Aller plus loin nécessite donc de réduire la complexité des problèmes à résoudre, et une décomposition en problèmes locaux a été proposée dans ce chapitre. Une preuve de convergence du système global à partir d'observateurs locaux a été proposée sous certaines hypothèses. Cette approche a été exploitée aussi bien en simulation que dans un contexte clinique. L'approche de la décomposition permet d'envisager de travailler sur des modèles plus complexes avec des degrés de liberté supplémentaires.

Le modèle S3S-2D possède 3 degrés de liberté relatifs aux mouvements des trois segments constituant le modèle (le tronc, le bras et l'avant-bras). Il a permis donc d'exploiter certaines acquisitions issues de la collecte expérimentale où la stratégie de stabilisation adoptée par le sujet a engagé des mouvements symétriques des membres supérieurs dans le plan sagittal (les stratégies HF et BM). Ces premiers résultats encourageants doivent permettre de considérer des modèles plus complexes comme « faisables » ; par exemple en ajoutant des degrés de liberté (bras dissociés, rotations du tronc, etc.). Notamment l'aspect de la cascade d'observation peut permettre une décomposition qui rend possible l'observation de systèmes de taille plus importante. On souligne en particulier les acquisitions réalisées dans un contexte clinique par Blandeau (2018) qui ne sont pas dans les stratégies symétriques HF et BM et qui dès lors pourraient être exploitées.

Ces extensions font l'objet du chapitre suivant.

## **CHAPITRE 4 : LE MODELE T2A-2D**

I. Introduction	117
II. Le modèle T2A-2D	117
III. La stabilisation par retour d'état du modèle T2A-2D	121
IV. Le problème d'observation à entrées inconnues	127
V. La cascade des PI-observateurs du modèle T2A-2D	129
VI. Les essais en simulation et avec des données réelles	132
VII. Conclusion du chapitre 4	139

## I. Introduction

Dans ce chapitre, on propose d'appliquer une extension au modèle S3S-2D décomposé présenté dans le chapitre précédent à travers l'ajout d'un membre supérieur supplémentaire afin de former un nouveau modèle composé de deux membres supérieurs évoluant de manière différente dans le plan sagittal. Ce modèle s'approche au plus de la réalité physiologique du mouvement humain par rapport au S3S-2D qui considère deux bras juxtaposés.

La compatibilité de la nouvelle modélisation caractérisée par des articulations supplémentaires devra être en cohérence avec les capacités de résolution des outils numériques sans toutefois s'éloigner du modèle non linéaire. A l'instar des chapitres précédents, la reconstruction des variables non mesurées s'appuiera sur les observateurs non linéaires et l'analyse des non linéarités via le formalisme T-S.

Au vu de la complexité additionnelle, la technique de décomposition en cascade développée dans le chapitre précédent est reprise car elle permet d'obtenir des problèmes de taille réduite compatibles avec les solveurs actuels.

Dans ce chapitre, on développe un nouveau modèle baptisé T2A-2D (acronyme pour « Trunk-2-Arms ») qui représente une amélioration du modèle S3S-2D décomposé avec une extension des segments. La conception des observateurs locaux sera détaillée dans ce chapitre et on présente également une première estimation des couples non mesurés issus de la collecte expérimentale, en particulier les acquisitions qui ne relèvent pas des stratégies symétriques BM et HF.

## II. Le modèle T2A-2D

A l'instar des modèles précédents, le modèle T2A-2D souligne l'importance de la tête et des membres supérieurs dans l'exercice de la stabilisation (Grangeon et al., 2012 ; Milosevic et al., 2017). Le modèle T2A-2D considère, comme le modèle S3S-2D, que la tête et le tronc sont rigidement liés.

Il s'agit d'un modèle planaire avec 3 systèmes interconnectés et dont la chaîne cinématique est dans le plan  $(x, y)$ . Le modèle T2A possède 5 segments articulés avec une liaison pivot d'axe  $z$  : le tronc, le bras gauche, le coude gauche, le bras droit et le coude droit. Les deux bras sont symétriques par rapport au tronc.

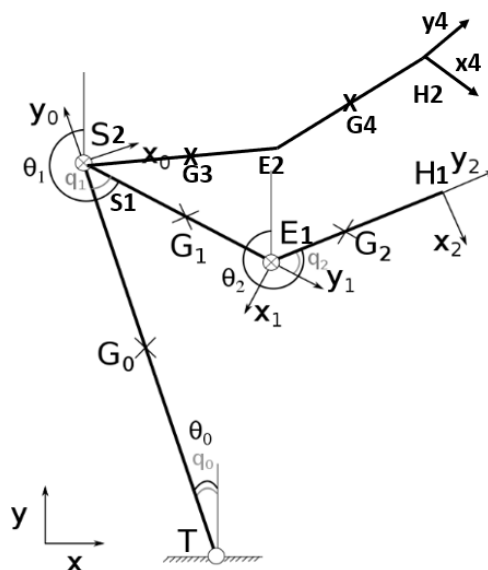


Figure 48: le modèle T2A-2D

Le modèle contient donc au total 5 degrés de liberté relatifs aux mouvements de flexion/extension :

- Au niveau du tronc : l'articulation lombaire  $q_0$
- Au niveau du bras droit : les articulations de l'épaule et du coude droits ( $q_{1R}, q_{2R}$ )
- Au niveau du bras gauche : les articulations de l'épaule et du coude gauches ( $q_{1L}, q_{2L}$ )

Les données de flexion/extension des membres supérieurs (Kapandji, 2005a, 2005b) définissent l'ensemble des mouvements admissibles, en mètre, °, °/s.

$$\Omega_x = \left\{ \begin{array}{ll} -5 \leq q_0 \leq 5 & \|\dot{q}_0\| \leq 29 \\ -20 \leq q_{1R/L} \leq 60, \|\dot{q}_{1R/L}\| \leq 57 & \\ -10 \leq q_{2R/L} \leq 45 & \|\dot{q}_{2R/L}\| \leq 57 \end{array} \right\} \quad (154)$$

Le modèle T2A-2D est composé de 3 systèmes dynamiques interconnectés (figure 49) par deux systèmes statiques de couplage :

Les systèmes locaux	Les entrées du système local	Les sorties du système local
Le système tronc $\Sigma_T$	Le couple du tronc $\Gamma_0$ et le couple de couplage $\Gamma_c$ .	L'angle, la vitesse et l'accélération du tronc : $\theta_0, \dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0$ .
Le système bras droit $\Sigma_{AR}$	Les couples de l'épaule du coude droits ( $\Gamma_{1R}, \Gamma_{2R}$ ), l'angle, la vitesse et l'accélération du tronc : $\theta_0, \dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0$ .	L'angle, la vitesse et l'accélération de l'épaule et du coude droits $\theta_{iR}, \dot{\theta}_{iR}, \ddot{\theta}_{iR}, i \in \{1, 2\}$ .
Le système de liaison droit $\Gamma_{cR}$	L'angle, la vitesse et l'accélération de l'épaule et du coude droits $\theta_{iR}, \dot{\theta}_{iR}, \ddot{\theta}_{iR}, i \in \{1, 2\}$ . Le couple de l'épaule droit $\Gamma_{1R}$ .	Le couple de couplage droit $\Gamma_{cR} = f(\cdot)$ .
Le système bras gauche $\Sigma_{AL}$	Les couples de l'épaule et du coude droits ( $\Gamma_{1L}, \Gamma_{2L}$ ), l'angle, la vitesse et l'accélération du tronc $\theta_0, \dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0$ .	L'angle, la vitesse et l'accélération de l'épaule et du coude gauches $\theta_{iL}, \dot{\theta}_{iL}, \ddot{\theta}_{iL}, i \in \{1, 2\}$ .
Le système de liaison gauche $\Gamma_{cL}$	L'angle, la vitesse et l'accélération de l'épaule et du coude gauches $\theta_{iL}, \dot{\theta}_{iL}, \ddot{\theta}_{iL}, i \in \{1, 2\}$ . Le couple de l'épaule gauche $\Gamma_{1L}$ .	Le couple de couplage gauche $\Gamma_{cL} = f(\cdot)$ .

Tableau 5: les entrées et les sorties des systèmes du modèle T2A-2D

L'acronyme "T" désigne le tronc, "AR" le bras droit et "AL" le bras gauche.

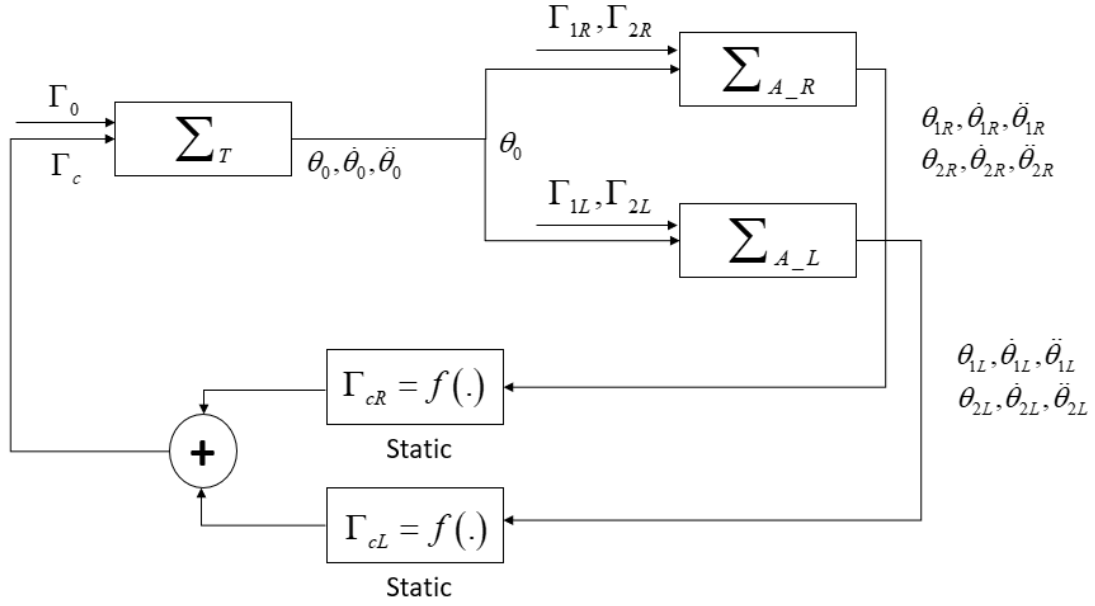


Figure 49: les systèmes du modèle T2A-2D

On note que le couple de couplage résultant  $\Gamma_c = f(\cdot)$  à l'entrée du système Tronc est égal à la somme des couples de couplage droit et gauche :  $\Gamma_c = \Gamma_{cL} + \Gamma_{cR}$ .

Les constantes inertielles et géométriques du système bras droit sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= I_{G0} + m_0 a_0^2 + m_{\Xi} l_0^2, & p_2 &= (m_0 a_0 + m_{\Xi} l_0) g, & p_{3R} &= I_{G1R} + m_{1R} a_{1R}^2 + m_{2R} l_{1R}^2 \\
 p_{4R} &= m_{2R} a_{2R} l_{1R}, & p_{5R} &= I_{G2R} + m_{2R} a_{2R}^2, & p_{6R} &= (-m_{1R} b_{1R} + (m_{1R} + m_{2R}) l_{1R}) g, & p_{7R} &= m_{2R} a_{2R} g \\
 p_{8R} &= m_{1R} a_{1R} l_0 + m_{2R} l_0 l_{1R}, & p_{9R} &= m_{2R} a_{2R} l_0, & p_{10R} &= m_{1R} a_{1R} + m_{2R} l_{1R}
 \end{aligned}$$

Les constantes inertielles et géométriques du système bras gauche sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= I_{G0} + m_0 a_0^2 + m_{\Xi} l_0^2, & p_2 &= (m_0 a_0 + m_{\Xi} l_0) g, & p_{3L} &= I_{G1L} + m_{1L} a_{1L}^2 + m_{2L} l_{1L}^2 \\
 p_{4L} &= m_{2L} a_{2L} l_{1L}, & p_{5L} &= I_{G2L} + m_{2L} a_{2L}^2, & p_{6L} &= (-m_{1L} b_{1L} + (m_{1L} + m_{2L}) l_{1L}) g, & p_{7L} &= m_{2L} a_{2L} g \\
 p_{8L} &= m_{1L} a_{1L} l_0 + m_{2L} l_0 l_{1L}, & p_{9L} &= m_{2L} a_{2L} l_0, & p_{10L} &= m_{1L} a_{1L} + m_{2L} l_{1L}
 \end{aligned}$$

Avec  $m_{\Xi} = m_{1R} + m_{2R} + m_{1L} + m_{2L}$ , la masse totale des bras et des avant-bras.

Le système tronc  $\Sigma_T$  est donné par l'équation suivante :

$$p_1 \ddot{\theta}_0 = p_2 \sin(\theta_0) + \Gamma_c + \Gamma_0 \quad (155)$$

Le système bras droit  $\Sigma_{AR}$  est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{3R} & p_{4R} \cos(q_{2R}) \\ 0 & 0 & p_{4R} \cos(q_{2R}) & p_{5R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1R} \\ \dot{\theta}_{2R} \\ \ddot{\theta}_{1R} \\ \ddot{\theta}_{2R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{2R} \\ 0 & 0 & -p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{1R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1R} \\ \theta_{2R} \\ \dot{\theta}_{1R} \\ \dot{\theta}_{2R} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{1R} \\ \Gamma_{2R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{6R} \sin(\theta_{1R}) \\ p_{7R} \sin(\theta_{2R}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ p_{8R} \sin(q_{1R}) & p_{8R} \cos(q_{1R}) \\ p_{9R} \sin(q_{1R} + q_{2R}) & p_{9R} \cos(q_{1R} + q_{2R}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{156}$$

Le système bras gauche  $\Sigma_{AL}$  est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{3L} & p_{4L} \cos(q_{2L}) \\ 0 & 0 & p_{4L} \cos(q_{2L}) & p_{5L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1L} \\ \dot{\theta}_{2L} \\ \ddot{\theta}_{1L} \\ \ddot{\theta}_{2L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_{4L} \sin(q_{2L}) \dot{\theta}_{2L} \\ 0 & 0 & -p_{4L} \sin(q_{2L}) \dot{\theta}_{1L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1L} \\ \theta_{2L} \\ \dot{\theta}_{1L} \\ \dot{\theta}_{2L} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{1L} \\ \Gamma_{2L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{6L} \sin(\theta_{1L}) \\ p_{7L} \sin(\theta_{2L}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ p_{8L} \sin(q_{1L}) & p_{8L} \cos(q_{1L}) \\ p_{9L} \sin(q_{1L} + q_{2L}) & p_{9L} \cos(q_{1L} + q_{2L}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{157}$$

Le terme de couplage droit est donné par :

$$\Gamma_{cR} = \begin{bmatrix} -p_{10R} \sin(q_{1R}) \dot{\theta}_{1R} & -p_{9R} \sin(q_{1R} + q_{2R}) \dot{\theta}_{2R} & p_{10R} \cos(q_{1R}) & p_{9R} \cos(q_{1R} + q_{2R}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1R} \\ \dot{\theta}_{2R} \\ \ddot{\theta}_{1R} \\ \ddot{\theta}_{2R} \end{bmatrix} - \Gamma_{1R} \tag{158}$$

Le terme de couplage gauche est donné par :

$$\Gamma_{cL} = \begin{bmatrix} -p_{10L} \sin(q_{1L}) \dot{\theta}_{1L} & -p_{9L} \sin(q_{1L} + q_{2L}) \dot{\theta}_{2L} & p_{10L} \cos(q_{1L}) & p_{9L} \cos(q_{1L} + q_{2L}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1L} \\ \dot{\theta}_{2L} \\ \ddot{\theta}_{1L} \\ \ddot{\theta}_{2L} \end{bmatrix} - \Gamma_{1L} \tag{159}$$

Le modèle T2A-2D reste évidemment instable en boucle ouverte et pour permettre de réaliser des simulations, il doit être stabilisé avant la conception des observateurs locaux. La loi de contrôle ne considère que les couples actifs aux niveaux des épaules et des coudes pour se « rapprocher » des mouvements effectués par une personne lésée médullaire.



### III. La stabilisation par retour d'état du modèle T2A-2D

La conception de la loi de contrôle repose sur la détermination du vecteur des entrées  $u = [\Gamma_0 \quad \Gamma_{1R} \quad \Gamma_{2R} \quad \Gamma_{1L} \quad \Gamma_{2L}]$  sachant que la contribution du tronc est passive.

Il convient donc d'analyser le modèle dans son ensemble en considérant l'état global du système recomposé :  $\dot{x} = [\theta_0 \quad \theta_{1R} \quad \theta_{2R} \quad \theta_{1L} \quad \theta_{2L} \quad \dot{\theta}_0 \quad \dot{\theta}_{1R} \quad \dot{\theta}_{2R} \quad \dot{\theta}_{1L} \quad \dot{\theta}_{2L}]^T$

Le but est de réécrire le modèle décomposé selon une équation d'état sous forme descripteur :

$$E(q)\dot{x} = A(x)x + Bu \quad (160)$$

On note :  $q_{12R} = q_{1R} + q_{2R}$ ,  $q_{12L} = q_{1L} + q_{2L}$ . La première étape consiste à réécrire les termes de couplage :

$$\Gamma_{c_R} = -p_{10R} \sin(q_{1R}) \dot{\theta}_{1R}^2 - p_{9R} \sin(q_{12R}) \dot{\theta}_{2R}^2 + p_{10R} \cos(q_{1R}) \ddot{\theta}_{1R} + p_{9R} \cos(q_{12R}) \ddot{\theta}_{2R} - \Gamma_{1R} \quad (161)$$

$$\Gamma_{c_L} = -p_{10L} \sin(q_{1L}) \dot{\theta}_{1L}^2 - p_{9L} \sin(q_{12L}) \dot{\theta}_{2L}^2 + p_{10L} \cos(q_{1L}) \ddot{\theta}_{1L} + p_{9L} \cos(q_{12L}) \ddot{\theta}_{2L} - \Gamma_{1L} \quad (162)$$

Le système tronc  $\Sigma_T$  s'écrit sous forme de :

$$p_1 \ddot{\theta}_0 = p_2 \sin(\theta_0) + \Gamma_c + \Gamma_0 \quad (163)$$

Munie de deux équations de couplage (161) et (162), le système tronc s'écrit donc :

$$p_1 \ddot{\theta}_0 = p_{2R} \sin(\theta_0) - p_{10R} \sin(q_{1R}) \dot{\theta}_{1R}^2 - p_{9R} \sin(q_{12R}) \dot{\theta}_{2R}^2 + p_{10R} \cos(q_{1R}) \ddot{\theta}_{1R} + p_{9R} \cos(q_{12R}) \ddot{\theta}_{2R} - \Gamma_{1R} - p_{10L} \sin(q_{1L}) \dot{\theta}_{1L}^2 - p_{9L} \sin(q_{12L}) \dot{\theta}_{2L}^2 + p_{10L} \cos(q_{1L}) \ddot{\theta}_{1L} + p_{9L} \cos(q_{12L}) \ddot{\theta}_{2L} - \Gamma_{1L} + \Gamma_0 \quad (164)$$

Concernant le système bras droit :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{3R} & p_{4R} \cos(q_{2R}) \\ 0 & 0 & p_{4R} \cos(q_{2R}) & p_{5R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1R} \\ \dot{\theta}_{2R} \\ \ddot{\theta}_{1R} \\ \ddot{\theta}_{2R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{2R} \\ 0 & 0 & -p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{1R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1R} \\ \theta_{2R} \\ \dot{\theta}_{1R} \\ \dot{\theta}_{2R} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{1R} \\ \Gamma_{2R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{6R} \sin(\theta_{1R}) \\ p_{7R} \sin(\theta_{2R}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{8R} \sin(q_{1R}) & p_{8R} \cos(q_{1R}) \\ p_{9R} \sin(q_{12R}) & p_{9R} \cos(q_{12R}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (165)$$

On a :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{6R} \sin(\theta_{1R}) \\ p_{7R} \sin(\theta_{2R}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{6R} \sin(\theta_{1R}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{7R} \sin(\theta_{2R}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1R} \\ \theta_{2R} \\ \dot{\theta}_{1R} \\ \dot{\theta}_{2R} \end{bmatrix} \quad (166)$$

L'équation du bras droit devient donc :

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & E_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_{1R} \\ \dot{\theta}_{2R} \\ \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_{1R} \\ \ddot{\theta}_{2R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ A_{R1} & A_{R2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_{1R} \\ \theta_{2R} \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_{1R} \\ \dot{\theta}_{2R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{1R} \\ \Gamma_{2R} \end{bmatrix} \quad (167)$$

Avec :

$$E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{8R} \cos(q_{1R}) & p_{3R} & p_{4R} \cos(q_{2R}) \\ -p_{9R} \cos(q_{12R}) & p_{4R} \cos(q_{2R}) & p_{5R} \end{bmatrix}, A_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{6R} \sin c(\theta_{1R}) & 0 \\ 0 & 0 & p_{7R} \sin c(\theta_{2R}) \end{bmatrix}$$

$$A_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{8R} \dot{\theta}_0 \sin(q_{1R}) & 0 & p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{2R} \\ p_{9R} \dot{\theta}_0 \sin(q_{12R}) & -p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{1R} & 0 \end{bmatrix}$$

En introduisant l'équation du tronc, l'équation du système bras droit devient :

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & E_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_{1R} \\ \dot{\theta}_{2R} \\ \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_{1R} \\ \ddot{\theta}_{2R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ A_{11R} & A_{12R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_{1R} \\ \theta_{2R} \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_{1R} \\ \dot{\theta}_{2R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_{1R} \\ \Gamma_{2R} \end{bmatrix} \quad (168)$$

Avec

$$E_R = \begin{bmatrix} p_1 & -p_{10R} \cos(q_{1R}) & -p_{9R} \cos(q_{12R}) \\ -p_{8R} \cos(q_{1R}) & p_{3R} & p_{4R} \cos(q_{2R}) \\ -p_{9R} \cos(q_{12R}) & p_{4R} \cos(q_{2R}) & p_{5R} \end{bmatrix}, A_{11R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{6R} \sin c(\theta_{1R}) & 0 \\ 0 & 0 & p_{7R} \sin c(\theta_{2R}) \end{bmatrix}$$

$$A_{12R} = \begin{bmatrix} 0 & -p_{10R} \sin(q_{1R}) \dot{\theta}_{1R} & -p_{9R} \sin(q_{12R}) \dot{\theta}_{2R} \\ p_{8R} \dot{\theta}_0 \sin(q_{1R}) & 0 & p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{2R} \\ p_{9R} \dot{\theta}_0 \sin(q_{12R}) & -p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{1R} & 0 \end{bmatrix}$$

On refait la même opération pour le système bras gauche, on obtient finalement l'équation du système global :

$$\begin{bmatrix} I_5 & 0_5 \\ 0_5 & E(q) \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0_5 & I_5 \\ A_1(q) & A_2(x) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0_5 \\ B_0 \end{bmatrix} u \quad (169)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
E(q) &= \begin{bmatrix} p_1 & -p_{10R} \cos(q_{1R}) & -p_{9R} \cos(q_{12R}) & -p_{10L} \cos(q_{1L}) & -p_{9L} \cos(q_{12L}) \\ -p_{8R} \cos(q_{1R}) & p_{3R} & p_{4R} \cos(q_{2R}) & 0 & 0 \\ -p_{9R} \cos(q_{12R}) & p_{4R} \cos(q_{2R}) & p_{5R} & 0 & 0 \\ -p_{8L} \cos(q_{1L}) & 0 & 0 & p_{3L} & p_{4L} \cos(q_{2L}) \\ -p_{9L} \cos(q_{12L}) & 0 & 0 & p_{4L} \cos(q_{2L}) & p_{5L} \end{bmatrix} \\
A_1(q) &= \begin{bmatrix} p_2 \sin c(\theta_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{6R} \sin c(\theta_{1R}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{7R} \sin c(\theta_{2R}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{6L} \sin c(\theta_{1L}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{7L} \sin c(\theta_{2L}) \end{bmatrix} \\
A_2(x) &= \begin{bmatrix} 0 & -p_{10R} \sin(q_{1R}) \dot{\theta}_{1R} & -p_{9R} \sin(q_{12R}) \dot{\theta}_{2R} & -p_{10L} \sin(q_{1L}) \dot{\theta}_{1L} & -p_{9L} \sin(q_{12L}) \dot{\theta}_{2L} \\ p_{8R} \dot{\theta}_0 \sin(q_{1R}) & 0 & p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{2R} & 0 & 0 \\ p_{9R} \dot{\theta}_0 \sin(q_{12R}) & -p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{1R} & 0 & 0 & 0 \\ p_{8L} \dot{\theta}_0 \sin(q_{1L}) & 0 & 0 & 0 & p_4 \sin(q_{2L}) \dot{\theta}_{2L} \\ p_{9L} \dot{\theta}_0 \sin(q_{12L}) & 0 & 0 & -p_{4L} \sin(q_{2L}) \dot{\theta}_{1L} & 0 \end{bmatrix} \\
B_0 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Si on considère une personne sans lésion médullaire (tous les couples sont actifs), contrôler le modèle (169) revient à déterminer les 5 entrées relatives aux 5 articulations définies.

On note :  $E^e(q) = \begin{bmatrix} I_5 & 0_5 \\ 0_5 & E(q) \end{bmatrix}$ ,  $A^e(q, x) = \begin{bmatrix} 0_5 & I_5 \\ A_1(q) & A_2(x) \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0_5 \\ B_0 \end{bmatrix}$ , (169) devient donc :

$$E^e(q) \dot{x} = A^e(q, x)x + Bu \quad (170)$$

La discrétisation de (170) selon le principe d'Euler avec  $\dot{x} = s^{-1}(x^+ - x_k)$  donne :

$$E^e(q)x^+ = (sA^e(q, x) + E^e(q))x_k + sBu \quad (171)$$

Comme  $\exists (E^e(q_k))^{-1} \forall q_k$  donc  $(E^e(q))^{-1} = \begin{bmatrix} I_5 & 0_5 \\ 0_5 & E(q) \end{bmatrix}^{-1} = E^{-1}(q) \begin{bmatrix} E(q) & 0_5 \\ 0_5 & I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_5 & 0_5 \\ 0_5 & E^{-1}(q) \end{bmatrix}$

$$x^+ = (E^e(q))^{-1} (sA^e(q, x) + E^e(q))x_k + s(E^e(q))^{-1} Bu \quad (172)$$

$$x^+ = \begin{bmatrix} I_5 & 0_5 \\ 0_5 & E^{-1}(q) \end{bmatrix} \left( s \begin{bmatrix} 0_5 & I_5 \\ A_1(q) & A_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_5 & 0_5 \\ 0_5 & E(q) \end{bmatrix} \right) x_k + s \begin{bmatrix} I_5 & 0_5 \\ 0_5 & E^{-1}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_5 \\ B_0 \end{bmatrix} u \quad (173)$$

$$x^+ = \begin{bmatrix} I_5 & 0_5 \\ 0_5 & E^{-1}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_5 & sI_5 \\ sA_1(q) & sA_2(x) + E(q) \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0_5 \\ E^{-1}(q)B_0 \end{bmatrix} u \quad (174)$$

$$x^+ = \begin{bmatrix} I_5 & sI_5 \\ sE^{-1}(q)A_1(q) & I_5 + sE^{-1}(q)A_2(x) \end{bmatrix} x_k + s \begin{bmatrix} 0_5 \\ E^{-1}(q)B_0 \end{bmatrix} u \quad (175)$$

A partir de (175), on peut utiliser une loi de commande non linéaire par retour d'état :

$$u = -s^{-1}B_0^{-1} \begin{bmatrix} E(q)L_1 + sA_1(q) & E(q)L_2 + sA_2(q) + E(q) \end{bmatrix} x_k \quad (176)$$

(176) et (175) permettent de linéariser le modèle en boucle fermée :

$$x^+ = \begin{bmatrix} I_5 & sI_5 \\ -L_1 & -L_2 \end{bmatrix} x_k \quad (177)$$

Il suffit donc de positionner les gains  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  afin d'assurer la stabilité de la boucle fermée. Toute technique linéaire peut être utilisée, une synthèse LQ par exemple, pour stabiliser et rendre performant le modèle (177).

Si on considère une déficience moteur où le tronc n'est pas (ou peu) mobilisable, le problème devient sous-actionné et le tronc ayant une participation passive. Dans ce cas-là le contrôle du modèle ne concernera que les articulations actives à savoir les épaules et les coudes. A l'instar du modèle S3S-2D, on utilise une loi de commande partiellement linéarisante :

$$u = u_{cancel} + u_l \quad (178)$$

$$u_{cancel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(q) & A_2(x) + s^{-1}E(q) \end{bmatrix} x_k \quad (179)$$

$$u_l = s^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1(x) & L_2(x) \end{bmatrix} x_k \quad (180)$$

La partie  $u_{cancel}$  linéarise les deux dernières lignes de la boucle ouverte et la partie  $u_l$  représente la commande aux articulations actives (épaules et coudes). La partie linéarisante pilote le modèle via le gain  $L(x) = \begin{bmatrix} L_1(x) & L_2(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 10}$ .

Le modèle en boucle fermée s'écrit donc :

$$E(q)x^+ (\Sigma(x) - \Gamma \times L(x))x \quad (181)$$

$$\text{Avec : } L(x) \in \mathbb{R}^{4 \times 10}, \Sigma(x) = \begin{bmatrix} I_5 & sI_5 \\ [sA_1(q)]_1 & [sA_2(x) + E(q)]_1 \\ 0_{4 \times 5} & 0_{4 \times 5} \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 4} \\ I_4 \end{bmatrix}.$$

La notation  $[A]_i$  correspond à la ligne  $i$  de la matrice  $A$ . Il s'agit donc d'une extension directe de la commande pour le modèle S3S-2D comprenant des non linéarités supplémentaires (correspondant au segment additionnel). Le modèle contrôlé (181) comprend 11 non linéarités distribuées comme suit :

- 6 dans la matrice  $[E(q)]_1 : \cos(q_{1R}), \cos(q_{2R}), \cos(q_{12R}), \cos(q_{1L}), \cos(q_{2L}), \cos(q_{12L})$
- 1 dans la matrice  $[A_1(q)]_1 : \frac{\sin(q_0)}{q_0}$
- 4 dans la matrice  $[A_2(q)]_1 : \sin(q_{1R})\dot{\theta}_{1R}, \sin(q_{12R})\dot{\theta}_{2R}, \sin(q_{1L})\dot{\theta}_{1L}, \sin(q_{12L})\dot{\theta}_{12L}.$

(181) ayant la même forme que (39) pour le modèle S3S-2D, le problème LMI obtenu est strictement équivalent, pour rappel il s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -G_{z-} - G_{z-}^T + P_{z-} & (*) & (*) \\ \Sigma_z G_{z-} - \Gamma K_{zz-} & -E_z R_{z-} - (*) & (*) \\ 0 & R_{z-} & -P_z \end{bmatrix} < 0 \quad (182)$$

Le problème (182) est naturellement infaisable directement avec 11 non linéarités. A l'instar du modèle S3S-2D, les mêmes techniques de réduction du nombre des non linéarités sont utilisées.

La première méthode de réduction des non linéarités consiste à remplacer une partie de la matrice  $[A_2(q)]_1$  par des incertitudes en utilisant la notation classique de la base vectorielle :

$$e_i^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}_{i^{th} \text{ position}} \quad (183)$$

$$\Delta \Sigma(x) = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & 0_{5 \times 5} \\ 0_{3 \times 5} & [A_2(x)]_1 \\ 0_{4 \times 5} & 0_{4 \times 5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_4 & e_4 & e_4 & e_4 & e_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{13}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{14}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{bmatrix}^T \quad (184)$$

On réécrit les termes  $a_{1i}(x), i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  de façon usuelle, avec  $|\delta_i(x)| < 1$  :

$$\Delta \Sigma(x) = H \delta(x) F \quad (185)$$

$$\text{Avec : } F = \begin{bmatrix} f_1 e_4^T & f_2 e_5^T & f_3 e_6^T & f_4 e_7^T & f_5 e_8^T \end{bmatrix}^T, \quad H = \begin{bmatrix} e_4 & e_4 & e_4 & e_4 & e_4 \end{bmatrix}$$

Et les LMI sont alors données par (49) rappelée ici :

$$\begin{bmatrix} -G_{z-} - G_{z-}^T + P_{z-} & (*) & (*) & 0 & 0 \\ sFG_{z-} & -s\mu I & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_z G_{z-} - \Gamma K_{zz-} & 0 & -E_z R_{z-} - R_{z-}^T E_z^T & (*) & (*) \\ 0 & 0 & s\mu H^T & -s\mu I & 0 \\ 0 & 0 & R_{z-} & 0 & -P_{z-} \end{bmatrix} < 0 \quad (186)$$

La première méthode de réduction du nombre des non linéarités a permis de réduire le nombre des non linéarités de 11 à 7 :

- 6 dans la matrice  $[E(q)]_1 : \cos(q_{1R}), \cos(q_{2R}), \cos(q_{12R}), \cos(q_{1L}), \cos(q_{2L}), \cos(q_{12L})$
- 1 dans la matrice  $[A_1(q)]_1 : \frac{\sin(q_0)}{q_0}$

En utilisant la similarité des non linéarités  $\frac{\sin(q_0)}{q_0}$  et  $\cos(q_0)$  (voir paragraphe III.2.4, équation (56))

Ainsi, en combinant les deux méthodes de réduction on obtient le problème final composé de 7 non linéarités mesurables :

- 6 dans la matrice  $[E(q)]_1 : \cos(q_{1R}), \cos(q_{2R}), \cos(q_{12R}), \cos(q_{1L}), \cos(q_{2L}), \cos(q_{12L})$
- 1 dans la matrice  $[A_1(q)]_1 : \cos(q_0)$ .

Un test de simulation est réalisé pour stabiliser le modèle non linéaire T2A-2D par la loi de commande définie en (178). Une perturbation sinusoïdale est appliquée à la vitesse angulaire du tronc afin d'évaluer la robustesse de la loi de contrôle. On distingue deux cas de figures :

- Cas 1 : Les paramètres inertiels et géométriques des deux bras sont identiques
- Cas 2 : Les paramètres inertiels et géométriques des deux bras ne sont pas identiques, par exemple la masse du bras gauche est de 10% supérieure à celle du bras droit.

Les angles  $(q_{1R}, q_{1L})$  des épaules et les couples  $(M_{1R}, M_{2R}, M_{1L}, M_{2L})$  des épaules et des coudes sont donnés par les figures 50, 51 et 52 dans les deux cas :

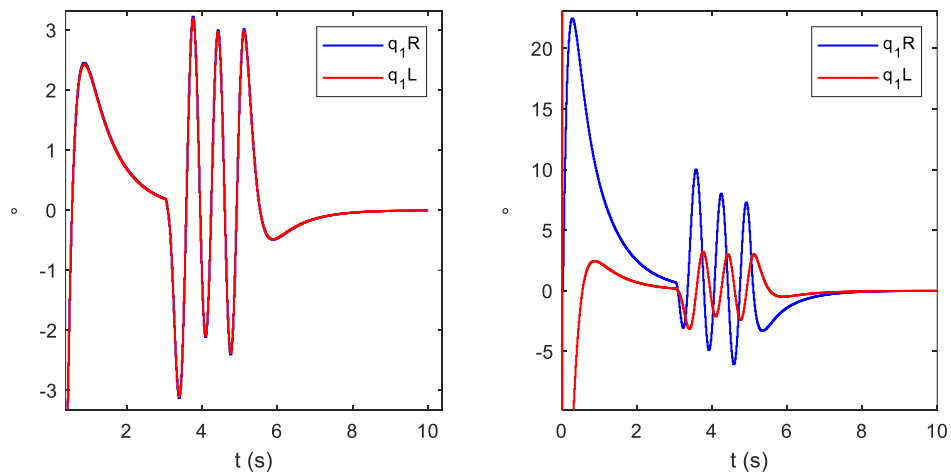


Figure 50: angles des épaules cas 1 (à gauche) et cas 2 (à droite)

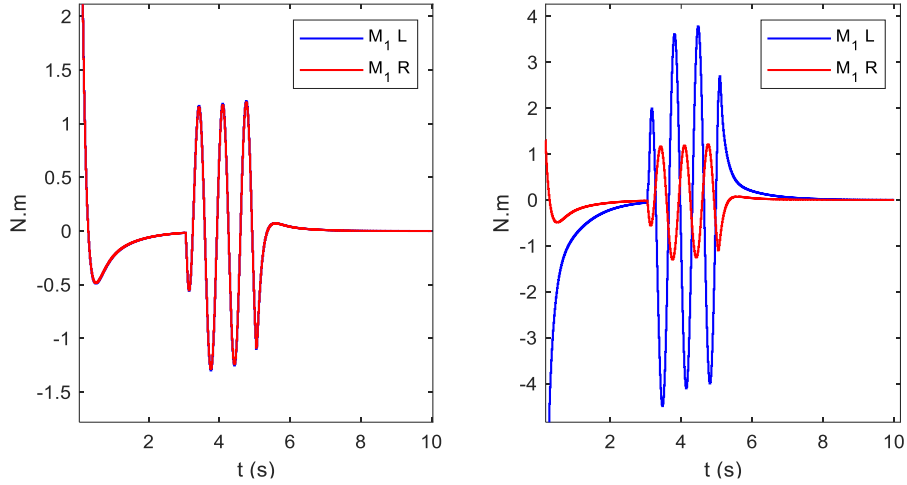


Figure 51: couples des épaules cas 1 (à gauche) et cas 2 (à droite)

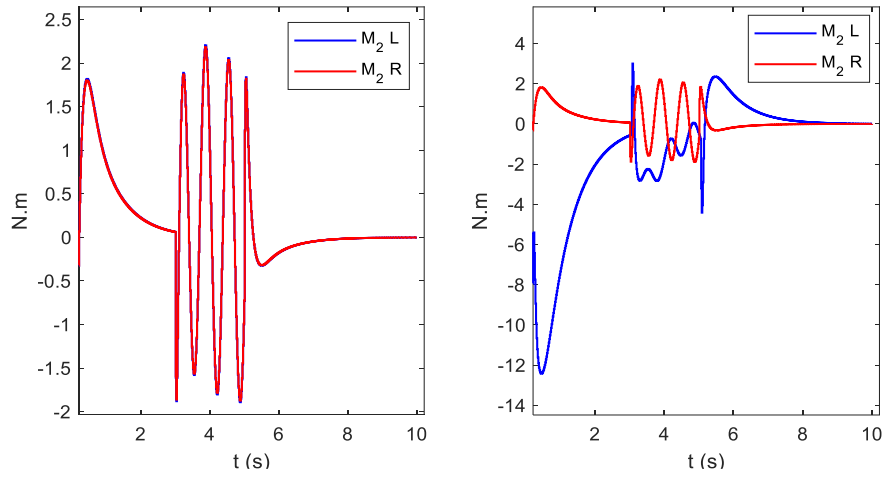


Figure 52: couples des coudes cas 1 (à gauche) et cas 2 (à droite)

Le cas 1 étant parfaitement symétrique, on retrouve évidemment le cas du modèle S3S-2D où les deux membres supérieurs se juxtaposent et suivent donc le même mouvement. Dans le deuxième cas, la masse et l'inertie du bras gauche étant modifiées les différences de mouvement apparaissent.

#### IV. Le problème d'observation à entrées inconnues

A l'instar du modèle S3S-2D décomposé une cascade de double intégrateur  $\ddot{\Gamma}_k \approx 0, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  est utilisé dans le but de reconstruire les couples non mesurés. Ainsi, les 5 systèmes composant le modèle T2A-2D sont réécrits sous forme étendue. Le système tronç étendu s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \dot{\Omega}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \Omega_T \end{bmatrix}, \Omega_T = \begin{bmatrix} \Gamma_U \\ \dot{\Gamma}_U \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (187)$$

Pour le modèle bras droit  $\Sigma_{AR}$  étendu, en définissant  $J_{2R} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Omega_{AR} = [\Gamma_{1R} \quad \dot{\Gamma}_{1R} \quad \Gamma_{2R} \quad \dot{\Gamma}_{2R}]^T$ .

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} E_{AR}(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{AR} \\ \dot{\Omega}_{AR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{AR}(x_{AR}) & B_{AR} \\ 0 & J_{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{AR} \\ \Omega_{AR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \\ y_{AR} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{AR} \\ \Omega_{AR} \end{bmatrix} = \theta_{AR} = \begin{bmatrix} \theta_{1R} \\ \theta_{2R} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (188)$$

$$A_{AR}(x_{AR}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{2R} \\ -p_{4R} \sin(q_{2R}) \dot{\theta}_{1R} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, B_{AR} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{AR}(\theta_{2R}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} p_{3R} & p_{4R} \cos(q_{2R}) \\ p_{4R} \cos(q_{2R}) & p_{5R} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Le système bras gauche  $\Sigma_{AL}$  étendu, en définissant  $J_{2L} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Omega_{AL} = [\Gamma_{1L} \quad \dot{\Gamma}_{1L} \quad \Gamma_{2L} \quad \dot{\Gamma}_{2L}]^T$  et

$$x_{AL} = [\theta_{1L} \quad \theta_{2L} \quad \dot{\theta}_{1L} \quad \dot{\theta}_{2L}]^T :$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} E_{AL}(\theta_{2L}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{AL} \\ \dot{\Omega}_{AL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{AL}(x_{AL}) & B_{AL} \\ 0 & J_{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{AL} \\ \Omega_{AL} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \\ y_{AL} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{AL} \\ \Omega_{AL} \end{bmatrix} = \theta_{AL} = \begin{bmatrix} \theta_{1L} \\ \theta_{2L} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (189)$$

$$A_{AL}(x_{AL}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & p_{4L} \sin(q_{2L}) \dot{\theta}_{2L} \\ -p_{4L} \sin(q_{2L}) \dot{\theta}_{1L} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, B_{AL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{AL}(\theta_{2L}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} p_{3L} & p_{4L} \cos(q_{2L}) \\ p_{4L} \cos(q_{2L}) & p_{5L} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

En utilisant les équations (187), (188), (189) et les deux termes de couplage, le but est de concevoir 3 observateurs en cascade pour les 3 systèmes dynamiques interconnectés.

Notons que le principe de séparation démontré dans chapitre précédent (théorèmes 1 et 2) s'étend facilement à une cascade de plusieurs observateurs.

**Théorème 3 :** on considère trois systèmes  $(E_i(\cdot), A_i(\cdot), C_i(\cdot)), i \in \{1, 2, 3\}$  avec  $E_i(\cdot)$  toujours régulière, tels qu'il existe des matrices  $K_i(\cdot), i \in \{1, 2, 3\}$  assurant que les erreurs d'estimation d'état définies par les systèmes  $E_i(\cdot) \dot{e}_i = (A_i(\cdot) - K_i(\cdot)C_i(\cdot))e_i$  en continu (et  $E_i(\cdot)e_i^+ = (A_i(\cdot) - K_i(\cdot)C_i(\cdot))e_i$  en discret) sont globalement asymptotiquement stable (GAS).



Alors si on considère le système en continu :

$$\begin{bmatrix} E_1(\cdot) & 0 & 0 \\ E_{21}(\cdot) & E_2(\cdot) & 0 \\ E_{31}(\cdot) & E_{32}(\cdot) & E_3(\cdot) \end{bmatrix} \dot{\Theta} = \begin{bmatrix} A_1(\cdot) - K_1(\cdot)C_1(\cdot) & 0 & 0 \\ A_{21}(\cdot) & A_2(\cdot) - K_2(\cdot)C_2(\cdot) & 0 \\ A_{31}(\cdot) & A_{32}(\cdot) & A_3(\cdot) - K_3(\cdot)C_3(\cdot) \end{bmatrix} \Theta \quad (190)$$

(en discret  $\dot{\Theta}$  est remplacé par  $\Theta^+$ ), avec  $E_{21}(\cdot), E_{31}(\cdot), E_{32}(\cdot), A_{12}(\cdot), A_{31}(\cdot), A_{32}(\cdot)$  des matrices bornées en norme ; alors (190) est aussi GAS.

**Preuve :** La preuve de cette extension est directe à partir du théorème 1 pour le continu (avec le théorème 2 pour le discret). Effectivement si  $E_2(\cdot)\dot{e}_2 = (A_2(\cdot) - K_2(\cdot)C_2(\cdot))e_2$  et  $E_3(\cdot)\dot{e}_3 = (A_3(\cdot) - K_3(\cdot)C_3(\cdot))e_3$  sont GAS et  $E_{32}(\cdot), A_{32}(\cdot)$  sont bornées alors le système défini par :

$$\begin{bmatrix} E_2(\cdot) & 0 \\ E_{32}(\cdot) & E_3(\cdot) \end{bmatrix} \dot{e}_{23} = \begin{bmatrix} A_2(\cdot) - K_2(\cdot)C_2(\cdot) & 0 \\ A_{32}(\cdot) & A_3(\cdot) - K_3(\cdot)C_3(\cdot) \end{bmatrix} e_{23} \quad (191)$$

est également GAS. Avec (191) réécrit :  $\tilde{E}(\cdot)\dot{e}_{23} = \tilde{A}e_{23}$ , (190) correspond à :

$$\begin{bmatrix} E_1(\cdot) & [0 \ 0] \\ \begin{bmatrix} E_{21}(\cdot) \\ E_{31}(\cdot) \end{bmatrix} & \tilde{E}(\cdot) \end{bmatrix} \dot{\Theta} = \begin{bmatrix} A_1(\cdot) - K_1(\cdot)C_1(\cdot) & [0 \ 0] \\ \begin{bmatrix} A_{21}(\cdot) \\ A_{31}(\cdot) \end{bmatrix} & \tilde{A} \end{bmatrix} \Theta \text{ et } \begin{bmatrix} E_{21}(\cdot) \\ E_{31}(\cdot) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{21}(\cdot) \\ A_{31}(\cdot) \end{bmatrix} \text{ étant bornées en norme,}$$

en appliquant une deuxième fois le théorème 1, le résultat est direct.

## V. La cascade des PI-observateurs du modèle T2A-2D

Les observateurs locaux du modèle T2A-2D décomposé sont schématisés par la figure suivante :

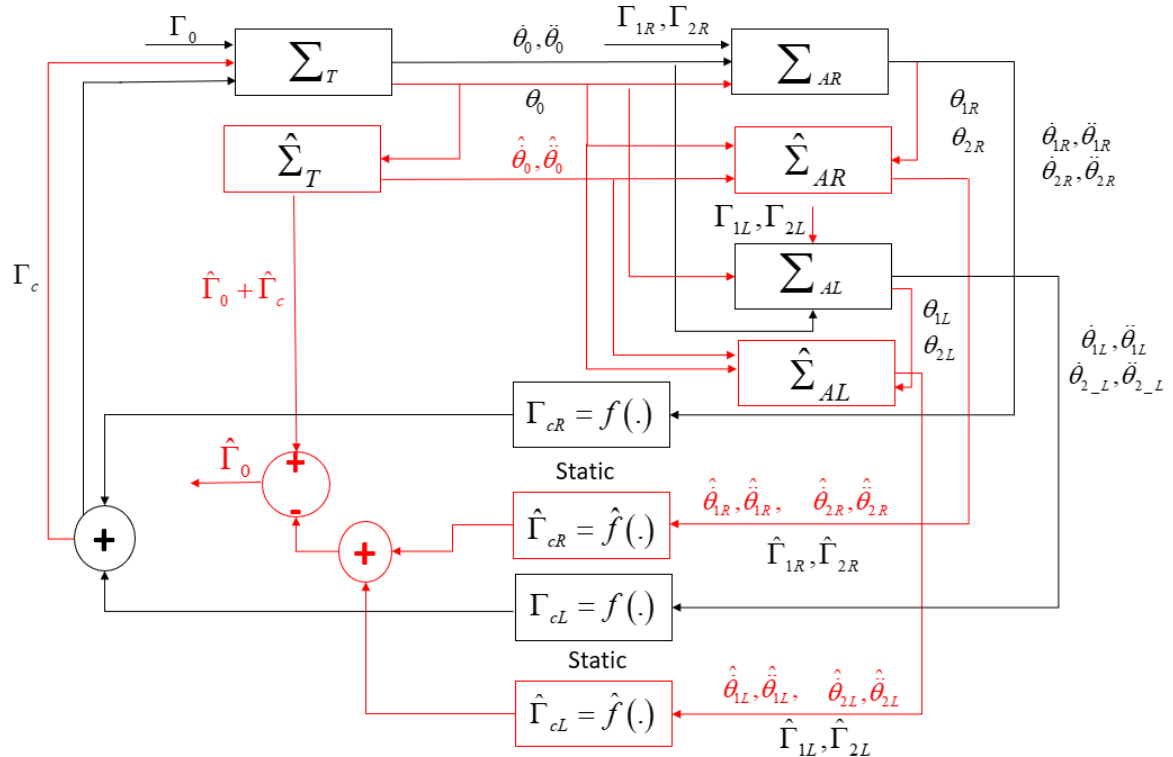


Figure 53: les observateurs locaux du modèle T2A-2D

En se basant sur le chapitre précédent on écrit directement l'erreur d'observation relative à chaque système local.

Pour le système tronc :

$$\dot{e}_T = \left( \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_T(\theta_0)C_T \right) e_T \quad (192)$$

Pour le système bras droit :

$$E_{12R}(\theta_{AR}, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_0) \dot{e}_T + \begin{bmatrix} E_{AR}(\theta_{2R}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{e}_{AR} = \left( \begin{bmatrix} H(x_{AR}, \hat{x}_{AR}) & B_{AR} \\ 0 & J_{2R} \end{bmatrix} - K_{AR}(\cdot)C \right) e_{AR} \quad (193)$$

$$\text{Avec } H(x_{AR}, \hat{x}_{AR}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_{4R} \sin(q_{2R}) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_{2R} + \dot{\theta}_{2R} \\ -\dot{\theta}_{1R} - \dot{\theta}_{1R} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Pour le système bras gauche :

$$E_{12L}(\theta_{AL}, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_0) \dot{e}_T + \begin{bmatrix} E_{AL}(\theta_{2L}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{e}_{AL} = \left( \begin{bmatrix} H(x_{AL}, \hat{x}_{AL}) & B_{AL} \\ 0 & J_{2L} \end{bmatrix} - K_{AL}(\cdot)C \right) e_{AL} \quad (194)$$

$$\text{Avec } H(x_{AL}, \hat{x}_{AL}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_{4L} \sin(q_{2L}) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_{2L} + \dot{\theta}_{2L} \\ -\dot{\theta}_{1L} - \dot{\theta}_{1L} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

En combinant les 3 équations relatives aux erreurs d'observation, on obtient le problème d'observation global :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ E_{12R}(\cdot) & \phi_{AR} & 0 \\ E_{12L}(\cdot) & 0 & \phi_{AL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_T \\ \dot{e}_{AR} \\ \dot{e}_{AL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T^e - K_T(\theta_0)C_T & 0 & 0 \\ 0 & \psi_R(x) & 0 \\ 0 & 0 & \psi_L(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_T \\ e_{AR} \\ e_{AL} \end{bmatrix} \quad (195)$$

$$\psi_R(x) = \begin{bmatrix} H(x_{AR}, \hat{x}_{AR}) & B_{AR} \\ 0 & J_{2R} \end{bmatrix} - K_{AR}(\cdot)C_{AR} \quad (196)$$

$$\psi_L(x) = \begin{bmatrix} H(x_{AL}, \hat{x}_{AL}) & B_{AL} \\ 0 & J_{2L} \end{bmatrix} - K_{AL}(\cdot)C_{AL} \quad (197)$$

$$\phi_{AR}(\theta_{2R}) = \begin{bmatrix} E_{AR}(\theta_{2R}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \phi_{AL}(\theta_{2L}) = \begin{bmatrix} E_{AL}(\theta_{2L}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad A_T^e = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix}.$$

(195) correspondant aux hypothèses du théorème 3 le principe de séparation est applicable.

En se basant sur le modèle S3S-2D décomposé, l'observateur local du système tronc est donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_T \\ \dot{\hat{\Omega}}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_T \\ \hat{\Omega}_T \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 0 & \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + K_{LT} \right) (y_T - \hat{y}_T) \quad (198)$$

Le gain d'observation du système tronçonné  $K_{LT}$  est obtenu via placement de pôles. Après quelques essais, la solution adoptée est  $K_{LT} = 10^3 \begin{bmatrix} 7.91 & 11.41 & 12.9 \times 10^2 & 5.98 \times 10^2 \end{bmatrix}^T$ .

Les problèmes LMI associés aux systèmes bras droit et gauche sont donnés par la même forme que précédemment (chapitre 2, paragraphe 2.2), que l'on rappelle ici :

Trouver  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$ ,  $P_1 = P_1^T \succ 0$ ,  $\begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix}$   $i, j, k \in \{1, 2\}$  tels que :

$$\begin{bmatrix} P_3^T \begin{bmatrix} H_{jk} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_{1i} C + (*) & (*) \\ P_4^T \begin{bmatrix} H_{jk} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_{2i} C + P_1 - \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T P_3 - P_4^T \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T P_4 \end{bmatrix} < 0 \quad (199)$$

L'observateur du système  $\Sigma_{AR}$  s'écrit, avec  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$ ,  $P_1 = P_1^T \succ 0$ ,  $\begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  solution de (199) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 v_i(q_{2R}) \begin{bmatrix} E_{ARi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{AR} \\ \dot{\hat{\Omega}}_{AR} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{AR}(\hat{x}_{AR}) & B_{AR} \\ 0 & J_{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{AR} \\ \hat{\Omega}_{AR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_{AR}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_{AR}) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} + \\ \left[ \sum_{i=1}^2 v_i(q_{2R}) \begin{bmatrix} E_{ARi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} I \right] P_{(\cdot)}^{-T} \sum_{i=1}^2 v_i(q_{2R}) \begin{bmatrix} K_{1i}(\cdot) \\ K_{2i}(\cdot) \end{bmatrix} (y_{AR} - \hat{y}_{AR}) \end{aligned} \quad (200)$$

Et de la même manière, on crée l'observateur du système bras gauche  $\Sigma_{AL}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 v_i(q_{2L}) \begin{bmatrix} E_{ALi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{AL} \\ \dot{\hat{\Omega}}_{AL} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{AL}(\hat{x}_{AL}) & B_{AL} \\ 0 & J_{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{AL} \\ \hat{\Omega}_{AL} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_{AL}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_{AL}) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} + \\ \left[ \sum_{i=1}^2 v_i(q_{2L}) \begin{bmatrix} E_{ALi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} I \right] P_{(\cdot)}^{-T} \sum_{i=1}^2 v_i(q_{2L}) \begin{bmatrix} K_{1i}(\cdot) \\ K_{2i}(\cdot) \end{bmatrix} (y_{AL} - \hat{y}_{AL}) \end{aligned} \quad (201)$$

Le terme statique de couplage est retrouvé grâce à la relation suivante :

$$\hat{\Gamma}_{cR} = \begin{bmatrix} -p_{10R} \sin(q_{1R}) \dot{\hat{\theta}}_{1R} & -p_{9R} \sin(q_{1R} + q_{2R}) \dot{\hat{\theta}}_{2R} & p_{10R} \cos(q_{1R}) & p_{9R} \cos(q_{1R} + q_{2R}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{AR} \\ \dot{\hat{\Omega}}_{AR} \end{bmatrix} - \hat{\Gamma}_{1R} \quad (202)$$

Le terme de couplage statique gauche est donné par :

$$\hat{\Gamma}_{cL} = \begin{bmatrix} -p_{10L} \sin(q_{1L}) \dot{\theta}_{1L} & -p_{9L} \sin(q_{1L} + q_{2L}) \dot{\theta}_{2L} & p_{10L} \cos(q_{1L}) & p_{9L} \cos(q_{1L} + q_{2L}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{AL} \\ \dot{q}_{AL} \end{bmatrix} - \hat{\Gamma}_{1L} \quad (203)$$

Enfin via la dernière relation  $\hat{\Gamma}_c = \hat{\Gamma}_{cR} + \hat{\Gamma}_{cL}$ , le couple  $\hat{\Gamma}_0$  est retrouvé :  $\hat{\Gamma}_0 = \hat{\Gamma}_U - \hat{\Gamma}_c$  et la cascade des PI-observateurs est bouclée.

## VI. Les essais en simulation et avec des données réelles

Le protocole de simulation suit le même protocole à l'instar des modèles S3S-2D et S3S-2D décomposé. La particularité du modèle T2A-2D est de pouvoir mettre en évidence la dissymétrie des mouvements effectués par les membres supérieurs droit et gauche.

La faisabilité des problèmes LMI associés aux bras droit et gauche est garantie dans l'ensemble des contraintes  $\Omega_x$ . La résolution du problème (199) du système bras droit, en ajoutant un taux de décroissance  $\tau = 8.55$  au premier terme de (199), a abouti aux résultats suivants avec les gains

$$\begin{bmatrix} K_{1i}(\cdot) \\ K_{2i}(\cdot) \end{bmatrix}, i \in \{1, 2\} :$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 158.5 & -13.22 \\ -45 & 117.34 \\ 51.04 & 9.91 \\ -11.8 & 12.16 \\ 9 \times 10^{-2} & 5 \times 10^{-2} \\ 7 \times 10^{-3} & -5 \times 10^{-3} \\ 8 \times 10^{-3} & 9 \times 10^{-3} \\ 10^{-3} & -9 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, K_{12} = \begin{bmatrix} 91.2 & -81 \\ -14.9 & 122.4 \\ 19.2 & -6.2 \\ -5.3 & 7.1 \times 10^{-1} \\ 7 \times 10^{-3} & 9 \times 10^{-3} \\ 9 \times 10^{-3} & -41.3 \times 10^{-1} \\ 2 \times 10^{-3} & 9.2 \times 10^{-3} \\ 10^{-4} & -7 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, K_{21} = \begin{bmatrix} 47.3 & -2.7 \\ -8.1 & 21.3 \\ -4.1 \times 10^{-1} & 94 \times 10^{-2} \\ -9.2 \times 10^{-2} & -16 \times 10^{-2} \\ 4 \times 10^{-4} & 57 \times 10^{-3} \\ 51 \times 10^{-4} & 8 \times 10^{-3} \\ 4 \times 10^{-4} & 4.1 \times 10^{-3} \\ 10^{-3} & -3 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} 13.4 & -4.66 \\ 5.81 & 11.48 \\ -7 \times 10^{-2} & 11.6 \times 10^{-1} \\ -5.2 \times 10^{-3} & -9 \times 10^{-2} \\ 6 \times 10^{-4} & 8.1 \times 10^{-3} \\ 9.4 \times 10^{-3} & 2.14 \times 10^{-3} \\ 10^{-4} & 78 \times 10^{-3} \\ 10^{-3} & -11.5 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

Pour les essais en simulation, on varie les paramètres inertiels entre les deux bras, afin de créer une dissymétrie qui permet de tester l'intérêt du modèle T2A-2D. La masse et l'inertie du bras gauche ont été augmentées de 10% par rapport au bras droit. Les angles estimés par la cascade des observateurs T2A sont donnés pour les épaules droit et gauche par la figure 54.

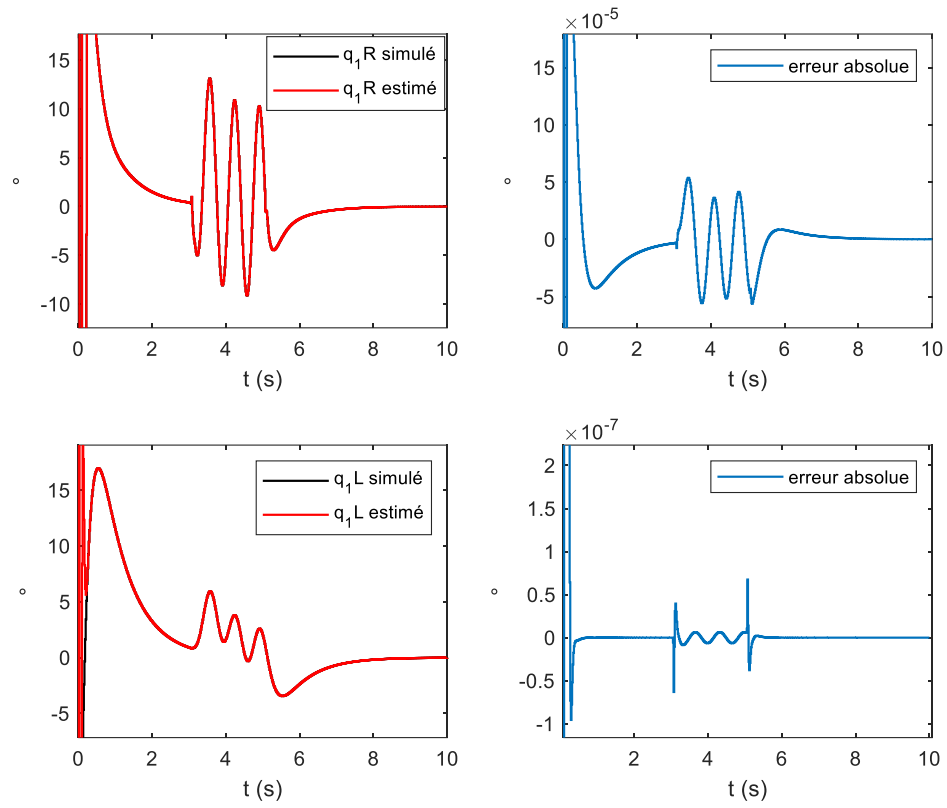


Figure 54: angles estimés des épaules du modèle T2A-2D

Les vitesses estimées des épaules droit et gauche sont données par la figure 55.

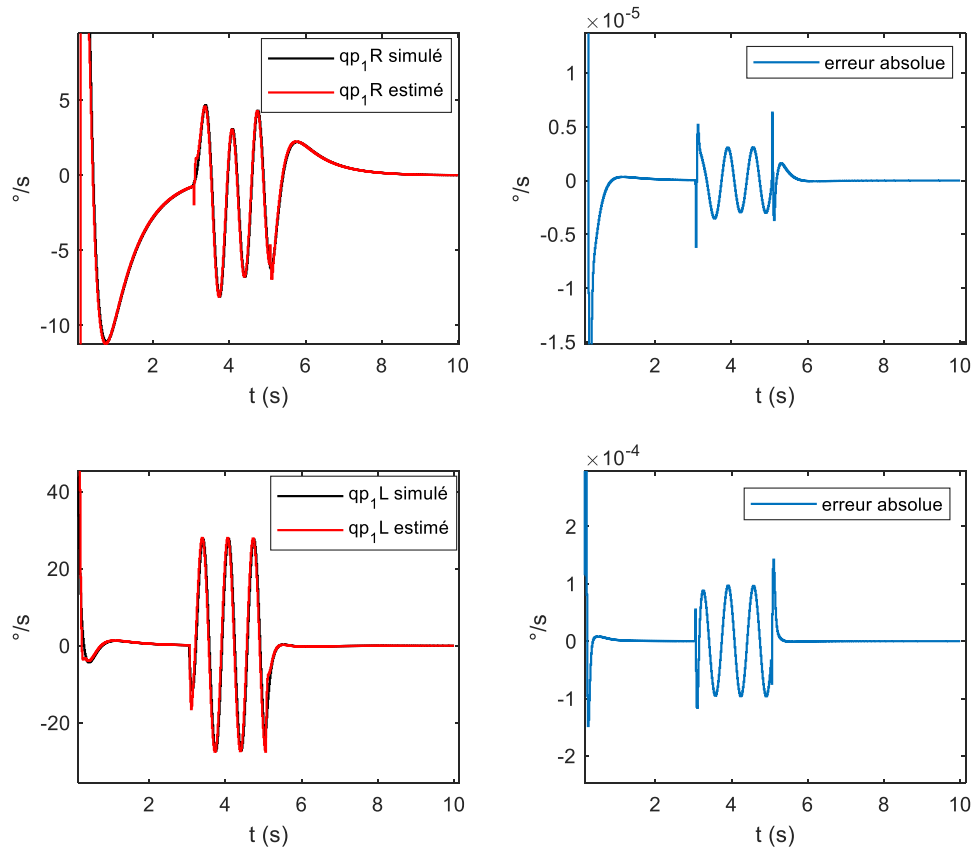


Figure 55: vitesses estimées des épaules du modèle T2A-2D

Les couples actifs estimés des épaules droit et gauche sont donnés par la figure 56.

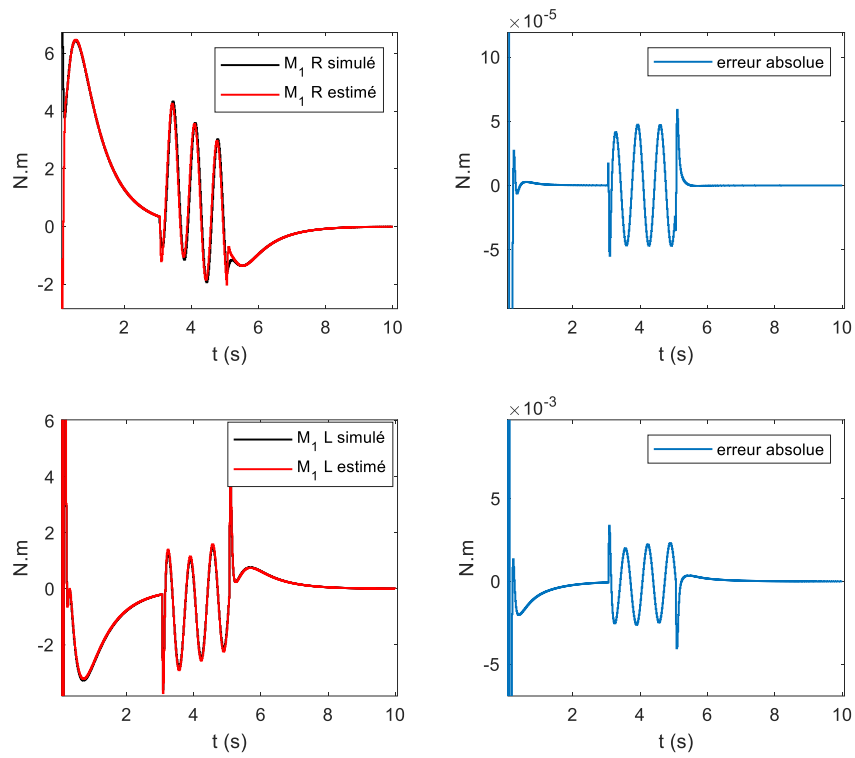


Figure 56: couples actifs au niveau des épaules

Les couples actifs estimés des coudes droit et gauche sont donnés par la figure 57.

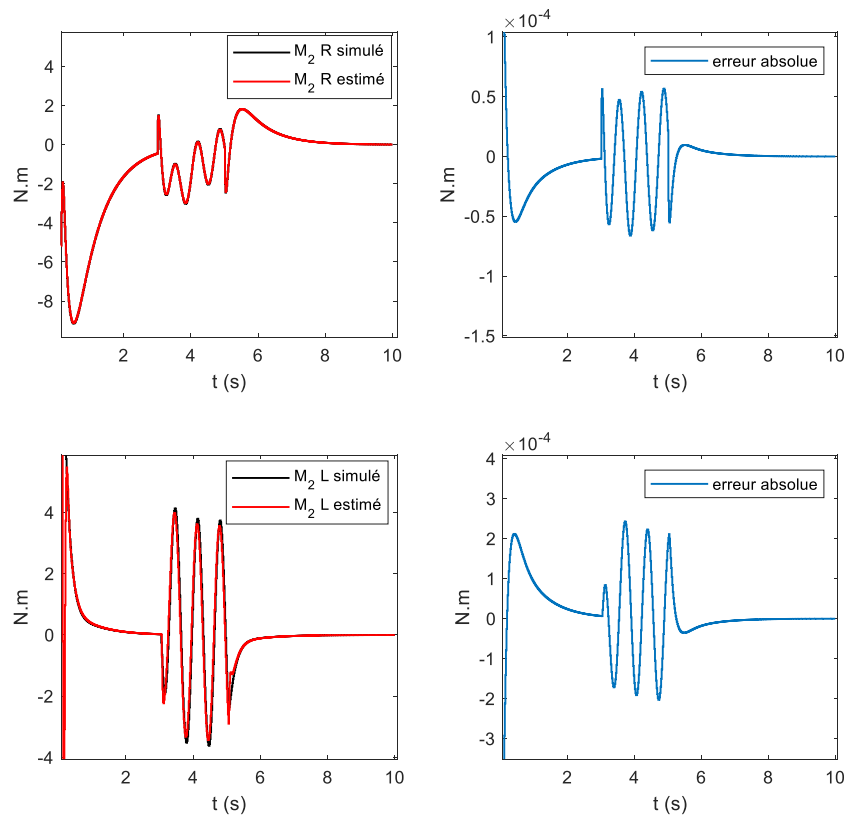
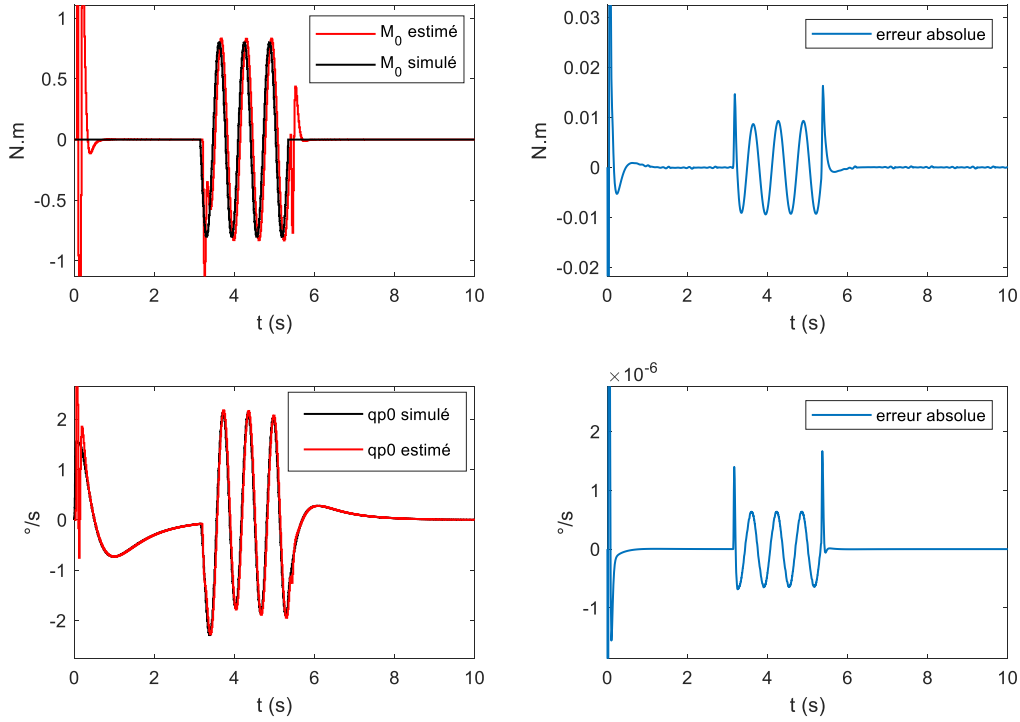


Figure 57: couples actifs au niveau des coudes

La dissymétrie du mouvement est bien visible entre les membres supérieurs droit et gauche ce qui justifie pleinement l'utilisation des observateurs locaux T2A-2D.

Enfin, via la relation  $\hat{\Gamma}_0 = \Gamma_U - (\hat{\Gamma}_{cR} + \hat{\Gamma}_{cL})$ , on détermine le couple reconstruit du tronc. Il est donné avec la vitesse correspondante par la figure 58.

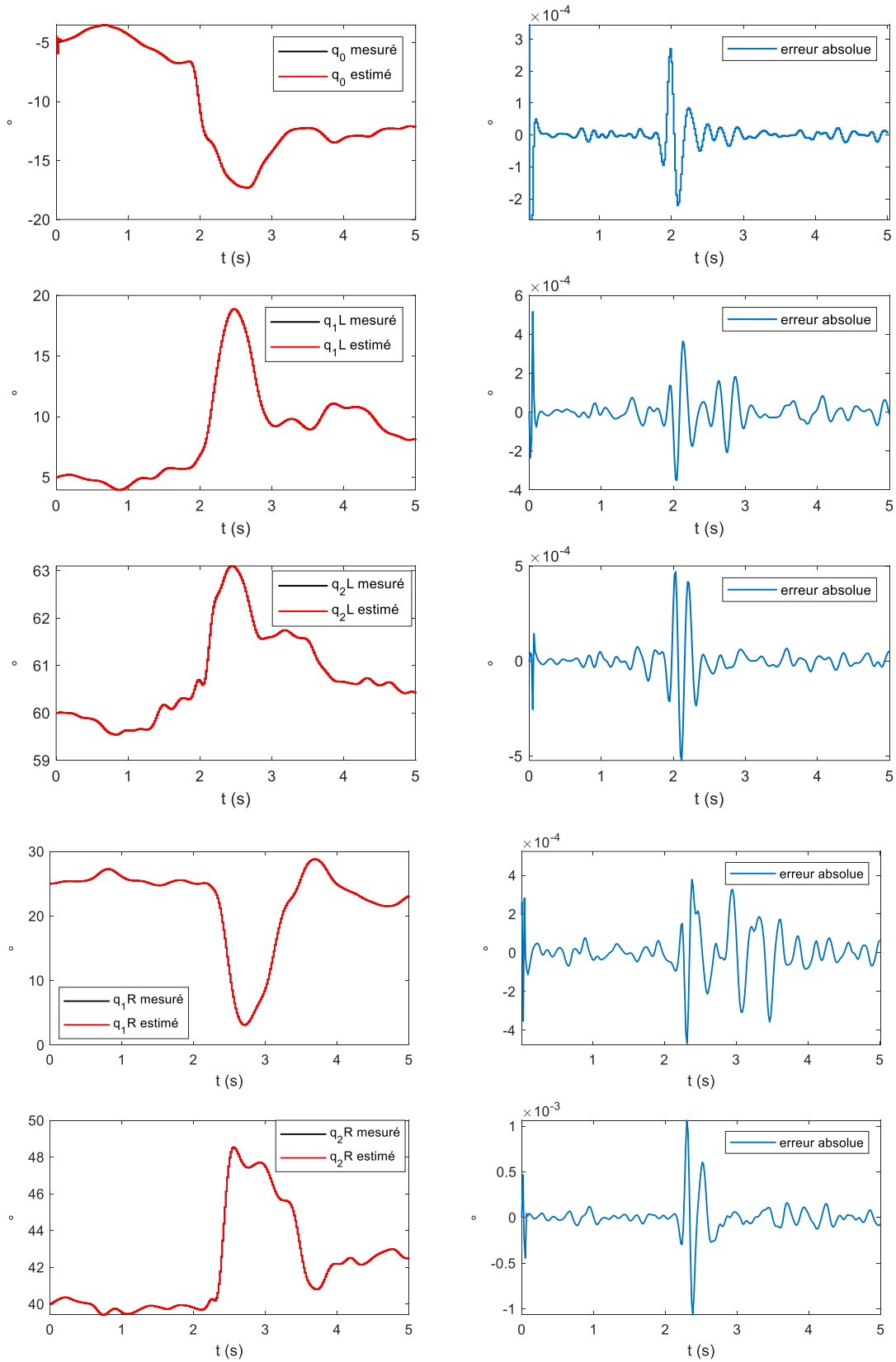


**Figure 58: couple estimé au niveau du tronc du modèle T2A-2D**

L'erreur entre les variables simulées et estimées par les observateurs locaux est inférieure à 5%, ceci confirme la robustesse de la cascade des observateurs malgré la variation des conditions d'essai portant sur les paramètres inertiels et géométriques entre les deux bras.

La dernière étape consiste à simuler les trois observateurs locaux avec des données réelles issues de la collecte expérimentale de Blandeau (2018). Pour une acquisition spécifique de la collecte expérimentale, on choisit un sujet où les membres supérieurs se déplacent selon des mouvements de flexion/extension différents à droite et à gauche. Ces mouvements ne sont pas observables avec le modèle S3S-2D qui considère une correspondance entre les membres supérieurs.

Les angles articulaires relatifs au tronc, aux membres supérieurs droit et gauche sont donnés par la figure 59.



**Figure 59: angles estimés via les données réelles**

Comme attendu, on a une convergence sur les variables mesurées (angles) tout-à-fait similaire avec les essais précédents (observateur complet et/ou en cascade avec le modèle S3S-2D pour les sujets s'y prêtant) aussi bien par rapport aux conditions initiales que pour les mouvements rapides résultants de



la perturbation. Les couples estimés au niveau du tronc, de l'épaule et du coude par la cascade des observateurs sont donnés par la figure 60 pour deux acquisitions spécifiques des essais expérimentaux (acquisitions 3 et 13) où le sujet a effectué des mouvements dissymétriques dans le plan sagittal :

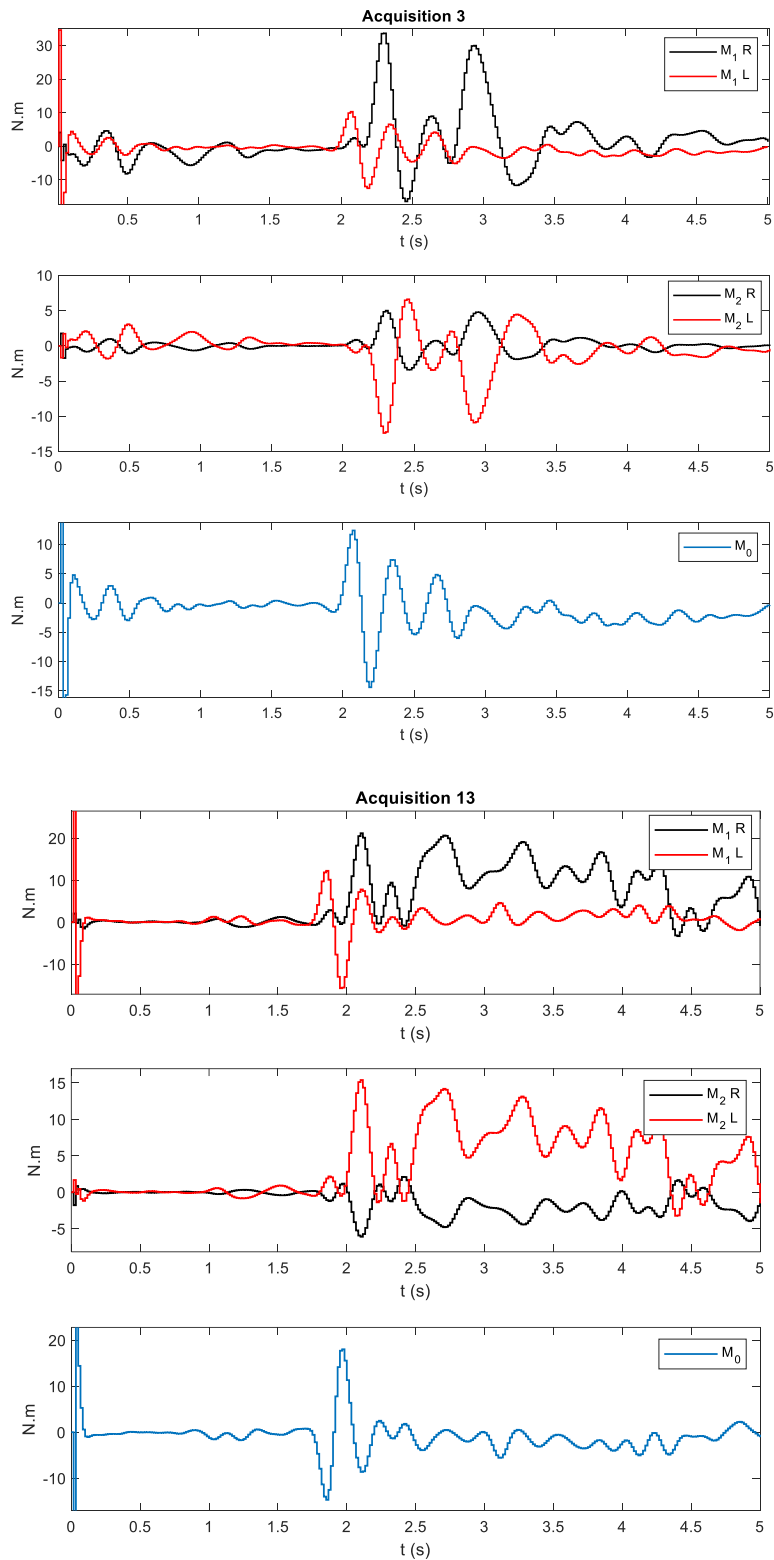
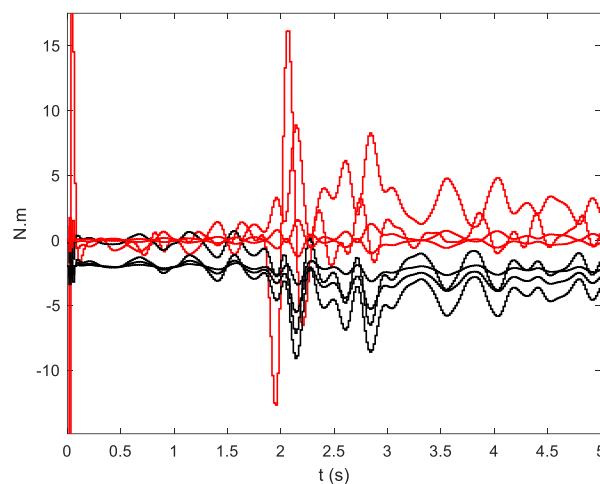


Figure 60 : couples actifs et couple passif estimés par la cascade T2A

Les couples actifs au niveau de l'épaule et du coude ne varient pas beaucoup entre le début de l'acquisition et l'application de la perturbation car ce temps correspond à la position assise stable. Suite à la perturbation les couples actifs varient rapidement afin de contrer celle-ci. Progressivement après la fin de la perturbation, le sujet regagne son équilibre assis et les couples actifs diminuent. Les couples actifs sont bien supérieurs au couple passif, ceci traduit la compensation par les membres supérieurs engagés comme des segments stabilisateurs.

L'efficacité du contrôle postural en position assise est mise en évidence par les mouvements de stabilisation effectués par le sujet. Les couples actifs des épaules et des coudes sont bien dissymétriques et justifient pleinement l'utilisation des observateurs basés sur le modèle T2A-2D. Les couples du bras gauche étant supérieurs à ceux du bras droit, cela se traduit par un recrutement musculaire plus important d'où la différence d'amplitude des efforts générés.

A la suite de la perturbation le couple lombaire diminue car la perturbation pousse le sujet dans la direction antérieure, ceci est équivalent à injecter un couple négatif au niveau du tronc ou un couple positif au niveau de l'épaule. L'essai présenté sur le sujet S239 a montré l'utilité des observateurs en cascade basé sur le modèle T2A-2D, il correspond à un cas parmi de nombreux essais effectués durant la campagne au CRIR (Blandeau, 2018). Pour illustrer le potentiel de l'observateur développé, la figure ci-après présente le couple au niveau du tronc relatif aux 6 acquisitions exploitables du sujet S239 et en fonction de l'extension des membres inférieurs (MI). Deux conditions d'essais avaient été recueillies : MI tendus (estimation du couple des observateurs en rouge) et MI pliés (estimation du couple des observateurs en noir).



**Figure 61 : couples de tronc estimés en fonction de l'extension des MI, S239**

On rappelle que le sujet S239 a adopté une stratégie basse mobile (BM) et par conséquent le couple au niveau du tronc varie plus longtemps même après la fin de la perturbation, contrairement aux sujets adoptant une stratégie haute fixe (HF) où les courbes sont semblables aux sujets asymptomatiques. Cette différence est compatible avec le fait que les sujets adoptant la stratégie HF maintiennent leurs bras levés pour contrer la perturbation alors que les sujets adoptant la stratégie BM les laissent retomber.

Pour cet essai de simulation, l'extension des membres inférieurs entraîne une augmentation de la flexion du tronc. En effet lors de l'extension des membres inférieurs, la chaîne postérieure (dont les muscles postérieurs des membres inférieurs, les muscles lombaires et les muscles dorsaux font partie)

est sollicitée et le tronc devrait se rapprocher de la verticale. On peut interpréter ces résultats par le fait que le sujet lésé médullaire a adopté une posture de compensation afin de contrer la perturbation et éviter la chute (Blandeau, 2018). Par ailleurs, fléchir d'avantage le tronc augmente la sécurité vis à vis de la perte d'équilibre car l'extension des membres inférieurs tire sur les tissus mous de la région lombaire et provoque par conséquent un décalage du tronc vers l'arrière.

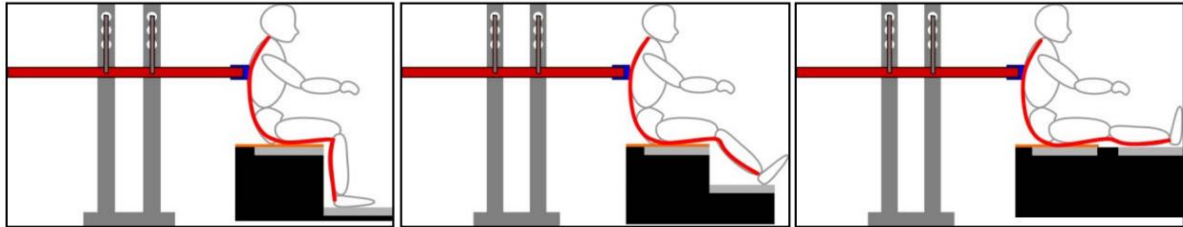


Figure 62 : configuration expérimentale de la chaîne posturale postérieure (Blandeau, 2018)

Le sujet S239 a une lésion au niveau de la vertèbre thoracique TH6 ainsi le contrôle musculaire et/ou sensoriel sont réduits (absents) dans la région située en dessous de cette vertèbre. La faiblesse musculaire engendrée contribue à limiter les activités physiques volontaires (Chae et al., 2002) et (Kim et Eng, 2003) et par conséquent les membres supérieurs seront sursollicités afin de compenser l'absence de contrôle induite.

## VII. Conclusion du chapitre 4

Ce quatrième chapitre a permis de montrer que les extensions du modèle S3S-2D en utilisant une cascade d'observateurs se faisaient de façon presque directe. Un essai avec un second membre supérieur supplémentaire a été réalisé avec succès dans le cadre du modèle T2A-2D. Le principe de séparation présenté dans le chapitre précédent est facilement extensible à une cascade de plusieurs observateurs à condition de respecter les hypothèses du théorème.

Par le biais du modèle T2A-2D, on a réussi à estimer les efforts articulaires chez des sujets lésés médullaires ayant effectués des mouvements de flexion/extension des bras droit et gauche de façon dissymétrique.

Si, évidemment la complexité générale du modèle s'accroît, il n'en n'est pas de même des problèmes LMI qui permettent de trouver des solutions pour les observateurs locaux.

Le modèle T2A-2D a analysé les mouvements de la collecte expérimentale où les bras ne sont pas juxtaposés et effectuant des mouvements dissymétriques. Cette étude permettra dans des futurs travaux d'explorer des modèles plus complexes comme le T2A-3D capable de traduire les mouvements de la stratégie HM qui demeurent jusqu'à présent inexploitable.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La lésion de la moelle épinière engendre une perte du contrôle aux niveaux des organes situés en dessous du niveau lésionnel, ce qui nuit considérablement au maintien de la stabilité posturale en position assise. Les muscles et les capteurs sensoriels ne sont alors pas (ou peu) actifs en dessous du seuil lésionnel. Ainsi les stratégies de stabilisation assise des sujets asymptomatiques (via les muscles du tronc) ne sont pas applicables. Les membres supérieurs prennent alors le relais.

Les sujets lésés médullaires développent donc des nouvelles stratégies compensatoires individuelles afin de stabiliser l'assise en utilisant principalement les membres supérieurs. Ces stratégies viennent compenser l'absence totale ou partielle de recrutement des muscles dorsaux et abdominaux. La quantification des efforts produits activement ou passivement, dont les couples articulaires, lors du maintien de la stabilité aiderait à mieux comprendre l'importance des différentes contributions dans le but de proposer à termes des positions assises facilitant la stabilité (Blandeau, 2018).

La démarche développée dans ce manuscrit est basée sur une approche par modélisation bio-inspirée qui permet d'accroître petit-à-petit la complexité des modèles et d'y associer des techniques basées sur l'automatique pour résoudre le problème de l'estimation des variables non mesurées, notamment les entrées, i.e. les couples articulaires. Le besoin de rester proche des modèles mécaniques développés impose de construire un ou des observateurs conservant la structure des modèles (sans simplification / linéarisation). La forme descripteur adoptée dans Blandeau (2018) a permis de conserver l'ensemble du modèle et notamment ses non linéarités tout en assurant un problème d'optimisation de contraintes LMI encore compatible avec les solveurs actuels.

A partir de ce contexte méthodologique, les objectifs de la thèse étaient définis par :

1. Enrichir les modèles mécaniques en ajoutant des degrés de liberté pour permettre d'analyser de plus en plus finement la stabilité assise des sujets lésés médullaires.
2. Pouvoir en déduire de façon « automatique » des observateurs utilisant les modèles complets sous forme descripteur dans le but de reconstruire les variables non mesurées.
3. Obtenir des problèmes d'optimisation dont le nombre de contraintes LMI et de variables à rechercher soient compatibles avec les limitations des solveurs. Pour les points 2 et 3, si possible l'accroissement des degrés de liberté du point 1 doit pouvoir être pris en compte.
4. Améliorer l'étude de la stabilité assise chez les sujets lésés médullaires à travers la reconstruction des efforts articulaires pour lesquels les modèles de l'état de l'art n'ont pas réussi à donner des résultats précis en fonction du contexte clinique et pathologique

### I. Contributions

Sur le premier point, 2 modèles ont été présentés dans ce manuscrit : le modèle S3S-2D et le modèle T2A-2D. Ces modèles étant par nature instables. Pour pouvoir réaliser des simulations, ces modèles doivent être stabilisés. Concernant le contrôle, il s'agit d'un retour d'état (l'humain connaît implicitement tous les états qui lui permettent de se stabiliser), ce qui simplifie grandement la tâche de la synthèse des lois de contrôle. Il peut être vu comme une boucle interne du système et certaines simplifications peuvent être appliquées. Le seul problème réside dans le fait que l'entrée la plus importante (en termes de couple), le tronc, n'est pas mobilisable. Cela amène, si on utilise les techniques de façon directe à une modélisation qui utilise un nombre de sommets des polytopes beaucoup trop important. Cette problématique a été résolue pour les 2 modèles S3S-2D et T2A-2D en

utilisant les mêmes techniques de réduction du nombre de sommets. Il reste néanmoins que cette partie n'est pas générique pour le moment et qu'augmenter encore la complexité du modèle demandera une étude particulière pour la synthèse de la commande.

Une première contribution a été de revisiter le problème d'un observateur global pour le modèle S3S-2D en continu. Effectivement, dans Blandeau et al. (2018), l'observateur proposé avait été synthétisé dans le domaine discret en utilisant une hypothèse ( $\hat{\theta}_{k-1} = \hat{\theta}_k$  compatible avec la rapidité des acquisitions) pour s'affranchir du problème délicat des variables de prémisses non mesurées. Cette contribution est originale, car la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état ne requiert pas d'hypothèses de ce type, seules sont nécessaires les bornes des variables d'état, correspondant dans notre cas aux possibilités physiologiques.

Pour le deuxième et troisième point qui sont liés, les modèles sont classés par ordre de complexité croissante, chaque modèle est plus élaboré que son prédécesseur en termes de degrés de liberté et de segments qui composent le modèle. Cette extension est corrélée avec une complexité numérique inhérente, les travaux précédents Blandeau (2018) (rappelés au chapitre 2) montrent que la complexité des problèmes d'optimisation est proche de la limite de ce que les algorithmes actuels sont capables de résoudre aujourd'hui.

Augmenter la complexité des modèles nécessite donc de modifier l'approche et, dans notre cas de décomposer le problème en problèmes de taille réduite compatibles avec les solveurs. Des techniques permettant de réduire la complexité numérique tout en conservant les caractéristiques du modèle non linéaire d'origine ont été développées en utilisant une décomposition en cascade. Cette décomposition en cascade donne un modèle parfaitement équivalent au modèle initial, mais son formalisme permet de déterminer des observateurs locaux de complexité réduite. D'un point de vue théorique, les preuves de convergence de l'erreur d'état pour le système complet à partir d'observateurs en cascade (sous certaines hypothèses de bornitude) ont été données aussi bien en continu qu'en discret.

Néanmoins, cette preuve théorique doit être accompagnée de validations en simulation et sur des données réelles. Quelques réglages permettent notamment de proposer des performances aux observateurs locaux (taux de décroissance, norme sur les gains) et les hypothèses faites pour les observateurs en cascade ont alors été validées ; la décomposition a permis de donner des résultats très similaires à l'approche globale.

La méthodologie utilisée pour obtenir les observateurs locaux à partir du modèle mécanique décomposé en cascade est assez générique, au sens où l'obtention des observateurs est « directe » moyennant la construction d'un polytope et l'écriture de l'erreur d'estimation locale de chaque observateur. De ce fait, il devient possible d'envisager d'augmenter la complexité de la modélisation par le rajout de degrés de liberté supplémentaires. Le modèle T2A-2D est la première extension, il correspond à une amélioration du modèle S3S-2D décomposé. Il a été validé sur les essais de simulation et a permis d'exploiter les acquisitions expérimentales qui n'ont pas pu être analysées par les modèles précédents faisant de lui ainsi un modèle plus global et généralisé.

Les contributions de la thèse et leur valorisation sont développées dans ce tableau :

Méthode	Contributions	Conférences ou revues
S3S-2D	Lois de contrôle stabilisantes pour le modèle S3S-2D global en discret	IFAC WC 2020 à Berlin
S3S-2D et S3S-2D DECOMPOSE	L'observateur global continu du modèle S3S-2D continu. Modèle S3S-2D global continu et observateurs locaux en cascade dans le domaine continu	FRONTIERS IN CONTROL ENGINEERING, SECTION CONTROL AND AUTOMATION SYSTEMS 2021.
S3S-2D DECOMPOSE DISCRET	Modèle S3S global discret et observateurs en cascade dans le domaines discret	IFAC ICONS 2022 Cluj Napoca.
S3S-2D DECOMPOSE	L'effet de l'extension des membres inférieurs sur le couple articulaire au niveau lombaire reconstruit avec les observateurs en cascade.	AMSE MODELING MEASUREMENT CONTROL / IFRATH 2022 CONGRES HANDICAP Paris.
T2A- 2D en Continu	Reconstruction des couples articulaires selon des mouvements dissymétriques dans le plan sagittal.	63rd CONFERENCE on DECISION AND CONTROL 2024, Milan.  CONGRES HANDICAP 2024 Paris.

Tableau 6 : Contribution de la thèse

## II. Perspectives de Recherche

Une première perspective des travaux entrepris est liée à la rééducation fonctionnelle. La connaissance des couples articulaires en temps réel permet d'envisager un « feedback » des efforts inter-segmentaire. Cette connaissance aiderait les rééducateurs à comprendre la stratégie de stabilisation mise en œuvre et à proposer des exercices ciblés. Un programme adapté pourrait être mis en place utilisant la visualisation des signaux associés à la coordination inter-segmentaire et les couples articulaires correspondants, ce qui permettrait au rééducateur d'orienter le patient vers une stratégie posturale adéquate à ses acquis (Guelton et al., 2008). Cette visualisation en temps réel permettrait de repérer les instants où l'effort articulaire est résistant ou moteur puis de comparer les résultats obtenus aux mouvements segmentaires. Les couples internes permettent également de synthétiser une classification des conséquences post-lésionnelles et de documenter les progrès individuels. Les rééducateurs seront donc en mesure d'orienter les patients à opter pour une stratégie particulière en fonction de leurs capacités résiduelles afin de maximiser l'autonomie. Ces exercices ciblés permettent à long terme d'équilibrer la contribution active des segments mobilisateurs par rapport à la contribution passive du tronc.

Sur le volet automatique, la voie est riche en perspectives en termes de modélisation et d'exploration des résultats fournis. Les modèles étudiés peuvent encore s'étendre afin d'approfondir l'analyse des données expérimentales. Le modèle T2A-2D a permis d'exploiter les stratégies de stabilisation qui

n'ont pas été analysées par le modèle S3S-2D vis-à-vis de son formalisme symétrique défini dans le plan sagittal. Certaines acquisitions demeurent encore inexploitable car les mouvements adoptés par le sujet lors des manipulations expérimentales ont franchi le plan sagittal comme la stratégie Haute mobile (HM) où on remarque une rotation des épaules produisant un mouvement des membres supérieurs en dehors du plan sagittal. Il est donc nécessaire d'enrichir le modèle et passer à un modèle 3D. La décomposition en cascade devrait être plus complexe que celles présentées dans ce manuscrit, mais la méthodologie semble pouvoir s'adapter à cette difficulté. Le nouveau modèle 3D devrait permettre d'analyser l'ensemble des mouvements adoptés par les sujets lésés médullaires.

Normalement, il y a des retards dus au système nerveux central. Ces retards n'apparaissent dans les modèles S3S-2D et T2A-2D. Les retards n'impactent pas la synthèse des observateurs étant donné qu'ils sont sur les entrées. Pour la synthèse des lois de contrôle, l'ajout des retards a été considéré dans le modèle H2AT, les équations étaient compliquées d'un point de vue théorique. On rappelle que le but de la loi de contrôle est de stabiliser les modèles afin de vérifier la méthodologie. Incorporer des retards pourrait être pertinent afin de reproduire finement les mouvements humains.

La deuxième étape importante quand on travaille avec une approche basée sur un modèle est de pouvoir valider expérimentalement les données estimées. En effet, l'absence d'une référence des couples articulaires ne permet pas de conclure quant à la validité de l'approche proposée. Dans notre cas, la validation sur l'humain est impossible à moins d'employer une méthodologie invasive impossible à réaliser.

L'idéal dans notre contexte est de disposer d'un système instrumenté capable de reproduire l'ensemble des mouvements voulus via des actionneurs et des capteurs qui seront parfaitement maîtrisés. La validation complète de la méthodologie développée, avec les entrées considérées comme « inconnues » devient alors possible. Le LAMIH UMR CNRS 8201 s'est doté d'un mannequin dynamique permettant de reproduire un ensemble de mouvements voulus et capable de répondre à ces questions. Il a été réalisé par Sébastien Paganelli (ingénieur de recherche au LAMIH), à partir d'un cahier des charges. Le mannequin est contrôlé via une carte D-space et du logiciel MATLAB avec son interface Simulink. Les performances souhaitées représentent les mouvements possibles (Kapandji, 2005a) qui correspondent à :

- Amplitude angulaire des coudes :  $160^\circ \Rightarrow$  de  $0$  à  $+160^\circ$
- Amplitude angulaire des épaules :  $200^\circ \Rightarrow$  de  $-10^\circ$  à  $+190^\circ$
- Vitesse angulaire maximum des coudes :  $200^\circ/s \Rightarrow$  amplitude complète effectuée en 800ms
- Vitesse angulaire maximum des épaules :  $125^\circ/s \Rightarrow$  amplitude complète effectuée en 1550ms



**Figure 63: armatures pour l'articulation des épaules**

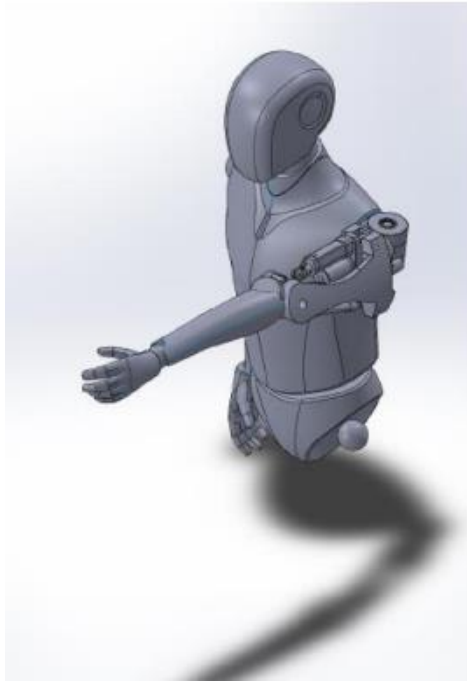
On voit sur la figure 63 que le mannequin dispose de toutes les possibilités de flexion / extension / rotation du haut du « corps ». Etant complètement instrumenté, il permettra en premier lieu de reproduire les stratégies observées sur les sujets étudiés. Une loi de commande devra donc être synthétisée afin de reproduire ces stratégies. La méthodologie développée au cours de cette thèse pourra être employée en y rajoutant une partie feedforward, permettant de faire du suivi de trajectoire et donc de reproduire avec fidélité les mouvements humains observés.

En second lieu, les observateurs développés pourront être testés et réellement confrontés aux données réelles, les couples articulaires étant connus. La robustesse des approches pourra également être confirmée ou infirmée. Effectivement, des incertitudes de masse, de longueur, d'inertie pourront être testées et la sensibilité des résultats pourra alors être analysée. L'ensemble des limites des méthodes pourra alors être déterminé et des modèles / observateurs plus complexes incluant l'ensemble des degrés de liberté du mannequin pourront être synthétisés et la démonstration de leurs capacités effectives réalisée. La connaissance des couples articulaires devrait permettre de valider la méthodologie proposée. Des réglages supplémentaires visant à affiner la robustesse des observateurs en fonction des différents paramètres (retards, seuil lésionnel, incertitudes ...) pourrait également être envisagés.

Enfin, une stratégie de commande « optimale » du mannequin pourra être étudiée en fonction de diverses possibilités imposées. Par exemple, une rotation partielle d'une épaule associée à une mobilité d'un bras moins rapide peut être imposées facilement et la stratégie de commande permettant de garantir la stabilité assise la plus « large » possible, développée à partir de ces caractéristiques.

Ce mannequin robotisé peut également être numérisé selon un modèle CAO. On peut définir des critères de performance liés à l'effort nécessaire à mettre en œuvre afin que le mannequin soit stabilisé et le coût énergétique associé. Ces critères peuvent être inclus dans un cahier des charges pré-conceptionnel en amont de la fabrication d'un fauteuil roulant ou d'un siège d'un moyen de transport. Cela permettra d'adapter la position assise d'une personne blessée médullaire et d'optimiser le coût de fabrication ainsi que la dépense énergétique.





**Figure 64: modèle numérique du mannequin robotisé**

Enfin, le mannequin robotisé pourrait être placé sur une plateforme expérimentale, il sera donc en mesure de reproduire les mouvements observés au cours de la campagne expérimentale de Blandeau (2018) et être soumis à des perturbations externes à intensité variable. Ce cadre expérimental permettra de valider l'ensemble des modèles biomécaniques proposés dans ce manuscrit et de tester des configurations où les mouvements sont symétriques ou dissymétriques. Les résultats obtenus peuvent être confrontés aux estimations fournies par les observateurs et de conclure quant à la fiabilité de l'approche proposée. Ces cadres, théorique et expérimental, permettront de réunir l'automatique et la biomécanique au service du handicap.

# CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES

## Articles de revues scientifiques

1. Srihi H, Guerra T-M, Pudlo P, Nguyen A-T., Blandeau M. (2022). Recovering control parameters in seated position for people with medullar injury. Modelling, Measurement and Control C, Vol.83, NO.1-4, pp. 21-27 [DOI= 10.18280/mmc\_c.831-404].
2. Srihi H, Guerra T-M, Nguyen A-T, Pudlo P and Dequidt A (2021). Cascade Descriptor Observers: Application to Understanding Sitting Control of Persons Living with Spinal Cord Injury. Front. Control. Eng. 2 :710271. [DOI : 10.3389/fcteg.2021.710271].

## Conférences internationales avec comité de sélection

1. Guerra T-M, Srihi H, Dequidt A, Nguyen Anh-Tu, Pudlo P (2024). Understanding seated stability in spinal cord injury using an assymetric two arms biomechanical observer. 63rd Conference on Control and Decision, Milan 2024. (Soumis)
2. Srihi H, Guerra T-M, Pudlo P, Nguyen A-T (2022). Reconstructing human torques of people with medullar injury via discrete time nonlinear cascade observers, ICONS-IFAC, Cluj-Napoca, Romania. [DOI.org/10.1016/j.ifacol.2022.07.608].
3. Guerra T.M, Blandeau M, Nguyen A.T, Srihi H, Dequidt A. (2020). Stabilizing unstable biomechanical model to understand sitting stability for persons with spinal cord injury. IFAC-PapersOnLine, World C. Berlin, Gemany. [DOI.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2225].

## Conférences nationales avec comité de sélection

1. Srihi H, Guerra T-M, Pudlo P, Dequidt A, Nguyen A-T (2024). Etude de la posture assise chez les sujets paraplégiques : de la modélisation à la reconstruction des efforts internes. Congres Handicap 2024, 13<sup>ième</sup> édition de la conférence sur les Aides Techniques pour personnes en situation de Handicap, Paris, France.
2. Srihi H, Guerra T-M, Pudlo P, Nguyen A-T (2022). Estimation des paramètres du contrôle en position assise chez la Personne atteinte d'une lésion médullaire. Congres Handicap 2022, 12<sup>ième</sup> édition de la conférence sur les Aides Techniques pour personnes en situation de Handicap, Paris, France.
3. Srihi H, Blandeau M, Molenaar C, Guerra T-M, Pudlo P (2021). Une nouvelle approche de stabilité en position assise chez les personnes vivant avec une lésion médullaire. 27<sup>ième</sup> Congres de la Société Francophone Posture Equilibre Locomotion (SOFPEL), faculté de médecine, pôle de recherche, Lille, France.
4. Srihi H, Blandeau M, Molenaar C, Guerra T-M, Pudlo P (2021). Les Stratégies de Stabilisation pour les personnes vivant avec une Lésion médullaire. 27<sup>ième</sup> Congres de la Société Francophone Posture Equilibre Locomotion (SOFPEL), faculté de médecine, pôle de recherche, Lille, France.

## Prix scientifiques

1. Prix Thierry Célérier Femmes et Sciences promotion 2022. Rennes
2. Prix de la meilleure communication au congrès Handicap 2022. Paris
3. Prix du meilleur poster scientifique au titre de la journée régionale des doctorants en automatique en 2021. Compiègne

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abraham, L., Loeb, G., 1985. The distal hind-limb musculature of the cat. *Experimental Brain Research* 58, 583-593.
- Allison GT, Singer KP. Assisted reach and transfers in individuals with tetraplegia: towards a solution. *Spinal Cord*. 1997 ;35(4): 217-22. Epub 1997/04/01.
- Alm, M., E. Gutierrez, C. Hultling, and H. Saraste, "Clinical evaluation of seating in persons with complete thoracic spinal cord injury," *Spinal Cord*, vol. 41, no. 10, pp. 563–571, 2003.
- Altmann, V. C., Groen, B. E., van Limbeek, J., Vanlandewijck, Y. C. & Keijsers, N. L. W. (2013) Reliability of the revised wheelchair rugby trunk impairment classification system. *Spinal Cord*. 51 (12), 913–918.
- Amarantini, D. Estimation des efforts musculaires à partir de données périphériques : application à l'analyse de la coordination pluri-articulaire. *Sciences du Vivant [q-bio]*. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2003. Français. NNT: tel-00557146f.
- An CM, Park YH. The effects of semi-immersive virtual reality therapy on standing balance and upright mobility function in individuals with chronic incomplete spinal cord injury: A preliminary study. *J Spinal Cord Med* 2018; 41:223–9. <https://doi.org/10.1080/10790268.2017.1369217>.
- An, K.N., Kwak, B.M., Chao, E.Y., Morrey, B.F., 1984. Determination of muscle and joint forces: a new technique to solve the indeterminate problem. *Journal of Biomechanical Engineering* 106, 364-367.
- Anson C, Hepherd C. Incidence of secondary complications in spinal cord injury. *Int J Rehabil Research* 1996; 19:55-66.
- Ashcraft, M.H. and E.P. Kirk (2001), "The relationships among working memory, math anxiety, and performance", *Journal of Experimental Psychology-General*, 130(2), pp. 224-237.
- Assaiante, C. Action et représentation de l'action au cours de l'enfance et de l'adolescence : une approche fonctionnelle. Dans *Movement & Sport Sciences* 2011/3 (n° 74), pages 65 à 79.
- Arcak, M., Angeli, D., Sontag, E.: A unifying integral ISS framework for stability of nonlinear cascades. *SIAM Journal of Control and Optimization* 40(6), 1888–1904 (2002).
- Bailes, J. E., Petschauer, M., Guskiewicz, K. M., & Marano, G. (2007). Management of cervical spine injuries in athletes. *Journal of athletic training*, 42(1), 126-134.
- Bailey CS, Marcel F Dvorak., Kenneth C Thomas., Michael C Boyd., Scott Paquett., Brian K Kwon., John France., Kevin R Gurr., Stewart I Bailey., Charles G Fisher. Comparison of thoracolumbosacral orthosis and no orthosis for the treatment of thoracolumbar burst fractures: interim analysis of a multicenter randomized clinical equivalence trial. *J Neurosurg Spine*. 2009 Sep; 11(3): 295-303.
- Bauman, W. A., Spungen, A. M., Wang, J., Pierson, R. N. J. & Schwartz, E. (1999) Continuous loss of bone during chronic immobilization: a monozygotic twin study. *Osteoporosis international: a journal established as result of cooperation between the european foundation for osteoporosis and the national osteoporosis foundation of the USA*. 10(2), 123-127.
- Bergmark A. 1989. Stability of the lumbar spine – a study in mechanical engineering. *Acta Orthop Scand Suppl*. 230 :1-54.

- Bernal, M., Guerra, T.M., Kruszewski, A.: A membership-function-dependent approach for stability analysis and controller synthesis of Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems* 160(19), 2776–2795 (2009).
- Beuret-Blanquart F, Boucand M-H. Vieillissement chez les blessés médullaires. *Ann Réadapt Médecine Phys.* nov 2003;46(9):578-91.
- Bian L., Leslie S.-J., Cimpian A., Gender stereotypes about intellectual ability emerge early and influence children's interests, *Science*, 2017, 355, p. 389.
- Biely S, Smith SS, Silfies SP. Clinical Instability of the Lumbar Spine: Diagnosis and Intervention. 18:8, (2006).
- Biering-Sorensen, F., Nielsen, J. B. & Klinge, K. (2006) Spasticity-assessment: a review. *Spinal Cord*. 44 (12), 708–722.
- Bjerkefors, A., Carpenter, M. G. & Thorstensson, A. (2007) Dynamic trunk stability is improved in paraplegics following kayak ergometer training. *Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports*. 17 (6), 672–679.
- Blandeau, Mathias. Modélisation et caractérisation de la stabilité en position assise chez les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière. *Biomécanique [physics.med-ph]*. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2018. Français. NNT: 2018VALE0021. tel-01861272.
- Blandeau, M., Ciska, M., Gabrielli, F., Gagnon, D., Pudlo, Ph., (2017): Modelling seated stability of subjects with paralysis of trunk and lower limb muscles. 23rd Congress of the European Society of Biomechanics, Jul 2017, Spain: (ESB ([hal-03414969](#))).
- Boccardi S, Ferrarin M. Récupération de la station debout et de la marche chez les paraplégiques. *Kinésithér Sci.* 2005 ; 460 :1-9.
- Bollé, P (2002). Le travail des femmes dans le monde, *Problèmes économiques*, N°2759, 1<sup>er</sup> Mai.
- Boswell-Ruys, C. L., Harvey, L. A., Delbaere, K. & Lord, S. R. (2010) A Falls Concern Scale for people with spinal cord injury (SCI-FCS). *Spinal cord*. 48 (9), 704–709.
- Bouarar T., Guelton K., Manamanni N. (2010). Robust fuzzy Lyapunov stabilization for uncertain and disturbed Takagi–Sugeno descriptors. *ISA Transactions* 49 (4), 447-461.
- Bouisset, S. et Zattara, M. (1987). Biomechanical study of the programming of anticipatory postural adjustments associated with voluntary movement. *Journal of biomechanics*, 20(8):735–742.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994) *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Branco, F., Cardenas, D.D. & Svircev, J.N. Spinal cord injury: a comprehensive review. *Phys Med Rehabil Clin N am* 18, 651-679, v (2007).
- Brotherton, S. S., Krause, J. S. & Nietert, P. J. A Pilot Study of Factors Associated with Falls in Individuals with Incomplete Spinal Cord Injury. *The journal of Spinal Cord Medicine*. 30 (3), 243-250.
- Buchanan T. S., Lloyd D. G., Manal K., Besier T. F. Neuromusculoskeletal modeling: Estimation of muscle forces and joint moments and movements from measure-ments of neural command. *Journal of Applied Biomechanics*, 20(4):367–395, 2004.

- Castro, M. J., Apple Jr, D. F., Hillegass, E. A. & Dudley, G. A. (1999) Influence of complete spinal cord injury on skeletal muscle cross-sectional area within the first 6 months of injury. *European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology*. 80 (4), 373–378.
- Castro, M. J., Apple Jr, D. F., Staron, R. S., Campos, G. E. R. & Dudley, G. A. (1999) Influence of complete spinal cord injury on skeletal muscle within 6 mo of injury. *Journal of Applied Physiology*. 86 (1), 350–358.
- Caviglia, A. L'intérêt de la réalité virtuelle dans la rééducation de la marche et de l'équilibre chez le blessé médullaire incomplet. *Médecine humaine et pathologie*. 2020. Dumas-03081745.
- Chadli M., Darouach M. (2012). Novel bounded real lemma for discrete-time descriptor systems: Application to  $H^\infty$  control design. *Automatica* 48 (2), 449-453.
- Chadli, M., Karimi, H. R. & Shi, P. (2014) On stability and stabilization of singular uncertain Takagi–Sugeno fuzzy systems. *Journal of the Franklin Institute*. 351 (3), 1453–1463.
- Chae, J., Yang, G., Park, B. K., & Labatia, I. (2002). Muscle Weakness and Cocontraction in Upper Limb Hemiparesis: Relationship to Motor Impairment and Physical Disability. *Neurorehabilitation and Neural Repair*, pp. 241-248 vol. 16.
- Chaillet, A., Loria, A.: Necessary and sufficient conditions for uniform semiglobal practical asymptotic stability: Application to cascaded systems. *Automatica* 42(11), 1899–1906 (2006).
- Cardenas D.D., Bryces T.N., Shem K., Richards J.S., Elhefni H. Gender and minority differences in the pain experience of people with spinal cord injuries. *Arch. Phys. Med. Rehabil.*, 2004, 85, 1774-1781.
- Chen J., Patton R.J., Zhang H.Y. (1996). Design of unknown input observers and robust fault detection filters. *International Journal of control* 63 (1), 85-105.
- Cheselden, W. *Osteographia, or the anatomy of the bones* (1733).
- Chin, L., Mesfin, F. & Dawodu, S. Spinal Cord Injuries: Practice Essentials, Background, Anatomy. *Medscape* : [emedicine.medscape.com/article/793582-overview](https://emedicine.medscape.com/article/793582-overview) (2015).
- Cholewicki, J., McGill, S.M., 1994. EMG assisted optimization: a hybrid approach for estimating muscle forces in an indeterminate biomechanical model. *Journal of Biomechanics* 27, 1287-1289.
- Commission Européenne. (2010). « *Stratégie européenne 1010-2020 en faveur des personnes handicapées : un engagement renouvelé pour une Europe sans entrave* ».
- Crisco III, JJ. Panjabi MM. The intersegmental and multisegmental muscles of the lumbar spine, 1991. A biomechanical model comparing lateral stabilizing potential. *Spine*, 16, 793-9.
- Dauty, M., Perrouin Verbe, B., Maugars, Y., Dubois, C. & Mathe, J. (2000) Supralesional and sublesional bone mineral density in spinal cord-injured patients. *Bone*. 27 (2), 305–309.
- De Morand A. *Pratique de la rééducation neurologique*. 2010.
- De vivo M.J., Krause J.S., Lammertse D.P. Recent trends in mortality and causes of death among persons with spinal cord injury. *Arch. Phys. Med. Rehabil.*, 1999, 80, 1411-1419.
- Dennerlein, J.T., Diao, E., Mote, C.D., Rempel, D.M., 1998. Tensions of the flexor digitorum superficialis are higher than a current model predicts. *Journal of Biomechanics* 31, 295- 301.

Désert JF. Les lésions médullaires traumatiques et médicales (paraplégies et tétraplégies). Dans : Déficiences motrices et situations de handicaps : aspects sociaux, psychologiques, médicaux, techniques et législatifs, troubles associés. Ed APF. 504 p. 2002: 235-45.

Dietz, V. (1994). Neuronal basis of stance regulation: Interlimb coordination and antigravity receptor function. In SP. Swinnen, H. Heuer, J. Massion and P. Casaer (Eds.), Interlimb coordination: neural, dynamical and cognitive constraints (pp: 167–178). San Diego, CA: Academic Press.

Dumas, R., Aissaoui, R., de Guise, J.A., 2004. A 3D Generic Inverse Dynamic Method using Wrench Notation and Quaternion Algebra. *Comput. Methods Biomech. Biomed. Engin.* 7, 159–166. doi:10.1080/10255840410001727805.

Dumas, R., Nicol, E. & Chèze, L. (2007) Influence of the 3D Inverse Dynamic Method on the Joint Forces and Moments During Gait. *Journal of Biomechanical Engineering.* 129 (5), 786–790.

Dumont RJ, Okonkwo DO, Verma S, Hurlbert RJ, Boulos PT, Ellegala DB & Dumont AS. (2001). Acute spinal cord injury, part I: pathophysiologic mechanisms. *Clinical neuropharmacology* 24, 254- 264.

Encaoua, J. Echelle ASIA : Rappel indispensable. 13 Novembre 2019 sur la plateforme Kineakine.

Engsberg, J. R., Standeven, J. W., Shurtleff, T. L., Eggars, J. L., Shafer, J. S., & Naunheim, R. S. (2013). Cervical spine motion during extrication. *The Journal of emergency medicine*, 44(1), 122-127.

Ennuyer B. Les malentendus de l'« autonomie » et de la « dépendance » dans le champ de la vieillesse. *Le sociographe.* 2013; HS 6: 139-59.

Erdemir, A., McLean, S., Herzog, W., and Van den Bogert, A.J. Model-based estimation of muscle forces exerted during movements. *Clinical biomechanics (Bristol, Avon)*, 22(2):131–54, feb 2007.

Estrada-Manzo, V., Lendek, Z., Guerra, T.M., 2016. Generalized LMI observer design for discrete-time nonlinear descriptor models. *Neurocomputing* 182, 210–220.

Estrada-Manzo V., Lendek Zs., Guerra T.M., Pudlo P. Controller design for discrete-time descriptor models: a systematic LMI approach. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 23 (5) (2015), pp. 1608-1621.

Fang, Y., Morse, L.R., Nguyen, N., Tsantes, N.G., Troy, K.L., 2017. Anthropometric and biomechanical characteristics of body segments in persons with spinal cord injury. *Journal of Biomechanics* 55, 11–17.

Gagnon, D., Duclos, C., Desjardins, P., Nadeau, S., Danakas, M., 2012. Measuring dynamic stability requirements during sitting pivot transfers using stabilizing and destabilizing forces in individuals with complete motor paraplegia. *J. Biomech.* 45, 1554-1558.

Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J. & Chilali, M. (1994) 'The LMI control toolbox', in *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. December 1994 pp. 2038–2041 vol.3.

Gandemer, L., (2016). Son et posture thèse acoustique, préservation de l'équilibre postural.

Gaudez, C., Aptel, M (2008). Les mécanismes neurophysiologiques du mouvement, base pour la compréhension du geste. Dans *le travail humain* 2008/4 Vol. 71, pages 385 à 404. Editions presses universitaires de France. DOI 10.3917/th.714.0385.

Gauthier, C., Gagnon, D., Grangeon, M., Jacquemin, G., Nadeau, S., Masani, K. & Popovic, M. R. (2013) Comparison of multidirectional seated postural stability between individuals with spinal cord injury and able-bodied individuals. *J Rehabil Med.* 45:47 – 54.

Godin, C. Complications psycho-sociales chez les patients victimes d'une lésion médullaire traumatique. Médecine humaine et pathologie. 2018. dumas-01888665.

Gorce P., Boughiden M.L. (2003), Biomechanical modelling of "seat to stand process" on electrical wheelchair. AMSE journals, modelling, measurement and control. Vol 63, 58-71.

Grangeon, M., Gagnon, D., Gauthier, C., Jacquemin, G., Masani, K., Popovic, M.R., 2012. Effects of upper limb positions and weight support roles on quasi-static seated postural stability in individuals with spinal cord injury. *Gait Posture* 36, 572–579.

Grigorenko A, Bjerkefors A, Rosdahl H, Hultling C, Alm M, Thorstensson A. Sitting balance and effects of kayak training in paraplegics. *J Rehabil Med*. 2004 ;36(3) :110-6. Epub 2004/06/24.

Gripá H.F., Saberria A., Johansen T.A. (2012). Observers for interconnected nonlinear and linear 467 systems. *Automatica*, 48 (7), 1339-1346.

Guelton, K. (2003). Thèse en automatique soutenue le 16 décembre 2003 : Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station debout. Mise en oeuvre d'observateurs flous sous forme descripteur. Université de Valenciennes.

Guelton, K., Delprat, S., & Guerra, T. M. (2008). An alternative to inverse dynamics joints torques estimation in human stance based on a Takagi–Sugeno unknown- inputs observer in the descriptor form. *Control Engineering Practice*, 16(12), 1414–1426.

Guerra, T.M., Guelton, K., & Delprat, S. (2004). A class of nonlinear observers in descriptor form: LMI based design with applications in biomechanics. In *Proc. of the workshop IFAC/AFNC*.

Guerra, T. M., Estrada-Manzo, V. & Lendek, Z. (2015) Observer design for Takagi–Sugeno descriptor models: An LMI approach. *Automatica*. 52154–159.

Guerra, T. M., Bernal, M. & Blandeau, M. (2018) 'Reducing the number of vertices in some TakagiSugeno models: example in the mechanical field', in *IFAC-PapersOnLine*. June 2018 Faro, Portugal: p.

Hadders-Algra M. Development of postural control during the first 18 months of life. *Neural Plast*. 2005;12(2-3):99-108-272.

Halpern, P., Siebzeher, M.I., Aladgem, D., Sorkine, P., Bechar, R, 2005. Non-collision injuries in public buses: a national survey of a neglected problem. *Emergency medicine journal: EMJ* 22, 108-110.

Hamonet Cl. La notion de handicap. *Ann Readapt Med Phys*. 2003; 46: 521-4.

Harding, D.C., Brandt, K.D., Hillberry, B.M., 1993. Finger joint force minimization in pianists using optimisation techniques. *Journal of Biomechanics* 26, 1403-1412.

Harvey, L. Ph D. Management of spinal cord injuries: a guide for physiotherapists. 2008. 23.

Harvey LA, Ristev D, Hossain MS, Hossain MA, Bowden JL, Boswell-Ruys CL, et al. Training unsupported sitting does not improve ability to sit in people with recently acquired paraplegia: a randomised trial. *J Physiother*. 2011 ;57(2) :83-90. Epub 2011/06/21.

Herzog, W., Leonard, T., 1991. Validation of optimization models that estimate the forces exerted by synergistic muscles. *Journal of Biomechanics* 24, 31-39.

Hug, F. Utilisation de l'électromyographie dans l'évaluation de la fonction musculaire et interet en pratique clinique (2023). *EM Consult* [26-010-B-70] - DOI: 10.1016/S1283-0887(23)89152-6.

Ichalal D., Guerra T.M. (2019). Decoupling unknown input observer for nonlinear quasi-LPV systems, IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC), 3799-3804.

Janssen-Potten, Y.J.M., Seelen, H.A.M., Drukker, J., Reulen, J.P.H., Drost, M.R., 1999. Postural muscle responses in the spinal cord injured persons during forward reaching. *Ergonomics* 42, 1200–1215.

Jinha, A., Ait-Haddou, R., Herzog, W., 2005. Predictions of co-contraction depend critically on degrees of freedom in the musculoskeletal model. *Journal of Biomechanics*, sous presse.

Jones, C. F. & Clarke, E. C. Engineering approaches to understanding mechanisms of spinal column injury leading to spinal cord injury. *Clinical Biomechanics* 64, 69-81 (2019).

Johansson, R., Magnusson, M. & Akesson, M. (1988) Identification of human postural dynamics. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 35 (10), 858–869.

John, L. T., Cherian, B. & Babu, A. (2010) Postural control and fear of falling in persons with low-level paraplegia. *The Journal of Rehabilitation Research and Development*. 47 (5), 497.

Johansen, T.A., Shorten, R., Murray-Smith, R.: On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8(3), 297– 313 (2000).

Kapandji, A. I. (2005a) Anatomie fonctionnelle I : Membres supérieurs. *Physiologie de l'appareil locomoteur*. 6th edition. Maloine.

Kapandji, A. I. (2005b) Anatomie fonctionnelle III : Tête et rachis. 6th edition. Maloine.

Khalil, W. & Dombre, E. (2004) Google-Books-ID: nyrY0Pu5kl0C. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Butterworth-Heinemann.

Kim, C. M., & Eng, J. J. (2003). The Relationship of Lower-Extremity Muscle Torque to Locomotor Performance in People with Stroke. *PHYS THER*, 83(1), 49-57.

Kirshblum S., Burns S., Biering-Sorensen F., Donovan W., Graves D., Jha A., Johansen M., Jones L., Mulcahey M. (2011) International standards for neurological classification of spinal cord injury. *J. Spinal Cord Med*. 34535–546.

Koenig, D. & Mammar, S. (2002) Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 47 (12), 2057–2062.

Komi, P.V., Salonen, M., Jarvinen, N., Kokko, O., 1987. In vivo registration of Achilles tendon forces in man. *International journal of sport medicine* 8, 3-8.

Kruszewski, A., Sala, A., Guerra, T.M., Arino, C.: A triangulation approach to asymptotically exact conditions for fuzzy summations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 17(5), 985– 994 (2009).

Kukke SN, Triolo RJ. The effects of trunk stimulation on bimanual seated workspace. *IEEE Trans Neural Syst Rehabil Eng*. 2004 ;12(2): 177-85. Epub 2004/06/29.

Kursa, K., Diao, E., Lattanza; L. Rempel, D., 2005. In vivo forces generated by finger flexor muscles do not depend on the rate of fingertip loading during an isometric task. *Journal of Biomechanics*, sous presse.

Lechner HE, Feldhaus S, Gudmundsen L, Hegemann D, Michel D, Zach GA, et al. The shortterm effect of hippotherapy on spasticity in patients with spinal cord injury. *Spinal Cord*. 2003;41(9):502-5. Epub 2003/08/23.



- Lambrech JM, Audu ML, Triolo RJ, Kirsch RF. Musculoskeletal model of trunk and hips for development of seated-posture-control neuroprosthesis. *J Rehabil Res Dev*. 2009 ;46(4): 515-28. Epub 2009/11/03.
- Laurain, T., Lauber, J. & Palhares, R. M. (2015) 'Observer design to control individual cylinder spark advance for idle speed management of a SI engine', in June 2015 pp. 262–267.
- Lee, T. Q., Shapiro, T. A. & Bell, D. M. (1997) Biomechanical properties of human tibias in long-term spinal cord injury. *Journal of rehabilitation research and development*. 34 (3).
- Lelong, C., Drevet, J. G., Chevallier, R., & Phelip, X. (1988). Biomécanique rachidienne et station assise. *Revue du Rhumatisme*, 55(5), 375-80.
- Lemay V. étude des déterminants de la mobilité en fauteuil roulant manuel et leur association avec la participation sociale d'usagers expérimentés ayant une lésion de la moelle épinière, 2011, p.160. Mémoire présentée dans le cadre du programme de maîtrise en médecine expérimentale pour l'obtention du grade de maître des sciences, médecine, faculté des études supérieures de l'université Laval, 2011.
- Lendek Zs., Babuska R., De Schutter B. (2008). Stability of cascaded fuzzy systems and observers. 483 *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 17 (3), 641-653.
- Lendek, Zs., Guerra, T. M., & Babuška, R. (2010). On non-PDC local observers for TS fuzzy systems. In *Proc. IEEE int. conf. on fuzzy systems* (pp. 1–7). Brisbane, Australia.
- Lendek, Z., Guerra, T. M., Babuska, R. & de Schutter, B. (2011) *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer.
- Lendek, Z., Nagy, Z., and Lauber, J. (2018). Local stabilization of discrete-time TS descriptor systems. *Eng. Appl. Artif. Intelligence* 67, 409–418. DOI :10.1016/j. engappai.2017.09.006
- Leijnse, J.N., 1998. A method and device for measuring force transfers between the deep flexors in the musician's hand. *Journal of Biomechanics* 31, 773-779.
- Lepage, M., Leblanc-Roy, Ph., Champoux, A., et Grenier-Vallée, M. Développement d'un outil d'évaluation de l'équilibre assis chez les individus ayant une lésion à la moelle épinière : Une étude exploratoire. Programme de physiothérapie, École de réadaptation Faculté de Médecine. Mémoire présenté à la Faculté des Études Supérieures en vue de l'obtention du grade de maître en physiothérapie (2012).
- Li, Y., Levine, W. S. & Loeb, G. E. (2012) A Two-Joint Human Posture Control Model with Realistic Neural Delays. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*. 20 (5), 738–748.
- Liu, X., Zhang, Q.: New approaches to  $H^\infty$  controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica* 39(9), 1571–1582 (2003).
- Lofberg, J., 2004. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. Presented at the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 284–289.
- Losero, R., Lauber, J. & Guerra, T.-M. (2018) Virtual strain gauge based on a fuzzy discrete angular domain observer: Application to engine and clutch torque estimation issues. *Fuzzy Sets and Systems*.
- Loria, A., Panteley, E.: Cascaded nonlinear time-varying systems: Analysis and design. In: *Advanced Topics in Control Systems Theory*, pp. 23–64. Springer, Heidelberg (2005).

Lucas D.B. Bresler B. 1961. Stability of the ligamentous spine. Biomechanics Laboratory, University of California at Berkeley, 1-41.

Ma, X.-J., Sun, Z.-Q., He, Y.-Y.: Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 6(1), 41–51 (1998).

Mac Kinley W., Meade M.A., Kirshblum S., Barnard B. Outcomes of early surgical management versus late or no surgical intervention after acute spinal cord injury. Arch. Phys. Med. Rehabil., 2004, 85, 1818-1825.

Mankar B., N., H. Benmassaoud, H. Arabi, I. Bendeddouche, et Hajjaj Hassouni N. 2010. « Résultats fonctionnels et handicap après rééducation des lésés médullaires au Maroc ». Annals of Physical and Rehabilitation Medicine.

Maggioni, M., Bertoli, S., Margonato, V., Merati, G., Veicsteinas, A. & Testolin, G. (2003) Body composition assessment in spinal cord injury subjects. Acta diabetologica. 40 Suppl 1S183–186.

Marry, C. Les femmes ingénieurs, une révolution respectueuse. Paris : Belin, coll. Perspectives sociologiques, 2004.

Masani, K., Popovic, M. R., Nakazawa, K., Kouzaki, M. & Nozaki, D. (2003) Importance of Body Sway Velocity Information in Controlling Ankle Extensor Activities During Quiet Stance. Journal of Neurophysiology. 90 (6), 3774–3782.

Massion J. Postural control system. Curr Opin Neurobiol 1994; 4: 877–87.

Massion J. Cerveau et Motricité. Fonctions sensori-motrices. Presses Universitaires de France, Paris (1997).

Massion J. Postural control systems in developmental perspective. Neurosci Biobehav Rev. juill 1998 ;22(4) :465-72.

Mauger Ch. (2023). Place de la femme dans la recherche en sciences : un parcours semé d’embauche. Article publié le 09 mars 2023. Educpros/Enquêtes.

Michael Schunke, Erik Schulte : Atlas d'anatomie Prométhée : Tome 1, Anatomie générale et système locomoteur, 2006, 77-79.

Miele, V.J., Panjabi, M. M. & Benzel, E.C. (2012): Anatomy and biomechanics of the spinal column and cord. Handbook of clinical neurology, 1<sup>st</sup> ed., Vol. 109. Elsevier B.V. DOI: 10.1016/B978-0-444-52137-8.00002-4.

Milosevic, M., Masani, K., Kuipers, M. J., Rahouni, H., Verrier, M. C., McConville, K. M. V. & Popovic, M. R. (2015) Trunk control impairment is responsible for postural instability during quiet sitting in individuals with cervical spinal cord injury. Clinical Biomechanics. 30 (5), 507–512.

Milosevic, M., Gagnon, D.H., Gourdou, P., Nakazawa, K., 2017. Postural regulatory strategies during quiet sitting are affected in individuals with thoracic spinal cord injury. Gait Posture 58, 446–452.

Moghaddam F. (2020). Sciences : les femmes toujours très sous-représentées en France, article publié le 17 octobre 2020 à 10h45. Radio France: la recherche et les découvertes scientifiques.

Mohammad, S., Guerra, T. M. & Pudlo, P. (2017) Method and device assisting with the electric propulsion of a rolling system, wheelchair kit comprising such a device and wheelchair equipped with such a device.

Moseley GL, Hodges PW, Gandevia SC. External Perturbation of the Trunk in Standing Humans Differentially Activates Components of the Medial Back Muscles. *J Physiol.* 1 mars 2003;547(Pt 2):581-7.

Nashner, L. M. & McCollum, G. (1985) The organization of human postural movements: A formal basis and experimental synthesis. *Behavioral and Brain Sciences.* 8 (1), 135–150.

Nelson, A. L., Groer, S., Palacios, P., Mitchell, D., Sabharwal, S., Kirby, R. L., Gavin-Dreschnack, D. & Powell-Cope, G. (2010) Wheelchair-Related Falls in Veterans with Spinal Cord Injury Residing in the Community: A Prospective Cohort Study. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation.* 91 (8), 1166–1173.

Netter F, Atlas d'anatomie humaine, éd. Elsevier Masson 2004.

Netter, F. H., & Scott, J. (2019). Atlas d'anatomie humaine. (S.l.) : Elsevier Health Sciences.

Nicard, Q. Passeport Santé, Parties du corps, Tronc : Journaliste scientifique. Article publié le 19 Juillet 2016.

Nightingale, R. W., Mcelhaney, J. H., Richardson, W. J., Best, T.M., Myers, B.S. & Durham, N.C. (1996) Experimental impact injury to the cervical spine: relating motion of the head and the mechanism of injury. *The journal of bone and joint surgery,* 78 (3), 412-21.

O'Sullivan, P. B., Dankaerts, W., Burnett, A. F., Farrell, G. T., Jefford, E., Naylor, C. S. & O'Sullivan, K. J. (2006) Effect of different upright sitting postures on spinal-pelvic curvature and trunk muscle activation in a pain-free population. *Spine.* 31 (19), E707–E712.

Ohtake, H., Tanaka, K. & Wang, H. O. (2001) 'Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept', in July 2001 pp. 127–132.

Oliveira, M. C. de & Skelton, R. E. (2001) 'Stability tests for constrained linear systems', in *Perspectives in robust control. Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer, London. pp. 241–257.

OMS. (1980): « International Classification of Impairments, Disabilities, and Handicaps: A Manual of Classification Relating to the Consequences of Disease ». 1980. *International Journal of Rehabilitation Research* 3 (4) : 606.

OMS. (1988) : institut national de la santé et de la recherche médicale, centre technique national d'études et de recherches sur les handicaps et les inadaptations. Classification internationale des handicaps : déficiences, incapacités et désavantages. Un manuel de classification des conséquences des maladies. PUF. 1988.

OMS. (2001) : éd. 2001. Classification internationale du fonctionnement, du handicap et de la santé : CIF. Genève.

OMS. (2013) : Lésion de la moelle épinière, article de 19 decembre 2013.

Ortiz A., Guerra T.-M., Estrada V., Lauber J. (2021). Choosing an Adequate convex structure for controller and observer gains in Takagi-Sugeno control systems. *IFAC-PapersOnLine*, 54(4), 206-211.

Osborn, M (2000). Science policies in the European union: Promoting excellence through mainstreaming gender equality, Luxembourg, ETAN network in Women and Science.

Oyinbo, C. A. (2011). Secondary injury mechanisms in traumatic spinal cord injury: a nugget of this multiply cascade. *Acta Neurobiol Exp (Wars)*, 71(2), 281-99.

- Pandyan AD, Gregoric M, Barnes MP, Wood D, Van Wijck F, Burridge J, et al. Spasticity: clinical perceptions, neurological realities and meaningful measurement. *Disabil Rehabil.* 2005;27(1–2):2–6.
- Panjabi MM. The stabilizing system of the spine. Part II. Neutral zone and instability hypothesis. *J Spinal Disord.* déc 1992;5(4):390-6; discussion 397.
- Panjabi, M. M. (1992b) The Stabilizing System of the Spine. Part II. Neutral Zone and Instability Hypothesis. *Journal of Spinal Disorders.* 5 (4), 390–397.
- Panjabi, M. M. (1992a) The stabilizing system of the spine. Part I. Function, dysfunction, adaptation, and enhancement. *Journal of spinal disorders & techniques.* 5 (4), 383–389.
- Pelissier J., Brun V., Enjalbert M. *Posture, équilibration et médecine de rééducation.* [s.l.], Editions Masson, 1993. 290 p.
- Pérennou D. *Physiologie et physiopathologie du contrôle postural.* *Lett Médecine Phys Réadapt.* 1 sept 2012 ; 28(3) :120-32.
- Perrot, M. (2001). *Les femmes ou les silences de l’histoire*, Flammarion-Champs ; R. Pernoud, 1978, *La femme au temps des cathédrales*, Le livre de poche ; D. Gardey, 2011, *La dactylographe et l’expéditionnaire. Histoire des employés de bureau. 1890-1930*, Belin ; J. Rennes, 2007, *Le mérite et la nature, une controverse républicaine. L’accès des femmes aux professions de prestige*, Fayard.
- Perrot, M. (2020). Qu’est-ce qu’un métier de femme ? , dans « *les femmes ou les silences de l’histoire* » (2020), pages 297-305.
- Perrouin-Verbe, B. *La rééducation et la réadaptation des blessés médullaires*, Académie nationale de médecine séance du 7 Juin 2005. 189, N°6, 1159-1176.
- Pertici, V. *Récupération induite par l’Implantation d’Hydrogels, à base de Polymères et de Copolymères à Blocs, suite à un Traumatisme Médullaire : Analyse Comportementale, Électrophysiologique et Histologique* Soutenue publiquement le 18 Juillet 2014.
- Pierret, B. *Le fauteuil roulant chez le blessé médullaire, facteur déterminant de l’insertion sociale. État des lieux et effets de la locomotion en dévers sur les astreintes physiologiques.* Médecine humaine et pathologie. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0216. tel-01749619.
- Pistorius, M (2020). *La double discrimination des femmes en situation de handicap : “grande oubliée” des politiques publiques.* Article publié le 03 Décembre 2020.
- Potten YJ, Seelen HA, Drukker J, Reulen JP, Drost MR. Postural muscle responses in the spinal cord injured persons during forward reaching. *Ergonomics.* 1999 ;42(9) :1200-15. Epub 1999/09/30.
- Prieto, T. E., Myklebust, J. B., Hoffmann, R. G., Lovett, E. G. & Myklebust, B. M. (1996) Measures of postural steadiness: Differences between healthy young and elderly adults. *Ieee Transactions on Biomedical Engineering.* 43 (9), 956–966.
- Qu, X., Nussbaum, M. A. & Madigan, M. L. (2007) A balance control model of quiet upright stance based on an optimal control strategy. *Journal of Biomechanics.* 40 (16), 3590–3597.
- Rath, M. *Trunk Control and Postural Stability in Individuals with Spinal Cord Injury: Noninvasive Enabling Strategies and Modeling.* PhD thesis, UCLA, 2018.
- Rath, M, A. H. Vette, S. Ramasubramaniam, K. Li, J. Burdick, V. R. Edgerton, Y. P. Gerasimenko, and D. G. Sayenko, “Trunk stability enabled by noninvasive spinal electrical stimulation after spinal cord injury,” *Journal of neurotrauma*, vol. 35, no. 21, pp. 2540–2553, 2018.

- Reeves, N.P., Cholewicki, J., Narendra, K.S., 2009. Effects of reflex delays on postural control during unstable seated balance. *J. Biomech.* 42, 164–170.
- Reeves, N. P. & Cholewicki, J. (2003) Modeling the human lumbar spine for assessing spinal loads, stability, and risk of injury. *Critical reviews in biomedical engineering.* 31 (1–2).
- Roebenack, K., Lynch, A.: Observer design using a partial nonlinear observer canonical form. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 16(3), 333– 343 (2006).
- Roll JP. From eye to foot: A proprioceptive chain involved in postural control. *Posture and Gait.* Amsterdam: Excerpta Medica; 1988: 155–64.
- Ronen, Jacob, Diana Goldin, Vadim Bluvshstein, Beno Fishel, Ilana Gelernter, and Amiram Catz. 2004. "Survival after Nontraumatic Spinal Cord Lesions in Israel." *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation* 85 (9): 1499–1502.
- Runge CF, Shupert CL, Horak FB, Zajac FE (1999) Ankle and hip postural strategies defined by joint torques. *Gait Posture* 10: 161-170.
- Ryerson S, Byl NN, Brown DA, Wong RA, Hidler JM. Altered Trunk Position Sense and Its Relation to Balance Functions in People Post-Stroke: *J Neurol Phys Ther.* mars 2008;32(1):14- 20.
- Sala, A., Ariño, C.: Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem. *Fuzzy Sets and Systems* 158(24), 2671–2686 (2007).
- Sapsford RR, Hodges PW. Contraction of the pelvic floor muscles during abdominal maneuvers. *Arch Phys Med Rehabil.* août 2001;82(8):1081-8.
- Scherer, C. (2004). *Linear matrix inequalities in control theory.* Delft University.
- Seelen HA, Potten YJ, Huson A, Spaans F, Reulen JP. Impaired balance control in paraplegic subjects. *Journal of Electromyography and Kinesiology.* 1997 ;7(2) :149-60.
- Seelen, H. A. M., Janssen-Potten, Y. J. M., Drukker, J., Reulen, J. P. H. & Pons, C. (1998) Development of new muscle synergies in postural control in spinal cord injured subjects. *Journal of Electromyography and Kinesiology.* 8 (1), 23–34.
- Servant-Laval A. Chapitre 3: Tonus et posture. In : *Anatomie fonctionnelle - Psychomotricité 2ème année.* 2006. p. 31-8. (Université Pierre et Marie Curie).
- Shirado, O., Kawase, M., Minami, A. et Strax, T. E. (2004) Quantitative evaluation of long sitting in paraplegic patients with spinal cord injury. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation.* 85 (8), 1251–1256.
- Shirazi-Adl A, Parnianpour M. 1993. Nonlinear response analysis of the human ligamentous lumbar spine in compression. On mechanisms affecting the postural stability. *Spine*,18:147-58.
- Shirazi-Adl A. 2006. Analysis of large compression loads on lumbar spine in flexion and in torsion using a novel wrapping element. *J Biomech.* 39,267-75.
- Simpson, L.A., Eng, J.J., Hsieh, J.T.C.& Wolfe, D.L. (2012) The health and life priorities of individuals with spinal cord injury: A systematic review. *Journal of neurotrauma* 29 (8), 1548-1555. DOI : 10.1089/neu.2011.2226.

SFDRMG-HAS, 2005. Prévention des chutes accidentelles chez la personne âgée. Recommandations, in rapport à la SFDRMG en collaboration avec la haute autorité de la santé.

Solomonow, M., Zhou, B.H., Baratta, R.Y., Lu, Y., and Harris, M. (1999). Biomechanics of increased exposure to lumbar injury caused by cyclic loading: Part 1. Loss of reflexive muscular stabilization. *Spine (PhUa Pa 1976)* 24,2426-2434.

Sow-Courant, M. Parcours de soins et devenir des patients lésés médullaires de novo de plus de 70 ans pris en charge au CHU de Bordeaux entre avril et septembre 2017. Médecine humaine et pathologie. 2019. dumas-02495857.

Spungen, A. M. W., Jack Pierson, Richard N. Bauman, William A. (2000) Soft tissue body composition differences in monozygotic twins discordant for spinal cord injury. *Journal of Applied Physiology*. 88 (4), 1310–1315.

Stevens RD, Bhardwaj A, Kirsch JR & Mirski MA. (2003). Critical care and perioperative management in traumatic spinal cord injury. *Journal of neurosurgical anesthesiology* 15, 215-229.

Stokes, I., & Frymoyer, J. W. (1987). Segmental motion and instability. *Spine*, 12(7), 688-691.

Sturm., J.F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625–653, 1999. <http://sedumi.mcmaster.ca/>.

Suzuki, Y., Nomura, T. et Morasso, P. (2011) ‘Stability of a double inverted pendulum model during human quiet stance with continuous delay feedback control’, in 2011 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, EMBC. August 2011 pp. 7450–7453.

Takagi, T. et Sugeno, M. (1985) Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. SMC-15 (1), 116–132.

Tanaka, M. L., Ross, S. D. et Nussbaum, M. A. (2010) Mathematical modeling and simulation of seated stability. *Journal of Biomechanics*. 43 (5), 906–912.

Tanaka, K. et Wang, H. O. (2001) *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc.

Tanaka, K., Sugeno, M., 1992. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems* 45, 135–156.

Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K., Wang, H., 1999. Nonlinear model following control via Takagi-Sugeno fuzzy model. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, Vol. 3, San Diego, CA, USA, pp. 1837–1841.

Taso, M., Le Troter, A., Sdika, M., Ranjeva, J.-P., Guye, M., Bernard, M., & Callot, V. (2014). Construction of an in vivo human spinal cord atlas based on high-resolution MR images at cervical and thoracic levels: preliminary results. *Magma (New York, N.Y.)*, 27(3), 257–267. doi:10.1007/s10334-013-0403-6.

Tator, C. H. 1995. “Update on the Pathophysiology and Pathology of Acute Spinal Cord Injury.” *Brain Pathology (Zurich, Switzerland)* 5 (4): 407–13.

Thoumie P, Thevenin-Lemoine E, Josse L. Rééducation des paraplégiques et tétraplégiques adultes. *Traite de kinésithérapie médecine physique et réadaptation* (1995), 460-75.

Thrasher, T. A., Sin, V. W., Masani, K., Vette, A. H., Craven, B. C. & Popovic, M. R. (2010) Responses of the Trunk to Multidirectional Perturbations During Unsupported Sitting in Normal Adults. *Journal of Applied Biomechanics*. 26 (3), 332–340.

Thieffry, M., Kruszewski, A., Guerra, T.-M., Duriez, C., 2018. Reduced order control of soft robots with guaranteed stability, in: 2018 ECC, pp. 635–640.

Trevithick BA, Ginn KA, Halaki M, Balnave R. Shoulder muscle recruitment patterns during a kayak stroke performed on a paddling ergometer. *J Electromyogr Kinesiol*. 2007;17(1):74-9. Epub 2006/03/04.

Trouche, E (2020). La place des femmes dans la recherche scientifique, article publié le 7 avril 2020. *Echo sciences Grenoble Partageons les savoirs et les innovations*.

Tuan, H., Apkarian, P., Narikiyo, T., Yamamoto, Y. : Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 9(2), 324–332 (2001).

Tulsky DS, Kisala PA, Victorson D, Tate DG, Heinemann AW, Charlifue S, et al. Overview of the Spinal Cord Injury--Quality of Life (SCI-QOL) measurement system. *J Spinal Cord Med*. mai 2015;38(3):257-69.

Verheyden G, Nieuwboer A, Mertin J, Preger R, Kiekens C, De Weerd W. The Trunk Impairment Scale: a new tool to measure motor impairment of the trunk after stroke. *Clin Rehabil*. 1 mai 2004;18(3):326-34.

Verheyden G, Vereeck L, Truijen S, Troch M, Herregodts I, Lafosse C, et al. Trunk performance after stroke and the relationship with balance, gait and functional ability. *Clin Rehabil*. mai 2006 ;20(5) : 451-8.

Vette, A. H., Masani, K., Kim, J.-Y. & Popovic, M. R. (2009) Closed-Loop Control of Functional Electrical Stimulation-Assisted Arm-Free Standing in Individuals with Spinal Cord Injury: A Feasibility Study. *Neuromodulation : Technology at the Neural Interface*. 12 (1), 22–32.

Vigouroux, L. Modélisation biomécanique des systèmes musculo-squelettique sous déterminés. Analyse statique des tensions des tendons mobilisant le doigt. *Sciences du Vivant [q-bio]*. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT : tel-00011464.

Vuillerme N, Nougier V, Prieur JM. Can vision compensate for a lower limbs muscular fatigue for controlling posture in humans? *Neurosci Lett* 2001; 308: 103–6.

Walmsley, B., Hodgson, J., Burke, R., 1978. Forces produced by medial gastrocnemius and soleus muscles during locomotion in freely moving cats. *Journal of Neurophysiology* 41, 1203-1216.

Wang L.X. et Mendel J.M., 1992, Fuzzy basis functions, universal approximation and orthogonal least-squares, *IEEE T. on Neural Networks*, Vol.3(5), pp807-814.

Wang, H.O., Tanaka, K., Griffin, M.F., 1996. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 4, 14–23.

Watier, B. De l'analyse du mouvement in-vitro à la génération de mouvements des systèmes anthropomorphes. *Automatique / Robotique*. Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier), 2015. tel-01942858.

White, A.A., 3rd, and Panjabi, M.M. (1978). The basic kinematics of the human spine. A review of past and current knowledge. *Spine (Phila Pa 1976)* 3, 12-20.

White, A. & Panjabi, M. (1990). *Clinical biomechanics of the spine* (2<sup>e</sup>éd.). Philadelphia: J. B. Lippincott Company.

Wilke HJ, Volkheimer D. Chapter 4 - Basic Biomechanics of the Lumbar Spine. In: Galbusera F, Wilke HJ, éditeurs. *Biomechanics of the Spine* [Internet]. Academic Press; 2018. p. 51-67. Disponible sur: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128128510000045>

William A. Haviland, Harald E.L. Prins, Walrath, Bunny McBride, *Anthropology*, Cengage Learning, 2013, p. 138.

Winter D. Human balance and posture control during standing and walking. *Gait Posture* 1995; 3: 193–214.

Winter D.A., 2009 "Biomechanics and motor control of human movement", 4<sup>th</sup> edition. Wiley.

Yeo JD, Walsh J, Rutkowski S, Soden R, Craven M & Middleton J. (1998). Mortality following spinal cord injury. *Spinal cord* 36, 329-336.

Xiang, H., Chany, A.-M. & Smith, G. A. Wheelchair related injuries treated in US emergency departments. *Injury Prevention*. 12(1), 8-11.

Zadnikar M, Kastrin A. Effects of hippotherapy and therapeutic horseback riding on postural control or balance in children with cerebral palsy: a meta-analysis. *Dev Med Child Neurol*. 2011 ;53(8): 684-91. Epub 2011/07/07.

Zajac F.E., 1993. Muscle coordination of movement: a perspective. *Journal of Biomechanics* Vol26, pp109-124.

Zemouche, A., Boutayeb, M., and Bara, G. I. (2008). Observers for a class of Lipschitz systems with extension to performance analysis. *Syst. Control. Lett.* 57 (1), 18–27. DOI: 10.1016/j.sysconle.2007.06.012.

Zhao F, Pollintine P, Hole BD, Dolan P, Adams MA. Discogenic origins of spinal instability. *Spine*. 2005 Dec 1; 30(23):2621–30.



## TABLE DES FIGURES

Figure 1: posture assise, les modèles H2AT (centre) et S3S-2D (droite) (Blandeau, 2018) .....	20
Figure 2: le squelette du tronc humain (Cheselden, 1733).....	25
Figure 3: le rachis vertébral (Netter, 2004).....	28
Figure 4: Acquisition expérimentale (Blandeau, 2018) .....	35
Figure 5: protocole expérimental (Blandeau, 2018) .....	35
Figure 6: La force externe appliquée (Blandeau, 2018) .....	35
Figure 7: stratégie BM (Blandeau, 2018).....	36
Figure 8: stratégie HM (Blandeau, 2018) .....	36
Figure 9: stratégie HF (Blandeau, 2018) .....	37
Figure 10: principe de la dynamique inverse (Dumas et al., 2004) .....	41
Figure 11: modèle de Reeves et al. (2009) .....	42
Figure 12: le modèle de Tanaka et al., (2010) .....	43
Figure 13: Schéma fonctionnel d'un observateur .....	44
Figure 14: le modèle H2AT (Blandeau, 2018).....	46
Figure 15 : le modèle S3S-2D (Blandeau, 2018) .....	47
Figure 16: le modèle S3S-2D (Blandeau, 2018) .....	52
Figure 17: la perturbation .....	67
Figure 18: à gauche angles articulaires et à droite vitesses articulaires .....	68
Figure 19: couples articulaires.....	68
Figure 20: Simulation du problème LMI 4, gain obtenu via des conditions initiales spécifiques (à droite) et perturbation (à gauche) .....	69
Figure 21: protocole de simulation de l'observateur global continu .....	77
Figure 22: angles estimés (passif sinusoïdal) .....	78
Figure 23: vitesses estimées (passif sinusoïdal) .....	79
Figure 24: couples estimés (passif sinusoïdal) .....	80
Figure 25: angles estimés (passif échelon).....	81
Figure 26 vitesses estimées (passif échelon) .....	82
Figure 27: couples estimés (passif échelon).....	83
Figure 28: la décomposition du modèle S3S-2D .....	84
Figure 29: Le modèle S3S-2D décomposé .....	87
Figure 30: le multi-observateur pour le modèle S3S-2D décomposé .....	92
Figure 31: protocole de simulation de la cascade de PI-observateurs en continu .....	98
Figure 32: Les angles estimés par l'observateur global et décomposé .....	99
Figure 33: Les vitesses estimées par l'observateur global et décomposé .....	100
Figure 34: Les couples actifs estimés par l'observateur global et l'observateur décomposé.....	100

Figure 35: le couple du tronc estimé par l'observateur global et la cascade de PI-observateurs .....	101
Figure 36: protocole expérimental (Blandeau, 2018) .....	101
Figure 37: angles estimés sujet S239 .....	102
Figure 38: angles estimés sujet S246 .....	103
Figure 39: à gauche le couple du tronc et à droite l'erreur d'estimation .....	104
Figure 40: multi-observateurs d'état.....	107
Figure 41: à gauche : angles et vitesses au niveau du tronc, à droite : erreur d'observation .....	111
Figure 42: vitesse estimée au niveau de l'épaule.....	112
Figure 43: couple estimé au niveau de l'épaule .....	112
Figure 44: couple et vitesse du tronc à gauche et erreur d'estimation à droite.....	113
Figure 45: couple et vitesse de l'épaule à gauche et erreur d'estimation à droite.....	113
Figure 46: couples lombaires estimés sujet S246 et S239 .....	114
Figure 47: angles $q_0$ des sujets S246 (à droite) et S239 (à gauche) .....	114
Figure 48: le modèle T2A-2D .....	117
Figure 49: les systèmes du modèle T2A-2D .....	119
Figure 50: angles des épaules cas 1 (à gauche) et cas 2 (à droite).....	126
Figure 51: couples des épaules cas 1 (à gauche) et cas 2 (à droite).....	127
Figure 52: couples des coudes cas 1 (à gauche) et cas 2 (à droite).....	127
Figure 53: les observateurs locaux du modèle T2A-2D .....	129
Figure 54: angles estimés des épaules du modèle T2A-2D .....	133
Figure 55: vitesses estimées des épaules du modèle T2A-2D.....	133
Figure 56: couples actifs au niveau des épaules .....	134
Figure 57: couples actifs au niveau des coudes .....	134
Figure 58: couple estimé au niveau du tronc du modèle T2A-2D .....	135
Figure 59: angles estimés via les données réelles.....	136
Figure 60 : couples actifs et couple passif estimés par la cascade T2A .....	137
Figure 61 : couples de tronc estimés en fonction de l'extension des MI, S239 .....	138
Figure 62 : configuration expérimentale de la chaîne posturale postérieure (Blandeau, 2018) .....	139
Figure 63: armatures pour l'articulation des épaules .....	144
Figure 64: modèle numérique du mannequin robotisé .....	145
Figure 65: références des angles du modèle S3S-2D (Blandeau, 2018).....	165

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1: comparaison entre les 4 problèmes LMI .....	67
Tableau 2: les systèmes du modèle S3S-2D décomposé.....	88
Tableau 3: les variables injectées à l'entrée et les variables estimées par les 2 observateurs en cascade .....	93
Tableau 4: caractéristiques des sujets issues de la collecte expérimentale (Blandeau, 2018) .....	102
Tableau 5: les entrées et les sorties des systèmes du modèle T2A-2D.....	118

## ANNEXE

1. Les équations du modèle S3S 2D (Blandeau 2018) .....	165
2. Le complément de Schur (Boyd et al., 1994).....	167
3. Le Lemme de Finsler (Oliveira and Skelton., 2001) : .....	167
4. La propriété de Congruence .....	167
5. La S-procédure (Boyd et al., 1994) .....	168
6. La complétion des carrées (Wang et al., 1992) .....	168
7. Les doubles sommes.....	168

## 1. Les équations du modèle S3S 2D (Blandeau 2018)

Les équations du mouvement sont obtenues via la dérivation du Lagrangien  $L = E - U$ .

$E$  : l'énergie cinétique du système

$U$  : l'énergie potentielle du système

D'après le formalisme de Khalil et Dombre (2004), l'énergie cinétique (et l'énergie potentielle) d'un système est égale à la somme des énergies de chaque solide composant ce système. Le modèle S3S-2D est composé de 3 solides (le tronc, le bras et l'avant-bras), l'expression des énergies cinétique et potentielle sont données par :

$$E = \sum_{i=0}^2 E_i = \sum_{i=0}^2 \left( \vec{\omega}_i^T I_{G_i} \vec{\omega}_i + m_i \vec{V}_{G_i}^T \vec{V}_{G_i} \right), \quad U = \sum_{i=0}^2 U_i = \sum_{i=0}^2 m_i \vec{g}^T \cdot \vec{T}_{G_i}.$$

$\vec{g}$  est le vecteur de gravité,  $\vec{V}_{G_i}$  est la vitesse du  $COM_i$  et  $\vec{\omega}_i$  est la vitesse angulaire des segments  $i \in \{0, 1, 2\}$ .

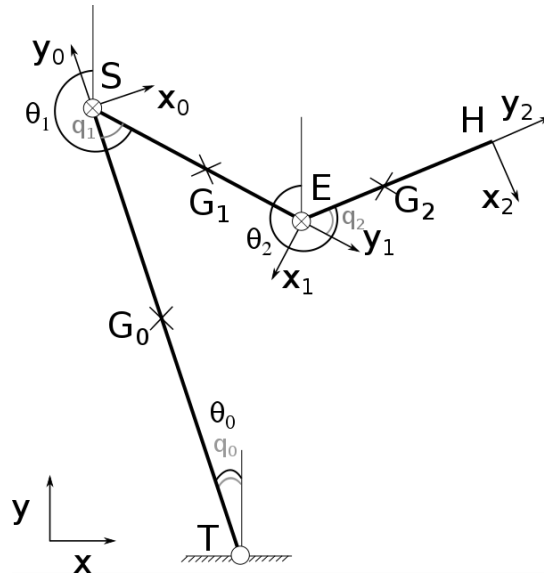


Figure 65: références des angles du modèle S3S-2D (Blandeau, 2018)

Selon le formalisme de Khalil et Dombre (2004), l'angle relatif  $\bar{q}_1$  est défini entre les axes  $(y_0 \ y_1)$ . Mais d'un point de vue mécanique, il est plus approprié d'utiliser l'angle  $q_1$  tel que  $\bar{q}_1 = q_1 + \pi$ . Dans ce cas  $\bar{q}_1 = 0^\circ$  désigne un sujet avec des bras levés dans la continuité du tronc.

La correspondance entre angles absolus et relatifs est définie par :

$$\begin{aligned} q_0 &= \theta_0; & \bar{q}_1 &= \theta_1 - \theta_0; & \bar{q}_1 &= q_1 + \pi \\ q_2 &= \theta_2 - \theta_1; & q_{20} &= \theta_2 - \theta_0; \end{aligned} \quad (204)$$

Selon l'utilisation du modèle (un objectif de commande ou d'observation), deux écritures différentes sont mises en évidence. Pour la synthèse de l'observateur, l'écriture faisant la distinction entre la matrice  $\tilde{S}(q)$  et la matrice  $\tilde{A}(x)$  est plutôt privilégiée (205) car les non linéarités dans  $\tilde{S}(q)$  dépendent des angles articulaires et sont donc mesurables :

$$\begin{cases} E(q(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + S(q(t)) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (205)$$

$$E(q(t)) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & \tilde{E}(q(t)) \end{bmatrix}, \quad A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & \tilde{A}(x(t)) \end{bmatrix}, \quad S(q(t)) = \begin{bmatrix} 0_3 \\ \tilde{S}(q(t)) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_3 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad C = [I_3 \quad 0_3],$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} M_s(t) \\ M_E(t) \end{bmatrix}. \quad y(t) \in \mathbb{R}^3 \text{ est la sortie du modèle composée des couples articulaires.}$$

Pour les matrices  $\tilde{E}(q), \tilde{A}(x)$  :

$$\tilde{E}_{1,1}(q(t)) = I_{q_0} - 2(m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - 2m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)$$

$$\tilde{E}_{1,2}(q(t)) = I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1)$$

$$\tilde{E}_{1,3}(q(t)) = I_{q_2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)$$

$$\tilde{E}_{2,1}(q(t)) = I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1)$$

$$\tilde{E}_{2,2}(q(t)) = I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)$$

$$\tilde{E}_{2,3}(q(t)) = I_{q_2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)$$

$$\tilde{E}_{3,1}(q(t)) = I_{q_2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)$$

$$\tilde{E}_{3,2}(q(t)) = I_{q_2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)$$

$$\tilde{E}_{3,3}(q(t)) = I_{q_2}$$

$$\tilde{A}_{1,1}(x(t)) = -\dot{q}_1 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right)$$

$$+ \dot{q}_2 m_2 l_{G_2} (-l_0 \sin(q_2 + q_1) + l_1 \sin(q_2))$$

$$\tilde{A}_{1,2}(x(t)) = -(\dot{q}_1 + \dot{q}_0) \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right)$$

$$+ \dot{q}_2 m_2 l_{G_2} (l_1 \sin(q_2) - l_0 \sin(q_2 + q_1))$$

$$\tilde{A}_{1,3}(x(t)) = (\dot{q}_0 + \dot{q}_1 + \dot{q}_2) m_2 l_{G_2} (-l_0 \sin(q_2 + q_1) + l_1 \sin(q_2))$$

$$\tilde{A}_{2,1}(x(t)) = \dot{q}_0 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) + \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)$$

$$\tilde{A}_{2,2}(x(t)) = \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)$$

$$\tilde{A}_{2,3}(x(t)) = (\dot{q}_0 + \dot{q}_1 + \dot{q}_2) m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)$$

$$\tilde{A}_{3,1}(x(t)) = \dot{q}_0 (m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)) - \dot{q}_1 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)$$

$$\tilde{A}_{3,2}(x(t)) = -(\dot{q}_0 + \dot{q}_1) m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)$$

$$\tilde{A}_{3,3}(x(t)) = 0$$

Et enfin la matrice

$$\tilde{S}(q(t)) = - \begin{bmatrix} -(m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \sin(q_0) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \\ (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \\ m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \end{bmatrix}$$

La deuxième écriture du modèle S3S-2D (206) est privilégiée pour la synthèse des lois de contrôle. Elle est strictement équivalente à (205) mais sa particularité est qu'elle rassemble les matrices  $\tilde{S}(q)$  et  $\tilde{A}(x)$  dans la même matrice d'état  $A(x)$  :

$$\begin{cases} E(q(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (206)$$

Avec :

$$E(q(t)) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & \tilde{E}(q(t)) \end{bmatrix}, \quad A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ \tilde{S}_C(q(t)) & \tilde{A}(x(t)) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_3 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad C = [I_3 \quad 0_3],$$

$$\tilde{S}_C(q) = \begin{bmatrix} s_0 + s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{012} & s_{012} & s_{012} \end{bmatrix}.$$

$$s_0 = (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \frac{\sin(q_0)}{q_0}, \quad s_{012} = m_2 g l_{G_2} \frac{\sin(q_2 + q_1 + q_0)}{q_2 + q_1 + q_0}, \quad s_{01} = (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \frac{\sin(q_1 + q_0)}{q_1 + q_0}$$

## 2. Le complément de Schur (Boyd et al., 1994)

Soit  $M = M^T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}$  telle que  $M_{11}$  et  $M_{22}$  sont des matrices carrées alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$M < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M_{11} < 0 \\ M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_{22} < 0 \\ M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T < 0 \end{cases}$$

## 3. Le Lemme de Finsler (Oliveira and Skelton, 2001) :

Dans plusieurs problèmes de commande, les conditions LMI peuvent être obtenues par élimination des variables. On aboutit dans ce cas-là à un problème de faisabilité de taille réduite. Pour répondre à cet objectif, le lemme de Finsler est utilisé :

On considère  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tels que  $\text{rang}(W) < n$ ,  $W_\perp$  est le complément orthogonal de  $W$ , alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $x^T Q x < 0, \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0, Wx = 0\}$
2.  $\exists M \in \mathbb{R}^{n \times m} : MW + W^T M^T + Q < 0$
3.  $W_\perp^T Q W_\perp < 0$
4.  $\exists \varepsilon \in \mathbb{R} : Q - \varepsilon W^T W < 0$

## 4. La propriété de Congruence

Soit une matrice symétrique  $P = P^T$  et une matrice de rang plein  $Q$  alors :

$$P > 0 \Rightarrow QPQ^T \geq 0$$

## 5. La S-procédure (Boyd et al., 1994)

Le lemme de S-procédure permet de vérifier une condition inégalité quadratique sous contraintes inégalités quadratiques. Lorsque ces conditions sont strictes, le lemme suivant peut être formulé :

On considère des matrices  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, p$  telles que :

$$x^T F_0 x > 0, \quad x \neq 0, \text{ avec : } x^T F_i x \geq 0, \quad i = 0, \dots, p \quad (207)$$

Une condition suffisante pour que (207) soit satisfaite est qu'il existe des scalaires  $\eta_i \geq 0, i = 0, \dots, p$  tels que :

$$F_0 - \sum_{i=1}^p \eta_i F_i > 0 \quad (208)$$

## 6. La complétion des carrées (Wang et al., 1992)

Considérons deux matrices  $X$  et  $Y$  de tailles appropriées et une matrice symétrique positive  $Q = Q^T > 0$  alors l'inégalité suivante est satisfaite :

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T Q X + Y^T Q^{-1} Y \quad (209)$$

Dans le cas d'un scalaire  $\mu > 0$ , une version simplifiée de (209) est :

$$X^T Y + Y^T X \leq \mu X^T X + \mu^{-1} Y^T Y \quad (210)$$

## 7. Les doubles sommes

Plusieurs problèmes de contrôle ou d'estimation peuvent être résumés comme un problème de négativité impliquant une double somme convexe :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n w_i(z) w_j(z) \psi_{ij}(\bullet) < 0 \quad (211)$$

$\psi_{ij}(\bullet)$  sont des matrices symétriques et  $w_i(z)$  sont des fonctions non linéaires satisfaisant la propriété de la somme convexe  $\sum_{i=1}^n w_i(z) = 1, w_i(z) \geq 0$ . Une solution triviale au problème (211) est de considérer  $\psi_{ij}(x) < 0, i, j = 1, \dots, n$ . Ces conditions peuvent être relaxées en considérant qu'avec  $w_i(z) \geq 0$  et  $w_i(z) w_j(z) = w_j(z) w_i(z)$ , une solution suffisante au problème (211) est telle que :

$$\begin{cases} \psi_{ii} < 0 \\ \psi_{ij} + \psi_{ji} < 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = i + 1, \dots, n \end{cases} \quad (212)$$

Des nombreuses conditions de relaxation existent pour améliorer (212). Ces relaxations sont regroupées en deux classes. La première classe n'introduit aucune variable supplémentaire, contrairement à la seconde. On présente ci-après deux lemmes qui correspondent au « meilleur » compromis entre la qualité de la solution et la compatibilité avec les capacités des algorithmes de résolution :



### 7.1. Lemme de Tuan et al. (2001)

Les conditions (211) sont satisfaites si :

$$\begin{cases} \psi_{ii} < 0 \\ \frac{2}{m-1} \psi_{ii} + \psi_{ji} + \psi_{ij} < 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \end{cases} \quad (213)$$

### 7.2. Lemme de Liu and Zhang (2003)

Les conditions (211) sont satisfaites s'il existe des matrices  $Q_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$  et  $Q_{ij} = Q_{ji}^T, i = 1, \dots, n, j = i + 1, \dots, n$  telles que :

$$\begin{cases} \psi_{ii} + Q_{ii} < 0 \\ \psi_{ij} + Q_{ij} + \psi_{ji} + Q_{ji} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1m} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{m1} & Q_{m2} & \cdots & Q_{mm} \end{bmatrix} > 0 \quad (214)$$

On note que les conditions des lemmes de Tuan et al., (2001) et Liu and Zhang (2003) sont uniquement suffisantes.

En revanche, certaines conditions de relaxation deviennent toutefois nécessaires lorsque le nombre des termes dans les sommes tendent vers l'infini. Les travaux de Kruszewski et al. (2009) ont proposé des conditions basées sur la triangulation. Tandis que d'autres travaux ont proposé d'explorer davantage les propriétés des fonctions non linéaires  $w_i(z), i = 1, \dots, n$ , telles que les limites (Sala et, al., 2007) ou les approches dépendantes des fonctions d'appartenance (Bernal et al., 2009). L'inconvénient de ces résultats est que la complexité des problèmes LMI augmente et la résolution numérique peut devenir rapidement infaisable par les algorithmes disponibles.