






Hajer SRIHI (28 ans)

ATER à l'INSA Hauts-de-France
Campus le Mont Houy Valenciennes
59313

CONTACT

 0752787232

 MARLY 59770

 Srihi.hajer@gmail.com

 SRIHI Hajer

FORMATION ACADEMIQUE

Diplôme d'ingénieur en Génie électrique de
l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Monastir
(ENIM). Monastir : 2015 – 2017

Double Diplome: ENIM – ENSIAME

Diplôme d'ingénieur en Génie Mécatronique de
L'Institut National des Sciences Appliquées
Hauts-De-France (INSA). Valenciennes : 2017 –
2019

Codiplomation: ENSIAME - IAE

Diplôme de Droit, Economie et Gestion mention
Management et Administration des entreprises
de l'Institut d'Administration des entreprises
(IAE). Valenciennes: 2018 – 2019

Diplôme de Doctorat de l'Université
Polytechnique Hauts-de-France (UPHF) et de
l'Institut National des Sciences Appliquées Hauts-
De-France (INSA). Valenciennes: 2019 – 2023.

PROFIL

Passionnée par la science au service de l'humain, mon centre d'intérêt s'oriente vers l'accessibilité et l'inclusion des personnes à mobilité réduite.

Ancienne membre de l'organisme Handicap International (HI), je défends, à travers mes activités de recherche, les droits des personnes handicapées à avoir une vie digne et égale.

Je mène mes travaux à l'encre de mes pensées ...

EXPERIENCES PROFESSIONNELLES

ETC Groupe – la Tunisie : stage ouvrier

Janvier 2016 – Mars 2016

- ✓ La conception d'une machine à convertisseurs.
- ✓ Les exo capteurs et le cycle de fabrication d'un tissu.

IEMN UMR CNRS 8520 - Valenciennes : stage assistant ingénieur

Septembre 2017 – Février 2018

- ✓ Réalisation d'un système Embarqué de contrôle non destructif à base des ondes ultrasonores.

LAMIH UMR CNRS 8201 - Valenciennes : stage ingénieur

Avril 2019 – Septembre 2019

- ✓ Estimation des paramètres internes chez les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière.

LAMIH UMR CNRS 8201 - Valenciennes : thèse de doctorat

Octobre 2019 – Décembre 2023 : Contrat Doctoral Handicap

- ✓ Sujet de thèse : Stratégies de stabilité en position assise chez les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière : de l'estimation utilisant des modèles descripteurs quasi-LPV à la validation expérimentale. Thèse soutenue le 21/12/2023.

Enseignements :

Année académique 2021-2022 : 30 heures en présentiel de TP automatique échantillonné à l'INSA Hauts-de-France, promotion ingénieurs en mécatronique (niveau 3A et 2A).

ATER à 50% depuis le 01/10/2023 : 90 heures en présentiel de TP automatique linéaire et non linéaire à la promotion ingénieurs en mécatronique (niveau 4A) à l'INSA Hauts-de-France.

COMPETENCES et PRIX

Compétences Techniques : le filtrage numérique, les systèmes non linéaires le traitement du signal, la commande et l'observation.

Compétences managérielles : management des entreprises, marketing publicité, administration et fiscalité

Compétences Linguistiques : Français langue maternelle, Anglais niveau expert (certificat TOEIC et CLES), Anglais Business et Allemand niveau B2.

Prix Scientifiques

1. Prix Thierry Célérier Femmes et Sciences promotion 2022. Rennes
2. Prix de la meilleure communication au congrès Handicap 2022. Paris
3. Prix du meilleur poster scientifique au titre de la journée régionale des doctorants en automatique en 2021. Compiègne

CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES

Articles de revues scientifiques

1. Srihi H, Guerra T-M, Pudlo P, Nguyen A-T., Blandeau M. (2022). Recovering control parameters in seated position for people with medullar injury. Modelling, Measurement and Control C, Vol.83, NO.1-4, pp. 21-27 [DOI= 10.18280/mmc_c.831-404].
2. Srihi H, Guerra T-M, Nguyen A-T, Pudlo P and Dequidt A (2021) Cascade Descriptor Observers: Application to Understanding Sitting Control of Persons Living with Spinal Cord Injury. Front. Control. Eng. 2:710271. [DOI : 10.3389/fcteg.2021.710271].

Conférences internationales avec comité de sélection

1. Guerra T-M, Srihi H, Dequidt A, Nguyen Anh-Tu, Pudlo P (2023). Understanding Seated Stability in Spinal Cord Injury: Nonlinear Cascade Observer Design with an Improved Biomechanical Model. European Control Conference Stockholm 25-28 Juin 2024. (sous révision)
2. Srihi H, Guerra T-M, Pudlo P, Nguyen A-T (2022). Reconstructing human torques of people with medullar injury via discrete time nonlinear cascade observers, ICONS-IFAC, Cluj-Napoca, Romania. [DOI.org/10.1016/j.ifacol.2022.07.608]
3. Guerra T.M., Blandeau M., Nguyen A.T., Srihi H., Dequidt A. (2020), Stabilizing unstable biomechanical model to understand sitting stability for persons with spinal cord injury. IFAC PapersOnLine, World C. Berlin, Gemany. [DOI.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2225].

Conférences nationales avec comité de sélection

1. Srihi H, Guerra T-M, Pudlo P, Nguyen A-T (2024). Etude de la posture assise chez les sujets paraplégiques : de la modélisation à la reconstruction des efforts internes. Congres Handicap 2024, 13ième édition de la conférence sur les Aides Techniques pour personnes en situation de Handicap, Paris, France. (Soumis)
2. Srihi H, Guerra T-M, Pudlo P, Nguyen A-T (2022). Estimation des paramètres du contrôle en position assise chez la Personne atteinte d'une lésion médullaire. Congres Handicap 2022, 12ième édition de la conférence sur les Aides Techniques pour personnes en situation de Handicap, Paris, France. Acte Numéro 1, pages 29-34, Paris 8-10 Juin 2022.
3. Srihi H, Blandeau M, Molenaar C, Guerra T-M, Pudlo P (2021), Une nouvelle approche de stabilité en position assise chez les personnes vivant avec une lésion médullaire. 27ième Congres de la Société Francophone Posture Equilibre Locomotion (SOFPEL), faculté de médecine, pôle de recherche, Lille, France.
4. Srihi H, Blandeau M, Molenaar C, Guerra T-M, Pudlo P (2021), Les Stratégies de Stabilisation pour les personnes vivant avec une Lésion médullaire. 27ième Congres de la Société Francophone Posture Equilibre Locomotion (SOFPEL), faculté de médecine, pôle de recherche, Lille, France.

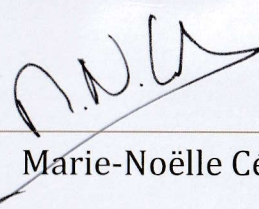
Prix Thierry Célérier - Femmes & Sciences

Le Prix Thierry Célérier – Femmes & Sciences 2022 est décerné à

Madame...Hajer Srihi.....

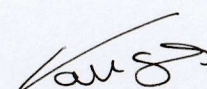
afin de rendre hommage à son mérite et l'aider à réaliser son projet scientifique d'exception

Fait à Paris, le 18 novembre 2022



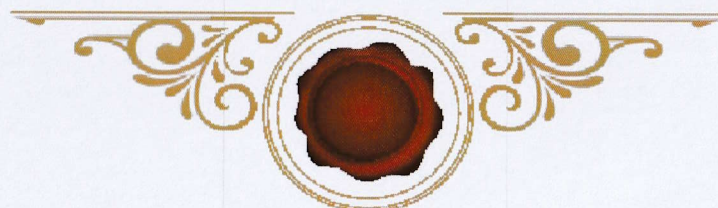
Marie-Noëlle Célérier

Fondatrice du prix



Isabelle Vauglin

Présidente de Femmes & Sciences



THALES



Prix Handicap 2022

Pour la meilleure communication présentée lors de la conférence
Handicap 2022, Paris, 8-10 juin 2022

Décerné à :

Hajer Srihi, Thierry-Marie Guerra, Philippe Pudlo et Anh-Tu Nguyen

Pour la communication :

« *Estimation des Paramètres du Contrôle en Position Assise chez la
Personne atteinte d'une Lésion Médullaire* »

Gérard Lefranc, Thalès,
directeur de la mission insertion

Yann Morère,
président du Comité Scientifique

Gérard Uzan,
président de l'IFRATH



CARTE MOBILITE INCLUSION

Invalidité

Déb. de validité : 09.11.2021

Fin de validité : Permanente

Num. de carte : 000000005250552

Délivrée par : CONSEIL DEPARTEMENTAL 59



2D-DOC

005250552

21321A000918

CMI INVALIDITE

Besoin d'accompagnement



Nom

SRIHI

Prénom

Hajer

Date de naissance

24.01.1995

Sans préjudice d'autres avantages, notamment dans le domaine des transports, le titulaire de la présente carte a droit de priorité :

- aux places assises dans les transports, dans les espaces et salles d'attente ainsi que dans les établissements et les manifestations accueillant du public ;
- dans les files d'attente.



mdph59

maison départementale
des personnes handicapées du Nord

Courrier à conserver
Gardez cet original et faites des
photocopies

Maison départementale des personnes handicapées
(MDPH)

Adresse : BP 20 372
21 Rue DE LA TOISON D'OR
CS 30351

59666 VILLENEUVE-D'ASCQ

Votre contact : Sabrina MOREL

☎ 03 59 73 73 73

✉ valenciennes-avesnes-mdph@lenord.fr

Numéro dossier : 2017026065

Identifiant social : 1004737

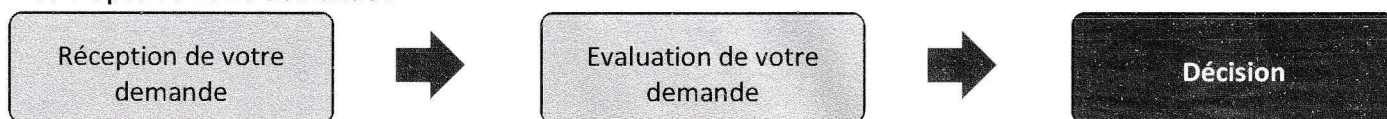
Date de naissance : 24/01/1995

Identifiant (NIR) : 2950199351247 47

HAJER SRIHI
2 RUE DE LA REUNION
APPT 31
59770 MARLY

VILLENEUVE-D'ASCQ, le 12 novembre 2021

Les étapes de votre demande :



**Notification de décision suite à la demande pour
Hajer SRIHI**

Madame,

Nous vous écrivons suite à votre demande déposée le 13/08/2021.

La Commission des droits et de l'autonomie des personnes handicapées (CDAPH) a examiné votre demande et a rendu sa décision le 09/11/2021.

La CDAPH vous attribue **une reconnaissance de la qualité de travailleur handicapé (RQTH)** qui est valable à partir du **09/11/2021 et sans limitation de durée**.

Ce droit vous est attribué tant que votre situation ne change pas.

Si votre situation évolue, la CDAPH pourra revoir ce droit.

Votre situation de handicap entraîne des difficultés pour accéder à l'emploi ou rester dans l'emploi (article L5213-1 du code du travail).

Cette décision d'attribution RQTH vous ouvre le bénéfice de l'obligation d'emploi des travailleurs handicapés (article L5212-13 du code du travail). Cette obligation impose aux entreprises d'au moins 20 salariés d'employer au moins 6% de travailleurs handicapés. Cette décision vous permet de bénéficier de dispositifs dédiés à l'insertion professionnelle, d'aménagements de vos horaires et poste de travail, d'un accès spécifique à la Fonction Publique ou de soutiens spécialisés dans la recherche d'emploi (Pôle emploi ou Cap emploi).

Les informations personnelles recueillies par la MDPH du Nord lors de l'examen, du traitement et du suivi de votre demande font l'objet d'un traitement informatique. Conformément aux dispositions de la loi Informatique et Libertés du 6 janvier 1978 modifiée par la loi du 20 juin 2018 relative à la protection des données personnelles, vous pouvez demander à la MDPH de récupérer, corriger, supprimer ou réutiliser ces informations. Vous pouvez faire cette demande à : dph.mdp59@lenord.fr

La décision de la CDAPH du 09/11/2021 termine le traitement de votre demande portant sur .

Vous pouvez contester cette décision de la CDAPH pendant les 2 prochains mois comme indiqué à la dernière page de ce courrier.



Lahanissa ABED-MADI
Vice-Présidente de la CDAPH

Conformément à l'article L. 114-1-1 du Code de l'action sociale et des familles, vous avez la possibilité de solliciter un plan d'accompagnement global auprès de la MDPH si l'orientation prévue par la décision de la CDAPH ne peut pas être mise en oeuvre.

UN RESUME DE LA THESE EN 3 PAGES : Thèse soutenue le 21/12/2023 à Valenciennes

Ma thèse est intitulée : « stratégies de stabilité en position assise chez les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière : de l'estimation utilisant des modèles descripteurs quasi-LPV à la validation expérimentale ». Les travaux ont été entrepris à cheval entre deux disciplines scientifiques à savoir l'automatique et la biomécanique afin de répondre à une problématique au service du handicap.

1. Introduction : la lésion médullaire : définition et conséquences

La lésion médullaire affecte la conduction des signaux sensoriels et musculaires. Les neurones touchés par la blessure ne peuvent plus véhiculer les informations nerveuses. Une personne lésée médullaire est donc incapable de recruter, de manière volontaire, les muscles en dessous du niveau lésionnel et est confiné dans la majorité des cas en fauteuil roulant. Le risque de mortalité est aussi élevé en fonction de la localisation de la lésion et de sa gravité, ainsi que de la disponibilité des soins médicaux dispensés. Plus la blessure est haute et complète, plus l'atteinte associée est importante. Les conséquences d'une lésion médullaire sont nombreuses, sensorimotrices et secondaires. Dans le cadre de ma thèse, on s'est intéressé à une conséquence sensorimotrice particulière liée à la réduction de la stabilité posturale en position assise. En effet, la lésion médullaire menace directement la stabilité posturale assise car le contrôle musculaire et le retour sensoriel sont réduits en dessous du niveau lésionnel (Kirshblum et al., 2011). Les sujets atteints risquent par conséquent une perte d'équilibre et des blessures associées ce qui engendre une perte d'autonomie lors des activités quotidiennes. En présence d'une perturbation externe, les personnes blessées médullaires se stabilisent en position assise à l'aide de mouvements des membres supérieurs, on dit qu'elles développent des nouvelles stratégies compensatoires individuelles (Blandeau, 2018). Ces stratégies de stabilisation, qui viennent compenser la perte de contrôle volontaire au niveau du tronc, sont différentes des celles adoptées par les sujets asymptomatiques. En effet, le contrôle et la stabilité de la posture assise chez les personnes blessées médullaires engagent davantage le sous-système passif rachidien contrairement aux sujets asymptomatiques. Par conséquent, la stabilité assise chez les sujets atteints est caractérisée par un recrutement accentué des membres supérieurs engagés comme des segments stabilisateurs. Le choix de la stratégie de stabilisation est individuel et est fonction des capacités fonctionnelles et de l'objectif étudié. Les rééducateurs peuvent également orienter le patient à opter pour une stratégie particulière afin de renforcer le tronc et de préserver les acquis. Certaines approches thérapeutique et médicales, notamment en rééducation, sont mises en exergue afin d'optimiser la stabilité assise chez les sujets médullo-blessés. Les approches sont répertoriées en deux classes : la première classe se focalise sur le patient alors que la deuxième classe se focalise sur l'environnement du patient.

Problématique de la thèse

Plusieurs approches ont démontré leurs efficacités dans l'optimisation du contrôle postural assis mais malgré leurs intérêts, la limite fondamentale demeure l'absence des dispositifs de mesure qui permettent de référencer l'impact réel de ces interventions sur l'équilibre postural assis. L'interprétation des résultats par les cliniciens se focalisent sur des tests maison ou en se fiant à l'observation objective, aucun moyen ne permet d'évaluer correctement l'efficacité des interventions ou de documenter leurs effets. Le manque ou l'absence d'outils d'évaluation précis demeure une lacune indéniable dans la classification des approches prouvées efficaces (Lepage et al., 2012). Afin d'aider les cliniciens dans le diagnostic et le traitement d'une maladie posturale, il est intéressant non seulement de repérer la stratégie par laquelle le patient a assuré sa stabilité assise, mais aussi de fournir des indications sur la manière dont elle a été produite (Guelton, 2003). La quantification des différents efforts produits volontairement et passivement lors de la stabilisation de l'assise permettrait

de mieux comprendre l'importance des différentes contributions afin de développer des positions assises facilitant le concept de la stabilité. Ma thèse vise à reconstruire les couples internes chez les sujets blessés médullaires. Les efforts internes recherchés ne sont pas mesurables directement à moins d'utiliser des capteurs invasifs qui sont éthiquement proscrits.

Méthodologie adoptée dans les travaux de thèse

Je propose dans ma thèse de reconstruire les efforts non mesurables via une approche par modélisation de la station assise chez une personne blessée médullaire. La méthode de la modélisation biomécanique permet d'accéder à des grandeurs mécaniques non accessibles expérimentalement comme ces efforts articulaires. Elle s'appuie sur des hypothèses et offre la possibilité de tester de nombreux paramètres morphologiques, biomécaniques et environnementaux (Jones et al., 2019). Ma thèse poursuit la voie initiée dans les travaux de thèse de Mathias Blandeau en 2018. Le parti-pris était qu'un modèle de type biomécanique permettait de pouvoir reproduire les mouvements de personnes lésées médullaires. De cette reproduction des mouvements, pouvaient alors être extraites les variables non mesurables directement, et notamment les couples articulaires. La validation de cette méthodologie, alternative à la dynamique inverse, a d'abord été faite sur un modèle très simple de la posture assise, le modèle « Head 2 Arms and Trunk » (H2AT). Le but de ce modèle initial était de vérifier si les outils de l'automatique non linéaire sont capables de répondre aux objectifs. La reconstruction des efforts interne a été faite via un observateur non linéaire dont la convergence est exprimée via des inégalités linéaires matricielles (LMI) qui sont résolues par l'intermédiaire de conditions d'optimisation. La démarche développée dans ma thèse est basée sur une approche par modélisation bio-inspirée qui permet d'accroître petit-à-petit la complexité des modèles et d'y associer des techniques basées sur l'automatique pour résoudre le problème de l'estimation des variables non mesurées, notamment les entrées, i.e. les couples articulaires. Le besoin de rester proche des modèles mécaniques développés impose de construire un ou des observateurs conservant la structure des modèles sans simplification et sans linéarisation. Toute simplification constitue une perte d'information et peut biaiser la qualité d'estimation, dans un contexte humain ceci est particulièrement délicat et la précision des estimations doit être optimale.

Résultats et Contributions de la thèse

Après la validation du modèle H2AT, un modèle plus réaliste a été créé : le modèle S3S-2D « Seated-3-Segments ». Ce modèle est capable de reconstruire les couples articulaires relatifs aux mouvements symétriques dans le plan sagittal. Il ne peut pas expliquer et reproduire l'ensemble des stratégies possibles utilisées par les personnes lésées médullaires en position assise. L'objectif principal de cette thèse est de pouvoir enrichir les modèles précédents pour pouvoir analyser d'autres types de mouvements notamment des mouvements asymétriques observés dans un cadre expérimental. Le problème d'enrichissement du modèle S3S-2D ne pouvant pas suivre la même synthèse, dû à la complexité du problème à résoudre, j'ai développé dans ma thèse une nouvelle approche. Celle-ci est basée sur une décomposition en cascade du modèle. Pour la valider, on a décidé de repartir de l'existant c'est-à-dire du modèle S3S-2D. La décomposition en cascade est parfaitement exacte pour le modèle, mais son intérêt est de permettre de découpler le problème d'observation en 2 sous-problèmes distincts qui eux réduisent de façon importante la complexité du problème à résoudre. Néanmoins, il reste à démontrer qu'il y a bien une convergence asymptotique de l'erreur de convergence de l'état global (c'est-à-dire sur le modèle complet S3S-2D) quand on utilise cette cascade de 2 observateurs. Un résultat théorique est donné dans ce sens, sous des hypothèses de bornitude. J'ai présenté également dans ma thèse des résultats en simulation et avec des données expérimentales coïncident parfaitement avec ceux des observateurs globaux, en discret et en continu. Munis de la méthodologie globale et cette possibilité d'utiliser des observateurs en cascade, j'ai proposé dans la

dernière partie de ma thèse d'étendre le modèle S3S-2D en rajoutant un deuxième bras, modèle appelé « Trunk-2-arms » (T2A-2D) avec 5 degrés de liberté. L'extension utilise alors un troisième observateur et on montre à nouveau que la convergence de l'état global du modèle T2A-2D est garantie par les observateurs en cascade. Ce nouveau résultat permet donc de tester de nouvelles stratégies adoptées par les personnes lésées médullaires, notamment celles qui ont des mouvements dissymétriques des membres supérieurs. Les résultats obtenus au cours de ma thèse permettent d'envisager maintenant le rajout de nouveaux degrés de liberté (rotations par exemple) avec une certaine confiance. Ce point ainsi qu'une validation possible sur un mannequin complètement instrumenté font l'objet des perspectives de la thèse. Les contributions de la thèse et leur valorisation sont développées dans ce tableau :

Méthode	Contributions	Conférences ou revues
S3S-2D	Lois de contrôle stabilisantes pour le modèle S3S-2D global en discret	IFAC WC 2020 à Berlin
S3S-2D et S3S-2D DECOMPOSE	L'observateur global continu du modèle S3S-2D continu. Modèle S3S-2D global continu et observateurs locaux en cascade dans le domaine continu	FRONTIERS IN CONTROL ENGINEERING, SECTION CONTROL AND AUTOMATION SYSTEMS 2021.
S3S-2D DECOMPOSE DISCRET	Modèle S3S global discret et observateurs en cascade dans le domaines discret	IFAC ICONS 2022 CLUJ NAPOCA
S3S-2D DECOMPOSE	L'effet de l'extension des membres inférieurs sur le couple articulaire au niveau lombaire reconstruit avec les observateurs en cascade.	AMSE MODELING MEASUREMENT CONTROL / IFRATH 2022 CONGRES HANDICAP PARIS
T2A- 2D en Continu	Reconstruction des couples articulaires selon des mouvements dissymétriques dans le plan sagittal. Effets de l'extension des membres inférieurs sur le couple lombaire	EUROPEAN CONTROL CONFERENCE 2024, STOCKHOLM. HANDICAP 2024.

Références bibliographiques

Blandeau, Mathias. Modélisation et caractérisation de la stabilité en position assise chez les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière. Biomécanique [physics.med-ph]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2018. Français. NNT : 2018VALE0021. tel-01861272.

Guelton, K. (2003). Thèse en automatique soutenue le 16 décembre 2003 : Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station debout. Mise en oeuvre d'observateurs flous sous forme descripteur. Université de Valenciennes.

Jones, C. F. & Clarke, E. C. Engineering approaches to understanding mechanisms of spinal column injury leading to spinal cord injury. Clinical Biomechanics 64, 69-81 (2019).

Lepage, M., Leblanc-Roy, Ph., Champoux, A., et Grenier-Vallée, M. Développement d'un outil d'évaluation de l'équilibre assis chez les individus ayant une lésion à la moelle épinière : Une étude exploratoire. Programme de physiothérapie, École de réadaptation Faculté de Médecine. Mémoire présenté à la Faculté des Études Supérieures en vue de l'obtention du grade de maître en physiothérapie (2012).

Kirshblum S., Burns S., Biering-Sorensen F., Donovan W., Graves D., Jha A., Johansen M., Jones L., Mulcahey M. (2011) International standards for neurological classification of spinal cord injury. J. Spinal Cord Med. 34:535–546.

ANNEXE : les modèles développés au cours de ma thèse

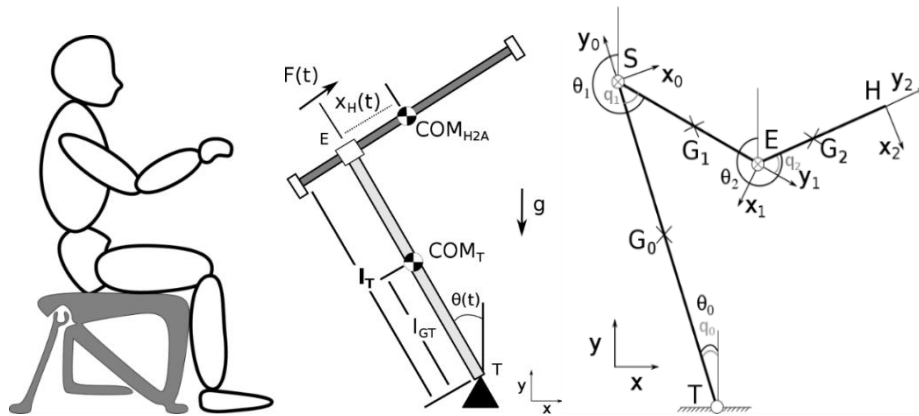


Figure 1: Posture assise, les modèles H2AT (centre) et S3D-2D (droite)

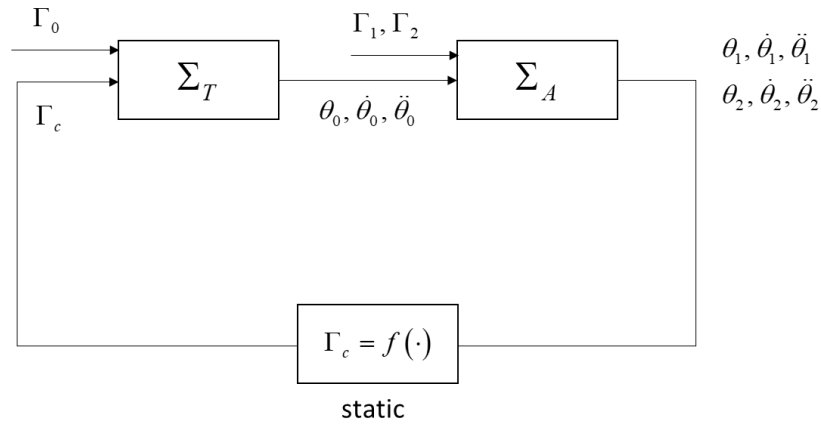


Figure 2: le modèle S3S-2D décomposé

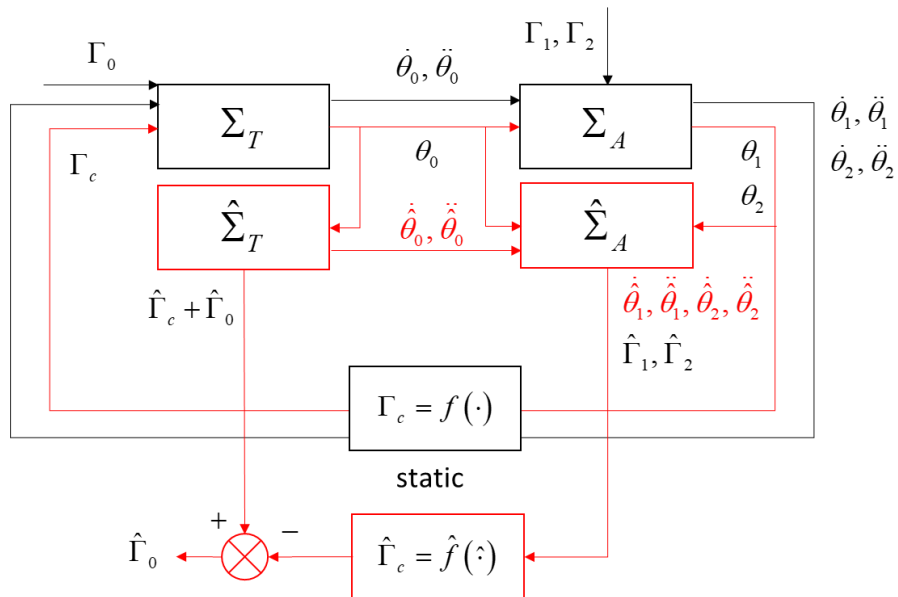
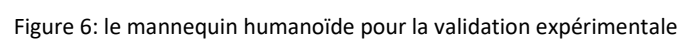
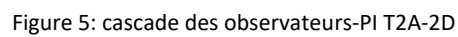
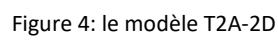


Figure 3: la cascade des observateurs-PI S3S-2D décomposé



Recommandation de Madame Hajer SRIHI **au Prix de Thèse de l'IFRATH**

Depuis quelques années, le LAMIH mène des recherches visant à améliorer l'accessibilité aux transports en commun (bus, avion...) des personnes en fauteuil roulant présentant une lésion de la moelle épinière et souffrant d'instabilité posturale.

Dans ce cadre, deux thèses de doctorat, dirigées par le Prof. Thierry-Marie Guerra et moi-même, ont été soutenues. Ces thèses de doctorat, qui ont été primées et publiées dans des journaux à fort impact, ont permis des avancées théoriques en automatique et une meilleure connaissance du contrôle postural chez la personne blessée médullaire. Elles ont aussi montré la diversité des stratégies de stabilisation de ces personnes qui nécessitaient de nouveaux travaux de recherche à l'interface de l'automatique et de la biomécanique.

Le Prof. Thierry-Marie Guerra et moi-même avons alors proposé la thèse intitulée « Stratégie de stabilité en position assise chez les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière : de l'estimation utilisant des modèles descripteurs quasi-LPV à la validation expérimentale ». Cette thèse ambitieuse a pour objet de développer les outils théoriques nécessaires à l'estimation des efforts articulaires non mesurables permettant de mieux comprendre les stratégies de stabilisation posturale tridimensionnelles des personnes blessées médullaires. Dans un cadre industriel, cette recherche doit permettre d'évaluer la qualité de maintien d'un siège (d'avion, de fauteuil roulant...) et donc d'apporter des éléments de réponses nécessaires au développement de sièges mieux adaptés aux personnes présentant une instabilité posturale.

Cette thèse a été proposée à Madame Hajer SRIHI, que nous connaissons, au regard de son parcours exemplaire, de ses grandes capacités à travailler à l'interface de domaines scientifiques bien différents et aussi de ses qualités humaines permettant de mener des expérimentations sur l'Humain.

Madame Hajer SRIHI a soutenu sa thèse le 21 décembre 2023. Elle a publié, à ce jour, 2 articles dans un journal international, 2 conférences internationales (1 autre est en soumission à ECC2024) et 3 conférences nationales. Trois prix lui ont été décernés dont le Prix Thierry Célérier Femmes et Sciences promotion 2022 et le prix de la meilleure communication au congrès Handicap 2022.

Madame Hajer SRIHI a réalisé des enseignements à l'INSA Hauts-de-France en automatique durant la réalisation de sa thèse de doctorat. La qualité de ses interventions a été unanimement saluée par les collègues et étudiant-e-s. Aussi, Madame Hajer SRIHI a été retenu sur un poste d'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche à l'INSA HdF, à mi-temps, pour l'année universitaire 2023-2024, où elle enseigne l'Automatique échantillonnée devant un public d'étudiants de 2^{ème} et 3^{ème} année.

Enfin, Madame Hajer SRIHI au travers de ses activités de recherche, et autres bien nombreuses, est un exemple inspirant pour nous tous.

Je recommande donc tout naturellement Madame Hajer SRIHI au Prix de Thèse de l'IFRATH.

Fait à Valenciennes, le vendredi 2 février 2024



Philippe Pudlo
Professeur des Universités

Noureddine MANAMANNI, Professeur des Universités
CReSTIC – EA 3804 Centre de Recherche en STIC
EiSINE - Ecoles d'Ingénieur en Sciences Industrielles et Numérique
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 Reims cedex 2 - France

Rapport concernant les travaux de Madame **Hajer SRIHI** présentés en vue de l'obtention du grade de Docteur de l'Université Polytechnique Hauts-De-France

Madame **Hajer SRIHI** présente des travaux intitulés :

« **STRATEGIES DE STABILITE EN POSITION ASSISE CHEZ LES PERSONNES VIVANT AVEC UNE LESION DE LA MOELLE ÉPINIERE : DE L'ESTIMATION UTILISANT DES MODELES DESCRIPTEURS QUASI-LPV A LA VALIDATION EXPERIMENTALE** »

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines (LAMIH – UMR CNRS 8201) sous la direction conjointe des Professeurs **Thierry-Marie GUERRA**, et **Philippe PUDLO**. De manière générale, cette thèse s'intéresse aux conséquences que peut entraîner la lésion médullaire dans la réduction de stabilité posturale en position assise. Dans ce cadre, ce travail exploite de manière efficace des modèles biomécaniques et un certain nombre de concepts de la théorie de l'observation pour les systèmes quasi-LPV pour améliorer le confort des patients.

Le mémoire de thèse de 150 pages, est structuré autour d'une introduction générale, de 4 chapitres homogènes, d'une annexe, d'une bibliographie et d'une conclusion générale et perspectives.

Une courte **introduction générale** donne d'une part un aperçu global de la problématique étudiée à savoir une atteinte particulière de la moelle épinière : *la lésion médullaire*, d'autre part elle situe aussi le travail qui s'inscrit pleinement dans la suite de travaux entrepris au LAMIH tout en évoquant les parties qui ont été enrichies que ce soit au niveau de la modélisation, ou de la synthèse d'observateurs. **Hajer SRIHI** décrit finalement les différents objectifs du travail, ainsi que l'organisation du manuscrit. Les différentes contributions de la thèse ayant été citées en préambule, feront l'objet des différents chapitres synthétisés dans ce qui suit.

Le chapitre 1 intitulé « *La lésion médullaire : impact sur le contrôle postural et modélisation biomécanique* » permet au lecteur non initié d'appréhender la partie médicale de la problématique étudiée et consacre sa seconde partie au rappel des modèles biomécaniques qui sont exploités dans ce travail voire enrichis par la suite. Après une définition de la posture puis du contrôle postural, de ses objectifs et de ses fonctions dont l'une est liée à la stabilité posturale, l'auteur se focalise sur la position assise objet de ce travail. Le rôle et l'importance de la mobilité du tronc et de ses différents constituants sont décrits afin de mieux appréhender le mécanisme de la position assise. Un intérêt particulier est porté aux patients atteints de lésion de la moelle épinière (LME) qui sont confrontés la quasi-totalité de leur journée au contrôle de la position assise du fait de l'instabilité de la colonne vertébrale.

Des stratégies, de stabilisation de la posture chez les sujets asymptomatiques, comme celles menées dans une précédente thèse du LAMIH (Blandeau, 2018) ont été adoptées pour pallier cette problématique et sont

résumées dans ce chapitre. Il aurait été intéressant de savoir si d'autres techniques médicales ou numériques ont essayé de trouver une solution au problème médical posé. *En effet à part les travaux du LAMIH de 2018, et une bibliographie relativement ancienne d'un point de vue médical où même de l'automatique, on ne sait pas si d'autres solutions ont été explorées par ailleurs. Un éclairage bibliographique de ce point de vue aurait été le bienvenu.*

La seconde partie du chapitre décrit les modèles biomécaniques classiques existants pour traduire la posture étudiée, accéder de manière non invasive aux variables non mesurables comme les efforts articulaires et apporter les solutions adéquates pour une rééducation fonctionnelle. **Hajer SRIHI** présente ensuite deux modèles permettant une approche moins conventionnelle que la dynamique inverse pour reconstruire les couples articulaires, celle à base d'observateurs qui a déjà montré son efficacité : Le modèle « Seated-3-Segments » (S3S-2D) notamment, qui est un triple pendule inverse-2D dans le plan sagittal (tronc, bras et avant-bras), plus proche d'une réalité anatomique que ses prédécesseurs. Les avantages et inconvénients de ce type modèle sont également présentés.

Le chapitre 2 est consacré au modèle S3S-2D et son exploitation. Partant du précédent travail au LAMIH qui avait déjà développé le modèle S3S-2D, la candidate rappelle dans quel contexte il avait été élaboré et pour quels objectifs. Dans un premier, le modèle S3S-2D à 3 degrés de liberté relatifs aux mouvements de flexion/extension définis du tronc, de l'épaule et du coude mis sous forme descripteur est présenté en détail montrant son côté instable en boucle ouverte du fait qu'il soit sous actionné au niveau du tronc dans le cas d'une LME, le couple à ce niveau n'étant pas activable. Par conséquent la nécessité de proposer une loi de commande stabilisante s'impose avant de synthétiser les estimateurs des efforts articulaires. Pour ce faire, le formalisme Takagi-Sugeno qui a déjà fait ses preuves pour représenter un modèle non linéaire de manière exacte dans un espace compact de l'espace d'état a été choisi. La mise en œuvre de la loi de contrôle est basée sur le même formalisme et le gain de contrôle est déterminé via la résolution de LMI. Au regard des non-linéarités induites le problème LMI est décomposé en utilisant judicieusement plusieurs techniques développées. Cela passe dans le cas de ce travail par la modélisation d'une partie des non-linéarités par des incertitudes, ou par l'exploitation de la propriété de similarité entre certaines non-linéarités, ou par la combinaison de ces méthodes. Même si ces méthodes ont montré leur efficacité dans leur capacité à réduire le temps de traitement tout en assurant la faisabilité des LMI et que les simulations qui en découlent sont sans appel, on peut se poser la question de jusqu'à quel niveau on s'arrête dans la réduction si on suit ce processus ? le modèle reste-t-il représentatif ? L'espace d'état et donc les hypothèses des contraintes selon les individus étant amené à évoluer.

Hajer SRIHI a ensuite abordé la partie estimation des couples articulaires en proposant une version continue de l'observateur global du modèle S3S-2D à travers la synthèse d'un observateur PI. En mixant plusieurs approches de la littérature, une description polytopique avec 4 non-linéarités mesurables et 3 non-linéarités non mesurables est utilisée et la synthèse des gains de l'observateur effectuée à travers les 4 non-linéarités mesurables. Les résultats de simulations confortent les développements théoriques même si les erreurs entre les couples articulaires estimés et simulés peuvent susciter quelques interrogations (figure 26). Des simulations avec des couples simulés plus importants auraient été intéressantes à réaliser. **Hajer SRIHI** explicite très bien en fin de chapitre les limites de cet observateur au regard du modèle choisi et adopte une piste parmi d'autres pour améliorer les performances, ce qui fait l'objet du chapitre 3.

Le chapitre 3 présente la contribution majeure de ce travail de thèse. Il propose de décomposer le modèle S3S-2D sous forme descripteur présenté au chapitre précédent en trois modèles interconnectés. L'objectif étant de proposer des observateurs locaux en cascade non linéaires. Le modèle devient ainsi constitué de deux modèles dynamiques, l'un représentant le tronc et l'autre les bras du patient. Ces deux modèles étant interconnectés par un terme statique de couplage au niveau de l'épaule. A partir de cette nouvelle modélisation un observateur local à chacun des sous-systèmes est synthétisé. En exploitant judicieusement des résultats de la littérature ainsi que la propriété des modèles locaux de se mettre sous forme triangulaire

qui s'y prête comme pour tout modèle lagrangien, un principe de séparation pour les observateurs continus basé sur le principe de comparaison vectorielle est appliqué avec succès. Dès lors deux observateurs PI en cascade sont synthétisés et les contraintes LMI sont résolues en suivant le même protocole que le chapitre précédent. Pour boucler les deux observateurs continus, une équation du couplage permet de donner l'estimée du couple de couplage à partir de l'estimée du couple au niveau de l'épaule ainsi que les vitesses et les accélérations extraites de l'observateur du système bras. Des résultats de simulations aussi bien que des résultats exploitant des données expérimentales permettent avec différents protocoles d'obtenir des résultats similaires à ceux obtenus avec le modèle global, ce qui valide l'approche proposée.

Ce chapitre s'attaque ensuite à la réécriture en discret du modèle ainsi qu'à la synthèse de la batterie d'observateurs et compare ses résultats avec ceux de l'observateur global discret de Blandeau 2018. Là encore les résultats de simulations présentés ainsi que ceux exploitant des données expérimentales montrent que l'approche des observateurs en cascade donne des résultats similaires à celle de l'observateur global. Il serait intéressant dans les différents cas de figure de ce chapitre, d'en dire plus sur les temps de calcul, sur les choix des taux de décroissance ou bien sur le placement de pôle et comment cela affecte les comparaisons entre les méthodes ou les différentes simulations. Les résultats très prometteurs de l'approche proposée font qu'on a de suite envie d'aller plus loin, ce qui est clairement analysé par l'auteur et motive à la lecture du chapitre qui suit.

A l'instar des autres chapitres précédents, ce dernier chapitre porte aussi le nom du modèle qu'il l'anime à savoir « *Le modèle T2A-2D* ». Forte des résultats obtenus sur la synthèse d'observateurs interconnectés pour le modèle biomécanique S3S-2D décomposé, **Hajer SRIHI** propose dans ce chapitre de dissocier les bras pour coller plus à la réalité physiologique en ajoutant un membre supérieur supplémentaire obtenant ainsi un nouveau modèle avec deux bras pouvant évoluer différemment dans le plan sagittal. En suivant la même méthodologie du chapitre 4, une réécriture du modèle tenant compte des degrés de liberté supplémentaires est effectuée suivi d'une stabilisation par retour d'état vu que le système reste par nature naturellement instable en boucle ouverte. La synthèse d'observateurs interconnectés s'effectue selon la même méthodologie de manière assez directe. Des résultats de simulations et des résultats exploitant des données expérimentales sont ensuite présentés en fin de chapitre. Il aurait été intéressant de pousser un peu plus les analyses, peut-être empêchées par le manque de données expérimentales ? Une comparaison avec les résultats du chapitre précédent aurait aussi permis de mieux appréhender l'apport de ce nouveau modèle au regard de la problématique initiale et pas seulement du problème d'automatique. On peut aussi se poser la question que si le fait de considérer qu'un mouvement dans le plan sagittal pour chercher une position d'équilibre est le plus intuitif. S'agissant des développements théoriques, une analyse plus approfondie sur les choix de ces observateurs en lien avec la modélisation aurait été intéressante que ce soit pour ce chapitre ou le précédent.

La dernière partie du manuscrit, présente une conclusion générale et des perspectives. Les objectifs de la thèse sont rappelés et les différentes contributions explicitées et mis en regard avec les productions scientifiques correspondantes. Plusieurs perspectives montrant le chemin restant à parcourir sont ensuite données beaucoup plus sur le plan de la validation expérimentale que sur le plan théorique que ce soit pour la modélisation ou la synthèse d'observateurs. Il serait bien de pouvoir développer quelques pistes en lien avec les contributions et pas seulement d'un point de vue de la validation expérimentale.

Madame **Hajer SRIHI** a mené un travail de recherche à cheval entre deux disciplines ; l'automatique appliquée à des situations de handicap. Ce travail a nécessité d'appréhender des notions très pointues dans l'une ou l'autre des disciplines pour utiliser judicieusement des théories développées sur les systèmes polyptiques ou la synthèse d'observateurs interconnectés et les adapter avec succès à des modèles utilisant des données expérimentales. Le manuscrit est bien rédigé, les objectifs ainsi que les contributions sont bien identifiés et la lecture se fait aisément que ce soit pour la partie biomédicale ou la partie automatique. Il aurait été intéressant de savoir si le travail s'inscrit dans un cadre particulier comme un projet ou un quelconque partenariat. Les

travaux de **Hajer SRIHI** comptabilisent 1 revue internationale « Frontiers in Control Engineering » et 3 conférences dont une nationale avec le prix de la meilleure communication.

Pour toutes ces raisons, je donne un avis très favorable à Madame **Hajer SRIHI** pour la présentation de ses travaux devant le jury en vue de l'obtention du grade de Docteur de l'Université Polytechnique Hauts-De-France.

Reims, le 5/12/2023

Pr. Nouredine MANAMANNI



ISEA, 7 rue Marconi
57000 Metz
France

Tél. +33(0)372749304

Fax : +33(0)372749301

E-Mail : yann.moreere@univ-lorraine.fr

Page Web : <https://www.lcoms.univ-lorraine.fr/>

RAPPORT SUR LE MANUSCRIT DE THÈSE

«Stratégies de Stabilité en Position Assise chez les Personnes Vivant avec une Lésion de la Moelle Épinière : de l'estimation utilisant des modèles descripteurs quasi-LPV à la validation expérimentale»

présenté par **Madame Hajer SRIHI**

en vue de l'obtention du titre de Docteur en Automatique et Productique
Docteur de l'Université Polytechnique Hauts-De-France
et de l'INSA Hauts-de-France.

Par Yann MORÈRE Maître de Conférences HDR (LCOMS-UL)

Le travail de thèse de Madame Hajer SRIHI porte sur la modélisation des stratégies de maintien de la posture assise de la personne avec lésion médullaire et la prédiction des couples articulaires non mesurables des membres supérieurs. Ces derniers doivent permettre de mieux comprendre les stratégies de stabilisation mise en œuvre, qui sont différentes de celles de personnes asymptomatiques. Une quantification de ces variables doit permettre, à termes, d'évaluer l'impact de la lésion sur le système stabilisateur du tronc, d'éviter les chutes et de proposer des techniques adaptées pour un meilleur maintien de la stabilité.

Les travaux présentés proposent de définir et de comparer 2 modèles biomécaniques de la personne médullo-lésée (S3S-2D et T2A-2D), de synthétiser des commandes essentiellement non linéaires pour stabiliser ce modèle instable par défaut, puis d'élaborer des observateurs pour reconstruire les données inconnues. Toutes ces méthodes utilisent le formalisme de Takagi-Sugeno qui permet de donner une représentation exacte de la dynamique d'un système non linéaire dans un domaine de validité défini à partir d'une somme convexe de sous-modèles linéaires. Une autre conséquence intéressante est que l'analyse de la stabilité ainsi que la synthèse du contrôleur peuvent être réalisées à travers des LMI (Linear Matrix Inequalities) qui sont résolues à partir des techniques d'optimisation convexes. Cependant l'inconvénient majeur est que le nombre de sous modèles augmente en puissance de 2 des non linéarités ce qui rend la méthode rapidement inutilisable avec les solveurs numériques actuels.

Le travail développé dans cette thèse consiste à définir des modèles complexes issus de la biomécanique, sans simplification, représentant du mieux possible l'anatomie humaine tout en trouvant des solutions pour diminuer la complexité calculatoire afin de pouvoir utiliser les solveurs.

Ce travail fait intervenir de nombreuses compétences théoriques récentes dans le domaine de l'automatique (commande et observation) mais aussi dans le domaine de la biomécanique et aussi du handicap.

Il a donné lieu à 2 articles internationaux (Modelling, Measurement and Control C 2022 et Frontiers in Control Engineering 2021), 2 conférences internationales avec comité de sélection (IFAC - Intelligent Control and Automation Sciences 2022, 21 IFAC World Congress 2020) et 3 conférences nationales avec comité de sélection (1 Handicap 2022, 2 Congrès de la Société Francophone Posture Équilibre Locomotion (SOFPEL) 2021). Mme SRIHI s'est aussi distinguée en recevant 3 prix scientifiques : Prix Thierry Célérier Femmes et Sciences promotion 2022, Rennes ; Prix de la meilleure communication au congrès Handicap 2022, Paris ; Prix du meilleur poster scientifique au titre de la journée régionale des doctorants en automatique en 2021, Compiègne.

Le manuscrit de 150 pages est organisé en 4 chapitres principaux, une introduction générale ainsi qu'un chapitre conclusions et perspectives :

L'«Introduction Générale» rappelle, dans une première partie, le contexte et les motivations de la recherche présentée dans la thèse. Après un bref rappel de la notion de Handicap, il y est décrit les conséquences de la lésion médullaire sur le maintien de la position assise et le risque de chute ainsi que les stratégies compensatoires développées par les patients lésés. Deux premiers modèles (H2AT, S3S-2D) issus d'une précédente thèse (Blandeau 2018) y sont présentés ainsi que les méthodologies utilisées pour les stabiliser et donner une estimation des couples articulaires non mesurables. Dans une seconde partie les objectifs de la thèse sont présentés. Ils consistent en un enrichissement des précédents modèles pour prendre en compte des mouvements asymétriques des membres supérieurs tout en garantissant une solution réalisable avec les solveurs actuels. Les résumés de chaque chapitre terminent l'introduction générale.

— *Cette introduction aurait pu bénéficier de quelques précisions quant aux besoins des personnes médullo-lésées pour justifier les pistes envisagées en terme de stratégie de stabilisation.*

Le chapitre 1 «La lésion médullaire» présente dans un premier temps le contrôle posturale chez le patient asymptomatique. Une seconde partie est dédiée à la présentation détaillée du rachis vertébral. Une troisième partie présente les caractéristiques d'une lésion médullaire, ses conséquences morphologiques et physiologiques qui conduisent à une situation de handicap. On retrouve dans cette partie quelques références à la qualité de vie de la personne médullo-lésée. L'impact négatif sur la stabilité posturale en position assise est ensuite détaillée. Elle décrite en terme de contrôle et de stratégies compensatoires du fait de l'absence totale ou partielle de l'activité musculaire au niveau abdominal et au niveau du tronc ainsi que la perte totale ou partielle de la sensation en dessous de niveau lésionnel. On y retrouve une précédente étude expérimentale permettant d'identifier des mouvements compensatoires effectués par des sujets lésés médullaires afin de stabiliser leur assise en cas de perturbation externe (Blandeau 2018). Les données de cette études seront utilisés comme outil de validation des travaux présentées dans les chapitres suivants. La dernière partie est consacrée à la modélisation de la position assise. Elle présente l'approche par dynamique inverse appliquée à un modèle en chaîne

segmentaire largement utilisé dans le domaine de la biomécanique. Elle permet de calculer les couples de chaque segment corporel en considérant un seul couple par articulation. Les travaux de Tanaka et al. (2010), quant à eux, utilisent un modèle entier par l'écriture des équations dynamiques par dérivation du Lagrangien. C'est cette approche qui est choisie dans la suite des travaux. Elle diffère de l'approche par dynamique inverse car elle modélise le modèle segmentaire dans sa globalité, et non par segments. La fin du chapitre présente rapidement modèle H2AT (Head-2-Arms-Trunk) et le modèle S3S-2D (Seated-3-Segments) développé par (Blandeau 2018) ainsi que les résultats en termes de commande et d'observation de ces précédents travaux.

— *La section « lésion de la moelle épinière » décrit clairement les troubles engendrés par cette atteinte et stipule que la récupération motrice est perçue par les patients comme la priorité fonctionnelle la plus importante. Cependant, aucune information supplémentaire n'est donnée concernant cette réadaptation et dans quelle cadre les travaux entrepris peuvent améliorer cette phase de récupération motrice. Plus de détails sur cette partie et une comparaison avec des travaux existants dans le domaine aurait éclairé le lecteur sur les gains potentiels pour le patient. À titre d'exemple, les travaux décrits dans [1] montre que la stimulation transcutanée ciblée de la moelle épinière améliore le contrôle du tronc et la stabilité posturale chez les personnes souffrant de lésions de la moelle épinière en combinaison avec un entraînement à l'équilibre. L'évaluation de la stabilité posturale est réalisée à l'aide de capture de mouvement, combinée à l'électromyographie (EMG) de certains muscles de la partie inférieure du tronc et des enregistrements vidéo.*

Le chapitre 2 s'attache à présenter « le modèle S3S-2D » en détails. Les travaux de (Blandeau 2018) dans le cas discret sont rappelés (commande stabilisante avec contraintes LMI). On quitte maintenant clairement le domaine du handicap, pour entrer dans celui de l'automatique des systèmes non linéaires modélisés par le formalisme quasi LPV (linéaire à paramètres variants) ou formalisme de Takagi-Sugeno (T-S) et les méthodes de commandes et observations associées. Notre patient lésé est donc assimilé à un triple pendule inversé (tronc, bras et avant bras : modèle S3S-2D). Le modèle étant plus complexe, le nombre de non-linéarité augmente aussi empêchant l'utilisation des solveurs actuels après la mise sous forme LMI du problème. Les contributions faites dans ce chapitre permettent de réduire ce nombre de contraintes grâce à une description des incertitudes et l'utilisation de certaines similarités du développement limité de fonctions non linéaires. La mise en équation du modèles est très détaillée et en montre sa complexité intrinsèque. Le modèle généré est instable en boucle ouverte du fait de l'absence de contrôle au niveau du tronc (système sous actionné). Le modèle en boucle fermée contient des non linéarités qu'il n'est pas possible de linéariser autour du point d'équilibre sous peine de réduire drastiquement le domaine d'utilisabilité du modèle. La formalisation de Takagi-Sugeno est alors utilisée. Cette représentation conduit une combinaison des modèles linéaires connectés ensemble avec des fonctions d'appartenance non linéaires et satisfaisant la propriété de somme convexe. L'analyse de la stabilité ainsi que la synthèse du contrôleur sont alors réalisées à travers des Inégalités Linéaires Matricielles (LMI) résolues à partir des techniques d'optimisation convexes. Un des problèmes majeures est que le nombre des modèles locaux obtenus évolue exponentiellement en puissance 2 des non linéarités considérées. Il convient de trouver des solutions pour réduire ce nombre afin de rendre le problème compatible avec les outils numériques de résolution. Un second point important est que plusieurs représentations T-S peuvent être associées au même modèle non linéaire selon la manipulation algébrique des matrices et des non linéarités et peuvent être stables ou instables, incontrôlables ou inobservables. La formulation du problèmes sous contraintes LMI est ensuite définie ainsi que les méthodes de réduction de complexité : description en incertitude et utilisation des propriétés trigonométriques des fonctions d'appartenance. Les résultats des différentes configurations LMI du problème sont présentés en comparant la faisabilité et les temps

de calculs des 4 lois de commande. La loi de commande calculée est ensuite simulée avec perturbation pour vérifier le domaine de validité du modèle ainsi que sa robustesse. Afin d'évaluer les couples articulaires non mesurables, un observateur est synthétisé dans la cas continu (la cas discret utilisant une approximation théoriquement non justifiée) grâce à l'utilisation des propriétés trigonométriques des fonctions d'appartenance permettant de réduire la complexité. Le système complet (système + contrôleur + observateur) est alors simulé dans deux conditions différentes : contribution passive du tronc comme un signal sinusoïdal et un couple passif traduit par un signal échelon. Les résultats montrent une bonne performance de l'observateur sur l'ensemble des variables.

- *Dans le début du chapitre on peut lire : « Dans le but d'aider les cliniciens dans leur diagnostic, il est intéressant de reconnaître la stratégie utilisée et de fournir des indications sur la manière dont elle a été produite ». Cette finalité est très peu explicitée et différente de celle donnée au chapitre précédent qui consiste à proposer des stratégies de stabilisation.,*
- *Dans ce chapitre, il est indiqué que les modèles T-S générés peuvent être instables, non commandable et non observable. Y a-t-il un moyen de s'assurer a priori que le modèle T-S généré est stable, commandable et observable ?*
- *Dans la méthode de synthèse de l'observateur global, un observateur à structure de Observateur PI est utilisé. Quelques informations complémentaires sur ses spécificités et ses caractéristiques manquent peut être pour faciliter la compréhension.*

Le chapitre 3 « Le modèle S3S-2D décomposé » propose de décomposer le modèle global en 2 systèmes dynamiques, un système « tronc » et un système « bras », qui seront couplés par un système de liaison. Cette approche de décomposition en cascade permet de résoudre le problème de complexité tout en conservant des conditions de stabilité. Elle permet aussi un partitionnement dans la conception des observateurs. La synthèse des deux observateurs (de type Observateur PI) est réalisée après mise sous la forme de problèmes LMI solvables. Ensuite La mise en oeuvre de la méthode de séparation est réalisée dans le cas continu avec une validation par les données expérimentales de 2 sujets medullo-lésés complets issues de (Blandeau 2018). Les variables de l'estimateur global et des estimateurs mis en cascade sont comparés et les résultats montrent l'équivalence entre l'observateur global continu du modèle S3S-2D non linéaire et sa version décomposée. La méthode est alors réitérée dans le cas discret dans les mêmes conditions. Les résultats des deux types d'observateurs sont évalués en comparant les variables estimées et les variables mesurées et attestent de la fiabilité de la cascade des observateurs. Les résultats montrent l'équivalence entre l'observateur global continu du modèle S3S-2D non linéaire et sa version décomposée. L'approche de décomposition sur le modèle étudié est donc validée.

- *De manière générale dans cette partie, très peu de liens sont fait entre les résultats obtenus en simulation et une évaluation des stratégies de compensation de la personne medullo-lésée. Quelques pistes de réflexion auraient apporté un plus à ce chapitre, notamment sur l'apport de ce modèle plus complexes.*

Le chapitre 4 « Le modèle T2A-2D (Trunk-2-Arms) » présente une extension au modèle S3S-2D permettant de modéliser deux membres supérieurs évoluant de manière différente dans le plan sagittal. La complexité du modèle augmentant, il faut s'assurer de la capacité de résolution des outils numériques sans altérer le modèle non linéaire. Pour cela la méthode de décomposition en cascade est reprise. Dans une première partie du chapitre la synthèse du modèle T2A-2D est détaillée en sous-systèmes locaux. Une commande par retour d'état est ensuite conçue pour le stabiliser en utilisant

les mêmes techniques de réduction du nombre des non linéarités que dans les chapitres précédents. La simulation de stabilisation est ensuite réalisée avec perturbation afin d'évaluer la robustesse. Trois observateurs PI (Tronc, Bras droit et bras gauche) sont ensuite synthétisés. Les tests de simulation sont réalisés en utilisant des paramètres différents pour chacun des bras, afin de créer une dissymétrie qui permette de tester l'intérêt du modèle T2A-2D. Les erreurs (simulé-estimé) sont faibles et confirment la robustesse de la cascade des observateurs en présence d'un changement des paramètres entre le bras gauche et le bras droit mais aussi face à la perturbation sinusoïdale. La dernière partie du chapitre consiste à simuler les trois observateurs locaux avec des données réelles d'un sujet avec des mouvements de bras dissymétriques issues de la collecte expérimentale de (Blandeau 2018). Les résultats en terme de couples estimés prouvent l'efficacité du modèle T2A-2D dans le cas de mouvements différents dans le plan sagittal.

— *Dans ce chapitre, l'interprétation des résultats de certaines figures auraient mérités plus d'explications. De même la paragraphe sur l'effet de l'extension des membres inférieurs aurait peut-être mérité un schéma.*

Le chapitre « Conclusion et perspectives », après avoir rappelé les objectifs initiaux, donne les principales contributions de la thèse :

- La synthèse de lois de contrôle stabilisantes pour le modèle S3S-2D global en discret ;
- La synthèse d'un observateur global pour le modèle S3S-2D en continu ;
- Le développement de techniques permettant de réduire la complexité numérique tout en conservant les caractéristiques du modèle non linéaire d'origine en utilisant une décomposition en cascade. Application sur le modèle S3S-2D en continu et en discret ;
- La preuve de stabilité de convergence de l'erreur d'état en continu et discret et validation en simulation et sur données réelles ;
- Le développement et la validation du modèle T2A-2D qui étend le modèle S3S-2D ;

Il se termine par des perspectives :

- Un enrichissement du modèle T2A-2D pour passer à un modèle 3D lorsque les mouvements sont en dehors du plan sagittal.
- Pour l'instant les données de couples articulaires sont estimées, et pour valider les modèles expérimentalement et il est nécessaire de faire référence à des données réels. Dans ce cadre un mannequin complètement instrumenté a été développé et permettra de valider les approches proposées (en commande et observation) puis d'en étudier la robustesse.

Remarque sur le préambule : J'ai particulièrement apprécié le préambule engagé éclairant la position des femmes, et particulièrement des femmes en situation de handicap au sein de la recherche et de la société en générale. Effectivement le chemin est encore très long avant d'obtenir une parité scientifique. Les mentalités ont fort heureusement évolués et certains progrès sont là. La parité, l'égalité oui, mais en respectant les différences de chacun.

Remarque sur la qualité du document : Le document est dans sa version finale, mais nécessite peut être une relecture rapide pour corriger quelques coquilles typographiques.

Le manuscrit, malgré les longs développements mathématiques est agréable à lire et d'une qualité égale dans tous les chapitres. Le langage est clair et utilise les termes relatifs aux domaines étudiés. La bibliographie est importante et comporte des références récentes.

Conclusion :

Le travail de thèse de Madame Hajer SRIHI est conséquent et fait intervenir des concepts de l'automatique théorique très récents. Les développements mathématiques très importants du manuscrit, ainsi que les tests en simulation en attestent et viennent appuyer la qualité scientifique du travail. La structure du manuscrit est progressive et permet de bien comprendre les enjeux et les solutions théoriques apportées. Certaines parties auraient, peut-être pu être augmentées (Observateur PI, par exemple) pour améliorer la compréhension du lecteur.

De manière générale dans le document, même si le premier chapitre nous présente de manière détaillée la lésion médullaire et ses conséquences sur la stabilité posturale, les liens avec la population ciblée et le handicap sont assez parcimonieux. La bibliographie autour des solutions techniques apportées pour la stabilité des personnes medullo-lésée aurait méritée d'être un peu augmentée. Effectivement, ces travaux de recherche se situent bien en amont des solutions qu'il sera possible de proposer, mais quelques pistes concrètes auraient été un plus. De même l'interprétation des résultats se focalisent essentiellement sur des données physiques de vitesse et couple articulaire et n'ouvrent pas de réflexion sur leurs exploitations en terme de stratégie de stabilité posturale chez le patient ou encore d'aide au diagnostic pour le praticien de santé.

Ces précédentes remarques n'altèrent en rien, ma conviction que ce travail apporte une avancée théorique très significative en terme de commande et d'observation de systèmes non linéaires complexes. Les développement proposés ont été validés par simulation mais aussi à l'aide de données réelles. Les perspectives envisagent une validation complète des méthodes proposées grâce à un mannequin humanoïde instrumenté permettant l'accès aux variables non mesurables chez le patient.

Pour toutes ces raisons, je donne un avis très favorable à la soutenance publique de la thèse de Doctorat de Madame Hajer SRIHI à l'Université Polytechnique Hauts-De-France et l'INSA Hauts-de-France.

Références

- [1] M. Rath, A. H. Vette, S. Ramasubramaniam, K. Li, J. Burdick, V. R. Edgerton, Y. P. Gerasimenko, and D. G. Sayenko, "Trunk stability enabled by noninvasive spinal electrical stimulation after spinal cord injury," *Journal of neurotrauma*, vol. 35, no. 21, pp. 2540–2553, 2018.

Yann MORÈRE
Maître de Conférences HDR

A handwritten signature in black ink, consisting of a series of loops and a long horizontal stroke, positioned below the printed name.

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE HAUTS DE FRANCE
PROCÈS-VERBAL DE SOUTENANCE DE THÈSE

Nom et Prénom : SRIHI Hajer
 Diplôme : Automatique, productique
 Titre de la thèse : Titre : « Stratégies de Stabilité en Position Assise chez les Personnes Vivant avec une Lésion de la Moelle Épineuse : de l'estimation utilisant des modèles descripteurs quasi-LPV à la validation expérimentale ».
 Sous la Direction de : THIERRY-MARIE GUERRA et PHILIPPE PUDLO
 École Doctorale : Ecole Doctorale Polytechnique Hauts-de-France
 Lieu de soutenance : Bâtiment Abel de Pujol 2 LE MONT HOUY 59313 VALENCIENNES
 Date et heure : 21 décembre 2023 à 10h00
 Soutenance ☒ PUBLIQUE ☐ À HUIS-CLOS
 Cotutelle de thèse : ☐ OUI ☒ NON

Président du jury * : SIMONEAU Emilie (À COMPLÉTER)

Le jury prononce:

- ☒ l'admission du candidat au titre de docteur de l'Université Polytechnique Hauts de France
☐ l'ajournement du candidat

A l'issue de la soutenance Madame SRIHI Hajer a prêté serment :

☒ Oui ☐ Non

La Direction de la thèse ne signe en aucun cas le procès-verbal de soutenance.
Pour être valides, les documents de soutenance ne doivent pas être modifiés.

Civilité, NOM, Prénom	Fonction	Titre	Visio conférence	Signature
M. NOUREDDINE MANAMANNI	Rapporteur	Professeur des universités	NON	
M. YANN MORERE	Rapporteur	Maître de conférences	NON	
M. NASSER REZZOUG	Examineur	Maître de conférences	NON	
Mme EMILIE SIMONEAU	Examinatrice	Professeure des universités	NON	

* Article 18 de l'arrêté du 25 mai 2016 fixant le cadre national de la formation et les modalités conduisant à la délivrance du diplôme national de doctorat : « Les membres du jury désignent parmi eux un président. Le président doit être un professeur ou assimilé ou un enseignant de rang équivalent. »

* En application de l'article L612-7 du code de l'éducation, les établissements d'enseignement supérieur et de recherche mettent en œuvre, dans le cadre des soutenances de leurs doctorantes et doctorants, une prestation de serment d'intégrité scientifique.

* Article 19bis de l'arrêté du 26 août 2022 de la formation doctorale modifiant l'arrêté du 25 mai 2016 : « A l'issue de la soutenance et en cas d'admission, le docteur prête serment, individuellement, en s'engageant à respecter les principes et exigences de l'intégrité scientifique dans la suite de sa carrière professionnelle, quel qu'en soit le secteur ou le domaine d'activité. »

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE HAUTS DE FRANCE
RAPPORT DE SOUTENANCE

Nom et prénom du doctorant : SRIHI Hajer


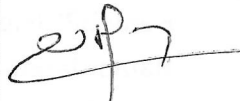
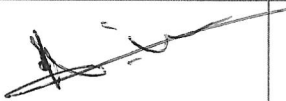
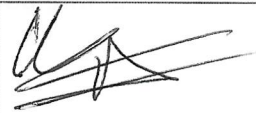

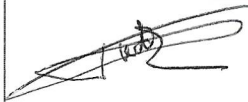
Titre de la thèse : Titre : « Stratégies de Stabilité en Position Assise chez les Personnes Vivant avec une Lésion de la Moelle Épineière : de l'estimation utilisant des modèles descripteurs quasi-LPV à la validation expérimentale ».

École Doctorale : Ecole Doctorale Polytechnique Hauts-de-France

Date de la soutenance : 21 décembre 2023

Président du jury : SIMONEAU Emilie (À COMPLÉTER)

Membres du jury (y compris les encadrants) :

Nom	Signature	Nom	Signature
THIERRY-MARIE GUERRA		NOUREDDINE MANAMANNI	
YANN MORERE		NASSER REZZOUG	
EMILIE SIMONEAU		PHILIPPE PUDLO	

Les membres du jury attestent avoir pris connaissance de l'intégralité du rapport. La Direction de la thèse atteste ne pas avoir pris part à la décision. Si le rapport comporte plusieurs pages ou s'il est rédigé sur un document distinct, il devra être paraphé sur chaque page et signé par le Président du jury.

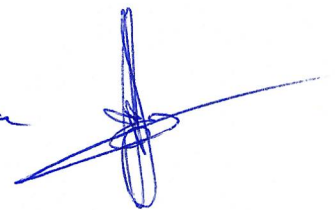
Thèse de Doctorat soutenue par Mme Hajer SRIHI, le 21/12/2023 à Valenciennes

Mme Hajer SRIHI a présenté ses travaux de Doctorat au cours d'un exposé oral d'une quarantaine de minutes. La présentation a mis en évidence les qualités pédagogiques de la candidate. Son intervention, bien structurée, claire et fluide, a bien complété le manuscrit. Elle a permis également de répondre à différents commentaires issus des rapports préalables à la soutenance. L'histoire qu'elle a racontée est allée crescendo, abordant des modèles de plus en plus complexes et qui ouvrent sur de nombreuses perspectives qui devraient, à terme, permettre d'améliorer la stabilité assise des personnes médullo-lésées. Le jury a tenu à souligner la pluridisciplinarité du travail réalisé, incluant des connaissances et compétences provenant des domaines de l'automatique, de la biomécanique et du handicap. Les nombreux échanges avec les membres du jury ont mis en évidence la maîtrise de la candidate sur le sujet et dans les différents domaines abordés. A ce jour, la candidate a déjà réussi à valoriser une partie de ses travaux scientifiques dans des revues internationales reconnues dans le domaine. Pour toutes ces raisons, les membres du jury ont décidé, à l'unanimité, d'attribuer à Mme Hajer SRIHI le grade de Docteur en Automatique et Productique de l'Université Polytechnique Hauts-de-France (UPHF) et de l'INSA HDF. Le jury a également adressé ses félicitations à la candidate pour l'ensemble de son parcours.

N. MANANTANI



J.-D. QUELUS



N. REZOUK



Y. MORETE



P. PUDON



Présidente
Emilie SIMONEAU



DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE HAUTS DE FRANCE
AVIS DU JURY SUR L'ARCHIVAGE ET LA DIFFUSION DE LA THÈSE SOUTENUE

Titre de la thèse : Titre : « Stratégies de Stabilité en Position Assise chez les Personnes Vivant avec une Lésion de la Moelle Épinière : de l'estimation utilisant des modèles descripteurs quasi-LPV à la validation expérimentale ».

Nom et prénom de l'auteur : Hajer SRIHI

Membres du jury :

- M. THIERRY-MARIE GUERRA, Directeur de thèse
- M. NOUREDDINE MANAMANNI, Rapporteur
- M. YANN MORERE, Rapporteur
- M. NASSER REZZOUG, Examineur
- Mme EMILIE SIMONEAU, Examineur
- M. PHILIPPE PUDLO, Co-directeur de thèse

À l'issue de la soutenance, le jury estime que la thèse ci-dessus mentionnée :

- ☒ Peut être reproduite en l'état
- ☐ Peut être reproduite en l'état mais le jury suggère des corrections d'amélioration du document qui ne donneront pas lieu à validation
- ☐ Ne pourra être reproduite qu'après corrections par le docteur et validation par le Président du jury
- ☐ Ne pourra être reproduite pour des raisons de confidentialité pour une durée de : mois

Date et signature du Président du jury (indiquer les nom et prénom) :

le 21/12/2023

Emilie SIMONEAU



**DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE HAUTS DE FRANCE**

ATTESTATION DE REUSSITE

Abdelhakim Artiba, atteste que le diplôme de doctorat de l'Université Polytechnique Hauts de France, préparé au sein de l'École Doctorale « Polytechnique Hauts-de-France », dans la spécialité « Automatique, productique », a été décerné à

Madame Hajer SRIHI

Née le 24 janvier 1995 à TUNIS (Tunisie)

Au titre de l'année universitaire 2023-2024

Titre des travaux : Titre : « Stratégies de Stabilité en Position Assise chez les Personnes Vivant avec une Lésion de la Moelle Épinière : de l'estimation utilisant des modèles descripteurs quasi-LPV à la validation expérimentale ».

Date de soutenance : 21 décembre 2023

Lieu de soutenance : amphi 70 A Bâtiment Abel de Pujol 2 LE MONT HOUY 59313 VALENCIENNES

Composition du jury :

Mme EMILIE SIMONEAU, Professeure des universités, Université Polytechnique Hauts de France - Président

M. NOUREDDINE MANAMANNI, Professeur des universités, Université de Reims Champagne-Ardenne - Rapporteur

M. YANN MORERE, Maître de conférences, Université de Lorraine - Rapporteur

M. NASSER REZZOUG, Maître de conférences, Université de Poitiers - Examineur

M. THIERRY-MARIE GUERRA, Professeur des universités, Université Polytechnique Hauts de France - Directeur de thèse

M. PHILIPPE PUDLO, Professeur des universités, Université Polytechnique Hauts de France - Co-directeur

Fait à Valenciennes, le 8 janvier 2024

Abdelhakim Artiba

Président de l'Université Polytechnique Hauts de France





Cascade Descriptor Observers: Application to Understanding Sitting Control of Persons Living With Spinal Cord Injury

Hajer Srihi*, Thierry-Marie Guerra, Anh-Tu Nguyen, Philippe Pudlo and Antoine Dequidt

Université Polytechnique Hauts-de-France, CNRS, UMR 8201 LAMIH, Valenciennes, France

OPEN ACCESS

Edited by:

Paulo Lopes Dos Santos,
University of Porto, Portugal

Reviewed by:

Sunan Huang,
National University of Singapore,
Singapore

Teresa Azevedo Perdicoulis,
University of Trás-os-Montes and Alto
Douro, Portugal

*Correspondence:

Hajer Srihi
Hajer.srihi@uphf.fr

Specialty section:

This article was submitted to
Control and Automation Systems,
a section of the journal
Frontiers in Control Engineering

Received: 15 May 2021

Accepted: 16 September 2021

Published: 05 November 2021

Citation:

Srihi H, Guerra T-M, Nguyen A-T,
Pudlo P and Dequidt A (2021)
Cascade Descriptor Observers:
Application to Understanding Sitting
Control of Persons Living With Spinal
Cord Injury.
Front. Control. Eng. 2:710271.
doi: 10.3389/fcteg.2021.710271

People with spinal cord injury (SCI) suffer from a drastic reduction in sitting stability which negatively impacts their postural control. Thus, sitting balance becomes one of the most challenging everyday exercises. To better understand the consequences of this pathology, we have to work with high-sized non-linear biomechanical models implying both theoretical and numerical difficulties. The main goal being to recover unmeasured inputs, the observer should have limited or no simplification at all to provide a better estimation quality. A Proportional Integral-observer (PI-observer) is designed and its convergence is formulated by linear matrix inequalities (LMI) through convex optimization techniques. Using a unique high-sized observer, the LMI constraints problem can quickly reach current solvers limitations regarding the number of unknown parameters required. A way to solve this issue is to design a cascade observer in order to estimate the unmeasurable torques of a human with SCI. This approach consists in decomposing a biomechanical model into interconnected subsystems and to build “local” observers. The relevance of this approach is demonstrated in simulation and with real-time experimental data.

Keywords: spinal cord injury, biomechanical systems, cascade observers, nonlinear model, Takagi-Sugeno formalism, LMI, spinal cord injury

INTRODUCTION

People with spinal cord injury (SCI) live with a complete or a partial paralysis of their abdominal and lower back muscles. The consequences on sitting control are visible in everyday activities: either reaching, taking objects, or accessing transport. Among the rehabilitation protocols offered to people with SCI, exercises are designed to teach new motor patterns to stabilize the upper part of the trunk, only through movements of the head and upper limbs (Janssen-Potten et al., 1999). Actually, the occupational therapist has no means of objectively following the learning of these new motor patterns, which must nevertheless guarantee a certain stability of the person in a seated position. The authors aim to provide objective data for the occupational therapist, which should enable him to better follow the learning of new motor patterns aimed at stabilizing the upper part of the body through upper limbs in particular. The authors aim also, like other movements such as walking, to provide real-time estimations to the occupational therapist, such as joint torques and their evolution over time. These variables are unmeasurable by nature, except invasive approaches, and this study proposes a way to estimate them using a model approach. This study is a proof-of-concept work to derive non-measurable (unknown) inputs variables from high-sized non-linear models and apply to people living with SCI. The challenge faced is how to derive non-linear observers for high-sized

systems that preserve at most the initial non-linear model. The main problem is that simplifications, such as partial linearization, will deteriorate the quality of the estimation, especially for the non-measured inputs as they are the “farthest” from the outputs, thus cumulating the imprecisions.

The case study concerns sitting control of persons living with SCI. This study comes from the difficulties to obtain performance results due to complexity and/or limitations of the results obtained previously¹. First of all, let us recall an important remark: the people with SCI can only mobilize their upper limbs to stabilize the sitting; thus, the main input torque available for a human, the trunk torque, is not functional. Considering the fact that the person cannot activate the muscles below the (complete) lesion and, therefore, no motor torque can be produced at this level to stabilize the upper part of the human body (when needed), people with SCI must, therefore, adopt new strategies to maintain their stability while sitting (Blandeau, 2018). Therefore, understanding how stability is preserved is important but difficult: the torques cannot be measured, the model is highly non-linear, open-loop is unstable, and closed-loop (in the sense of sensorimotor SCI internal control) is very weakly stable. Thus, modeling will also imply building an internal control to stabilize, which is out of the scope of this study, and has been done in Guerra et al. (2018). It implies a very restricted area of stabilization as very tiny disturbances may destabilize the sitting person with SCI. For the observation part, when using a relatively basic mechanical model called H2AT (for Head-Two-Arms-Trunk), non-linear observers expressed as quasi-LPV models were easily derived. “Easily” is interpreted as LMI constraints problems with a reasonable complexity compatible with actual solvers (Blandeau et al., 2018). From this preliminary H2AT model, a more complex model called S3S (Seated-3-Segment) has been built. It is a planar triple-inverted pendulum represented in the sagittal plane (2D) by the trunk, upper arm, and forearm segments. The idea is to go from its actual 2D-S3S to a 3D-S3S form. Nevertheless, in its 2D actual form and taking a global model, the number of states and non-linearities lead to LMI constraints problems that are already close to the limits of actual solvers, that is, for the brute way-of-doing thousands of constraints and millions of variables (Guerra et al., 2020). Recalling the initial goal of keeping a model the closest possible to reality, using appropriate techniques it is possible to solve the 2D-S3S observation problem with a unique model, but the fact that the optimization problem is close to the limits of the solvers, it is impossible to follow this way-of-doing to get any solution for a 3D-S3S. In order to be able to get feasible performance solutions, this study proposes to decompose the mechanical model under descriptor forms in interconnected systems, from where descriptor non-linear observers of reduced sizes can be derived from local problems (Lendek et al., 2008) (Gripa et al., 2012). It results in cascaded observers design for descriptor mechanical systems. We notice that partitioning approach applied to a non-linear system as well as in the observer design improves the

modularity and reduce complexity of the initial problem which implies a reduction in computational costs (Lendek et al., 2010). The goal is, thus, to apply the methodology on the 2D-S3S model from where results are already available as well as from real-time experiments. We will show that the methodology is perfectly tractable, with formal proof of convergences and results comparable to the global form of observation used in¹.

The article is organized as follows. After some notations, the second part recalls the 2D-S3S model and quasi-LPV models or so-called Takagi–Sugeno ones. It also gives a first solution to the estimation of the variables with a unique model is provided in continuous as a basis of comparison. The third part proposes a second solution based on decomposition in two interconnected cascaded local models. It includes a global result of convergence for cascaded descriptor models estimation. The fourth part applies this cascade observer way-of-doing to the 2D-S3S model and proposes a solution as a LMI constraints problem to solve. Fifth part proposes the simulation and real-time experiments compared with the global 2D-S3S observer and shows the relevance of the approach.

Notations and Useful Material: the following notations are adopted all along the study. For a given variable, its argument can be omitted and replaced with (\cdot) , for general purpose or when there is no ambiguity. With matrices A_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ of appropriate dimension, we define a polytopic description in the following form: $A_h = \sum_{i=1}^r h_i(\cdot) A_i$, with the nonlinear functions $h_i(\cdot) \geq 0$ being continuous and satisfying the convex sum property $\sum_{i=1}^r h_i(\cdot) = 1$. As usual $(*)$ stands for a transpose quantity $Q + (*)$ for $Q + Q^T$, and in a matrix $(*)$ represents the transpose of the entry in the symmetric position. At last, $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stands for the identity matrix and $0_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for the matrix of null entries.

STATEMENT OF THE PROBLEM

The 2D-S3S model has been presented in Guerra et al. (2020) and only its equations are recalled therein. The model **Figure 1** is a variation of the 2D triple-inverted pendulum represented in the sagittal plane by the trunk, upper arm, and forearm segments (i.e., segments 0, 1, and 2, respectively) and interconnected by revolute joints at points T (trunk), S (shoulder), and E (elbow), whereas the point H stands for hands. For a segment $i \in \{0, 1, 2\}$, $\Gamma_i(t)$ stands for the torque input, G_i stands for its center of mass (COM), m_i for its mass, l_i its length, l_{G_i} the length from origin to the COM, and I_{G_i} its moment of inertia. Regression rules are previously used to obtain these constants for a typical 80 kg male (Fang et al., 2017). The relative set points correspond to: $q_0 = \theta_0$, $q_1 + \pi = \theta_1 - \theta_0$, and $q_2 = \theta_2 - \theta_1$. These points correspond to the rest position, and 0 rad corresponding to the hands-up position.

The system of dynamic equations of the S3S model is obtained by deriving the Lagrangian equation $L = E - U$ with $E = \sum_{i=0}^2 E_i$, the kinetic energy, and $U = \sum_{i=0}^2 U_i$, the potential energy, where the kinetic energy (respectively potential) of the system is equal to the

¹Blandeau, M., Guerra, T. M., Dequidt, A., Pudlo, P., and Gagnon, D. H. (2021). “A nonlinear biomechanical model for studying sitting control for people living with a spinal cord injury – IEEE T,” in Control Systems Technology. (under review).

¹Blandeau, M., Guerra, T. M., Dequidt, A., Pudlo, P., and Gagnon, D. H. (2021). “A nonlinear biomechanical model for studying sitting control for people living with a spinal cord injury – IEEE T,” in Control Systems Technology. (under review).

sum of the energies of each solid. After some manipulations (see, Blandeau, 2018) the Lagrangian of the S3S model can be written as:

$$L = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} (I_{G_0} + m_0 l_{G_0}^2 + m_1 l_0^2 + m_2 l_0^2) + \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} (I_{G_1} + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} (I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2) - \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) + \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - m_2 g l_{G_2} \cos(\theta_2) - (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \cos(\theta_0) - (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \cos(\theta_1). \quad (1)$$

For introducing simplicity in the expressions, $I_{q2} = I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2$, $I_{q1} = I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2$ and $I_{q0} = I_{G_0} + I_{G_1} + I_{G_2} + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{G_2}^2 + m_0 l_{G_0}^2 + m_1 l_0^2 + m_2 l_0^2$; the dynamic is described (Khalil and Dombre, 2004) using $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Gamma_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$. It results in the following:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \ddot{q}_0 (I_{q0} - 2(m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - 2m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)) + \ddot{q}_1 (I_{q1} - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1)) + \ddot{q}_2 (I_{q2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)) + \dot{q}_1^2 ((m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1)) + \dot{q}_2^2 (m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)) + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 ((m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1)) + 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 (m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)) + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 (m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)) - (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \sin(q_0) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0), \\ \Gamma_1 &= \ddot{q}_0 (I_{q1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1)) + \ddot{q}_1 (I_{q1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)) + \ddot{q}_2 (I_{q2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)) - \dot{q}_0^2 ((m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1)) - \dot{q}_2^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0), \\ \Gamma_2 &= \ddot{q}_0 (I_{q2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)) + \ddot{q}_1 (I_{q2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)) + \ddot{q}_2 I_{q2} + \dot{q}_0^2 (m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1)) + \dot{q}_1^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0). \end{aligned} \quad (2)$$

With a state vector $x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ \dot{q}_0 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T \in \mathbb{R}^6$ the following non-linear system is obtained from Eq (2):

$$\begin{cases} E(q(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + S(q(t)) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (3)$$

where $y(t) = q(t) \in \mathbb{R}^3$ being the output vector, $u(t) = [\Gamma_0(t) \ \Gamma_1(t) \ \Gamma_2(t)]^T$ the torque inputs vector, $E(q(t)) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & \tilde{E}(q(t)) \end{bmatrix}$, $A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ \tilde{A}(x(t)) & 0_3 \end{bmatrix}$, $S(q(t)) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ \tilde{S}(q(t)) \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_3 \end{bmatrix}$, and $C = [I_3 \ 0_3]$ and the following matrix expressions is obtained:

$$\tilde{S}(q) = - \begin{bmatrix} -(m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) & m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1 & m_2 g l_{G_2} \\ 0 & m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1 & m_2 g l_{G_2} \\ 0 & 0 & m_2 g l_{G_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(q_0) \\ \sin(q_1 + q_0) \\ \sin(q_2 + q_1 + q_0) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(q) &= [e_{ij}]_{i,j \in \{1,2,3\}}, \tilde{A}(x) = [a_{ij}]_{i,j \in \{1,2,3\}}, \\ e_{11} &= I_{q0} - 2(m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - 2m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2), \\ e_{12} &= I_{q1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1), \\ e_{13} &= I_{q2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2), \\ e_{21} &= I_{q1} - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2), \\ e_{22} &= I_{q1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2), \\ e_{23} &= I_{q2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2), \\ e_{31} &= I_{q2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2), \\ e_{32} &= I_{q2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2), \text{ and } e_{33} = I_{q2}. \\ a_{11} &= \dot{q}_2 m_2 l_{G_2} (l_1 \sin(q_2) - l_0 \sin(q_2 + q_1)) - \dot{q}_1 ((m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1)), \\ a_{12} &= \dot{q}_2 m_2 l_{G_2} (l_1 \sin(q_2) - l_0 \sin(q_2 + q_1)) - (\dot{q}_1 + \dot{q}_0) ((m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1)), \\ a_{13} &= (\dot{q}_0 + \dot{q}_1 + \dot{q}_2) m_2 l_{G_2} (l_1 \sin(q_2) - l_0 \sin(q_2 + q_1)), \\ a_{21} &= \dot{q}_0 ((m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1)) + \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2), \\ a_{22} &= \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2), a_{23} = (\dot{q}_0 + \dot{q}_1 + \dot{q}_2) m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2), \\ a_{31} &= \dot{q}_0 (m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)) - \dot{q}_1 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2), \\ a_{32} &= -(\dot{q}_0 + \dot{q}_1) m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2), \text{ and } a_{33} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Remark 1: The descriptor form is common for mechanical systems; specifically, because it is a natural way to write equations derived from the Euler-Lagrange method (Skelton et al., 1997; Lendek, et al., 2018). For mechanical systems, the matrix $E[q(t)]$ generally ends up regular, as for the S3S model Eq. 3. Therefore, discussions about the singular case, observability and impulse-free modes (Varga, 1995) are not necessary. The way the problem of observation will be solved is using quasi-LPV or so-called T-S models (Tanaka and Wang 2001), and the Lyapunov approach and the solutions are obtained using sets of linear matrix inequalities

(LMI) (Boyd et al., 1994). Notice that, as $E[q(t)]$ is regular, a classical state space representation can also be straightforwardly derived from Eq. 3. Nevertheless, a key point to reduce complexity (in term of LMI conservatism) is to keep a constant B matrix (Bouarar, et al., 2010). Lastly, using a descriptor formulation such as Eq. 3 has been shown to lower the conservatism of the result by reducing the number of vertices (Lendek, et al., 2018) (Chadli and Darouach, 2012).

Designing an observer in the continuous case for systems such as model Eq. 3 is difficult for two reasons. The first one concerns the fact that the matrix $A[x(t)]$ depends on non-measured variables of $x(t)$. When dealing with a polytopic representation such as T-S models, it resumes in the so-called non-measured premise variables, which is still an open problem in the general case. The second reason is due to the size of the model and the number of non-linearities that may end with LMI constraints problem not being compatible with the actual solvers. The first part presents a solution to model Eq. 3 observation combining ideas from the studies of Guerra et al. (2015), Zemouche et al. (2008), Ichalal and Guerra (2019). Especially, the polytopic description is used the farthest possible in the development.

Global Continuous Proportional Integral-Observer

As the main goal is to be able to determine the torques that are unknown inputs, several methods can be considered. Nevertheless, we cannot use a classical unknown input observer (UIO) design (Chen et al., 1996) as the rank condition necessary, that is, $\text{rank}(C \times D) = \text{rank}(C)$, is not fulfilled. Therefore, the design of PI-observers comes at hand. From experiments and trials, a double integrator cascade, that is, $\ddot{\Gamma}_k \approx 0$ $k \in \{0, 1, 2\}$ is used as a good compromise to realize the torque estimations (Blandeau, 2018). Thus, defining a new variable representing the inputs $u = [\Gamma_0 \ \Gamma_1 \ \Gamma_2]^T$: $d = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}$, the model Eq. 3 can be written in an extended form as:

$$\begin{cases} E^e(q)\dot{\hat{x}}^e = A^e(x)\hat{x}^e(t) + S^e(q) \\ y(t) = C^e \hat{x}^e(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x^e = \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix}, \dot{d} = \Gamma \times d = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix} d, \end{cases} \quad (6)$$

where $E^e(q) = \begin{bmatrix} E(q) & 0_6 \\ 0_6 & I_6 \end{bmatrix}$, $A^e(x) = \begin{bmatrix} A(x) & [B \ 0_{6 \times 3}] \\ 0_6 & \Gamma \end{bmatrix}$, $S^e(q) = \begin{bmatrix} S(q) \\ 0_{6 \times 1} \end{bmatrix}$, and $C^e = [C \ 0_{3 \times 6}]$. An observer for (6) can be built using the following:

$$\begin{cases} E^e(q)\dot{\hat{x}}^e(t) = A^e(\hat{x})\hat{x}^e(t) + S^e(q) + K(\cdot)(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) = C^e \hat{x}^e(t) \end{cases} \quad (7)$$

Matrix $K(\cdot)$ will be defined in (19), according to the way of getting LMI constraints conditions. Defining the observation error as $e = x^e - \hat{x}^e$, considering that $E^e(q)$ is non-singular

its derivative can be directly written using $E^e(q)\dot{e} = A^e(x)x^e(t) - A^e(\hat{x})\hat{x}^e(t) - K(\cdot)C^e e$, or equivalently as:

$$E^e(q)\dot{e} = (A^e(\hat{x}) - K(\cdot)C^e)e + (A^e(x) - A^e(\hat{x}))x^e(t). \quad (8)$$

Notice that (8) includes an extra term not depending explicitly on the observation error and introduces non-measurable variables; therefore, asymptotic convergence cannot be guaranteed directly. Next step presents how to derive such asymptotic conditions even in presence of this second term. From the definition of $\tilde{A}(x) = [a_{ij}]_{i,j \in \{1,2,3\}}$ in (5), let us define the matrix as:

$$\Sigma(q) = \begin{bmatrix} \sigma_1 + \sigma_3 & \sigma_2 - \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_1 + \sigma_3 \\ \sigma_2 & 0 & \sigma_3 + \sigma_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) \\ \sigma_2 &= m_2 l_{G_2} l_1 \sin(q_2) \\ \sigma_3 &= m_2 l_{G_2} l_0 \sin(q_2 + q_1) \end{aligned} \quad (9)$$

From where we can write the following:

$$\tilde{A}(x)\dot{q} = \Sigma(q)\Omega(\dot{q})\dot{q} = \Sigma(q)\Theta(\dot{q})\dot{q}, \quad (10)$$

$$\text{where} \quad \Omega(\dot{q}) = \begin{bmatrix} -2\dot{q}_1 & -\dot{q}_1 & 0 \\ 2\dot{q}_2 & 2\dot{q}_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \Theta(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -2\dot{q}_0 - \dot{q}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{q}_0 + 2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ \dot{q}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Of course, } \Omega(\dot{q})\dot{q} = \Theta(\dot{q})\dot{q}.$$

Now it is easy to rewrite the second part of (8) as:

$$(\tilde{A}(x) - \tilde{A}(\hat{x}))\dot{q} = \Sigma(q)(\Theta(\dot{q}) - \Theta(\hat{\dot{q}}))\dot{q}. \quad (11)$$

Considering that $(\Theta(\dot{q}) - \Theta(\hat{\dot{q}}))\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & -2\dot{e}_0 - \dot{e}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{e}_0 + 2\dot{e}_1 + \dot{e}_2 \\ \dot{e}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2\dot{e}_0 + \dot{e}_1)\dot{q}_1 \\ (2\dot{e}_0 + 2\dot{e}_1 + \dot{e}_2)\dot{q}_2 \\ \dot{e}_0\dot{q}_0 \end{bmatrix}$, the following can be written:

$$(\tilde{A}(x) - \tilde{A}(\hat{x}))\dot{q} = \Sigma(q) \begin{bmatrix} -2\dot{q}_1 & -\dot{q}_1 & 0 \\ 2\dot{q}_2 & 2\dot{q}_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Now turning back to the extended state:

$$A^e(\hat{x})e + \begin{bmatrix} 0_3 \\ \Sigma(q) \end{bmatrix} (\Theta(\dot{q}) - \Theta(\hat{\dot{q}}))\dot{q} = \begin{bmatrix} 0_3 \\ 0_3 \end{bmatrix} \Sigma(q) \left(\Omega(\hat{\dot{q}}) + \begin{bmatrix} I_3 & -2\dot{q}_1 & -\dot{q}_1 & 0 \\ 2\dot{q}_2 & 2\dot{q}_2 & \dot{q}_2 & 0 \\ \dot{q}_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) e$$

or equivalently:

$$A^e(\hat{x})e + \begin{bmatrix} 0_3 \\ \Sigma(q) \end{bmatrix} (\Theta(\dot{q}) - \Theta(\hat{\dot{q}}))\dot{q} = \begin{bmatrix} 0_3 \\ 0_3 \end{bmatrix} \Sigma(q) \begin{bmatrix} -2(\dot{q}_1 + \hat{\dot{q}}_1) & -\dot{q}_1 - \hat{\dot{q}}_1 & 0 \\ 2(\dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2) & 2(\dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2) & \dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2 \\ \dot{q}_0 + \hat{\dot{q}}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e. \quad (13)$$

Notice that $\begin{bmatrix} -2(\dot{q}_1 + \hat{\dot{q}}_1) & -\dot{q}_1 - \hat{\dot{q}}_1 & 0 \\ 2(\dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2) & 2(\dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2) & \dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2 \\ \dot{q}_0 + \hat{\dot{q}}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D(\dot{q} + \hat{\dot{q}})U$ with $U = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $D(\dot{q} + \hat{\dot{q}}) = \text{diag}([\dot{q}_1 + \hat{\dot{q}}_1 \ \dot{q}_2 + \hat{\dot{q}}_2 \ \dot{q}_0 + \hat{\dot{q}}_0])$; therefore, a new writing of (8) is:

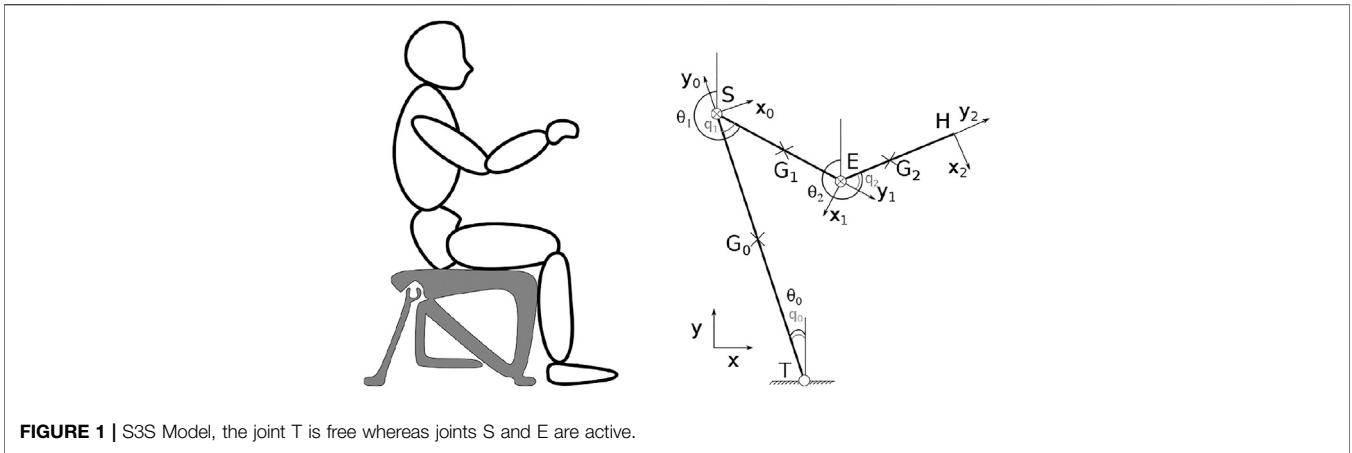


FIGURE 1 | S3S Model, the joint T is free whereas joints S and E are active.

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & 0_{3 \times 6} \\ 0_3 & \tilde{E}(q) & 0_{3 \times 6} \\ 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} & I_6 \end{bmatrix} \dot{e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & \Sigma(q)D(\dot{q} + \hat{q})U \\ 0_6 & \Gamma \end{bmatrix}}_{\Phi(\cdot)} \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 \\ I_3 & 0_3 \end{bmatrix} - K(\cdot) [I_3 \quad 0_{3 \times 9}] e. \quad (14)$$

It can be seen that under an assumption of boundedness of the state variables, it is possible from (14) that is strictly equivalent to (8), to derive asymptotic conditions. Let us consider a polytopic form of (14) with four measured variables and three using non-measured variables. The four functions $\sin(q_1)$, $\sin(q_2)$, $\cos(q_1)$, and $\cos(q_2)$ are only needed for designing the polytope as $\sin(q_2 + q_1)$ and $\cos(q_2 + q_1)$ are derived using classical trigonometric relations. Therefore, $\tilde{E}(q)$ and $\Sigma(q)$ are exactly represented with 2^4 vertices, and with the definition of $D(\dot{q} + \hat{q})$, the three functions $\dot{q}_0 + \hat{q}_0$, $\dot{q}_1 + \hat{q}_1$, and $\dot{q}_2 + \hat{q}_2$ allow to fully represent (14) with $2^4 \times 2^3 = 128$ vertices. Now, consider the exact polytopic representation of (14) as:

$$\sum_{i=1}^{16} v_i(q) E_i \dot{e} = \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^8 v_i(q) h_j(\dot{q} + \hat{q}) (\Phi_{ij} - K_i(\cdot) C) e. \quad (15)$$

For each of the seven non-linearities, a sector non-linearity approach (SNA) is applied (Tanaka & Wang, 2001). Considering a bounded non-linearity, $z_j \in [\underline{z}_j, \bar{z}_j]$, the sector is defined as:

$$z_j = \underline{z}_j \eta_0^j(z_j) + \bar{z}_j \eta_1^j(z_j), \quad (16)$$

where $\eta_0^j(z_j) = \frac{\bar{z}_j - z_j}{\bar{z}_j - \underline{z}_j}$ and $\eta_1^j(z_j) = 1 - \eta_0^j(z_j)$. Each vertex of the polytope will correspond to a product of the weighting functions $\eta_0^j(z_j)$: $h_i(z) = \prod_{j=1}^r \eta_1^j(z_j)$. Of course, the convex property of the weighting functions $\eta_0^j(z_j)$ remains for $h_i(z)$, that is, $h_i(z) \geq 0$ and $\sum_{i=1}^m h_i(z) = 1$. For the considered model, the compact set is directly issued from anatomical constraints of the trunk and upper limbs and corresponds to (Blandeau, 2018) the following:

$$\Omega_x = \left\{ \begin{array}{l} -20^\circ \leq q_1 - q_{1eq} \leq 60^\circ \\ -10^\circ \leq q_2 - q_{2eq} \leq 45^\circ \end{array} , \begin{array}{l} \|\dot{q}_0\| \leq 29^\circ/s \\ \|\dot{q}_1\| \leq 57^\circ/s \\ \|\dot{q}_2\| \leq 57^\circ/s \end{array} \right\}. \quad (17)$$

Following the study of Guerra et al. (2015), a LMI constraint problem is given. Find $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$, $P_1 = P_1^T > 0$, $\begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix}$ such that:

$$\begin{bmatrix} P_3^T \Phi_{ij} - K_{1i} C + (*) & (*) \\ P_4^T \Phi_{ij} - K_{2i} C + P_1 - E_i^T P_3 & -P_4^T E_i - E_i^T P_4 \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \{1, \dots, 16\}, \quad j \in \{1, \dots, 8\}, \quad (18)$$

and the final observer form is (Guerra et al., 2015) as follows:

$$\begin{cases} E^e(q) \hat{x}^e(t) = A^e(\hat{x}) \hat{x}^e(t) + S^e(q) + [E^e(q) \quad I_{12}] \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}^{-T} \\ \quad \times \sum_{i=1}^{16} v_i(q) \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix} (y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}(t) = C^e \hat{x}^e(t) \end{cases} \quad (19)$$

Remark 2: first of all, the observer gain part is only using the four measured non-linearities and functions $v_i(q)$, $i \in \{1, \dots, 16\}$. Second, if (18) holds, then from its last entry $P_4^T E_i + E_i^T P_4 > 0$, which ensures the regularity of P_4 and consequently, that P^{-T} needed in (19) is well-defined.

Remark 3: Complexity of problem (18) corresponds to $128 + 1$ LMI constraints, with $n = 12$ and $m = 3, \frac{n(n+1)}{2} + 2n^2 + 2n \times m \times 2^4 = 1518$ variables. If these figures are reasonable, it is difficult to extend the results considering less conservative LMI problems such as P_3 and P_4 depending on the premises, that is, $P_3 = \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^8 v_i(q) h_j(\dot{q} + \hat{q}) P_{3ij}$. In this case, the LMI problem will include depending on the relaxation used, at least 8256 constraints and $\frac{n(n+1)}{2} + 2n^2 \times 2^7 + 2n \times m \times 2^4 = 38094$ variables.

From Remark 3, going from 2D-S3S to 3D-S3S looks impossible as the number of non-linearities will increase as well as the number of states. Therefore, solving the problem following a similar approach will only be feasible introducing simplifications. Nevertheless, (19) proposes a solution that will be the basis for comparisons and validation of the next approach.

The Model Decomposed

This part proposes to solve the problem using a decomposed exact representation of the 2D-S3S model and to show that the reduced problems of observation end with a global proof of convergence with performances comparable to the global PI-observer (19). Thus, this way-of-doing will be compatible with model extensions such as 3D-S3S. To describe in a

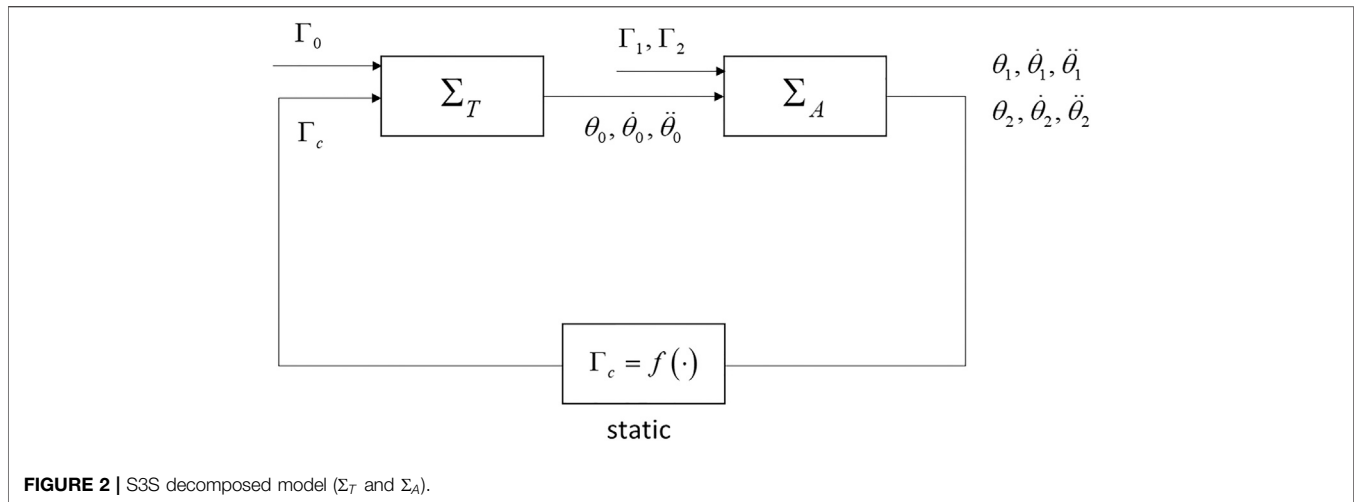


FIGURE 2 | S3S decomposed model (Σ_T and Σ_A).

simpler manner, the models, we introduce the following mechanical parameters:

$$\begin{aligned} p_1 &= I_{G0} + m_0 a_0^2 + (m_1 + m_2) l_0^2, & p_2 &= (m_0 a_0 + (m_1 + m_2) l_0) g, \\ p_3 &= I_{G1} + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2, & p_4 &= m_2 a_2 l_1, & p_5 &= I_{G2} + m_2 a_2^2, \\ p_6 &= (-m_1 b_1 + (m_1 + m_2) l_1) g, \\ p_7 &= m_2 a_2 g, & p_8 &= m_1 a_1 l_0 + m_2 l_0 l_1, & p_9 &= m_2 a_2 l_0, \\ p_{10} &= m_1 a_1 + m_2 l_1. \end{aligned}$$

A subscript “T” stands for trunk and “A” for arm. Therefore, the S3S model is decomposed into, **Figure 2**, a trunk model Σ_T (inputs Γ_0 and Γ_c , and outputs θ_0 , $\dot{\theta}_0$, and $\ddot{\theta}_0$) that feeds the shoulder + arms model Σ_A (inputs Γ_1 , Γ_2 , θ_0 , $\dot{\theta}_0$, and $\ddot{\theta}_0$, and outputs θ_i , $\dot{\theta}_i$, and $\ddot{\theta}_i$, $i \in \{1, 2\}$) that provide feedback Σ_T with a static equation $\Gamma_c = f(\cdot)$.

Σ_T , the model of the body trunk, with Γ_c , the coupling torque, corresponds to the following:

$$p_1 \ddot{\theta}_0 = p_2 \sin(\theta_0) + \Gamma_c + \Gamma_0. \quad (20)$$

and in a state space form using the state vector $x_T = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}$ as:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\Gamma_c + \Gamma_0), \\ \theta_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

The Σ_A model corresponding to the shoulder and arm equations writes as:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \cos(q_2) \\ p_4 \cos(q_2) & p_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} &= p_4 \sin(q_2) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} p_6 \sin(\theta_1) \\ p_7 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} p_8 \sin(q_1) & p_8 \cos(q_1) \\ p_9 \sin(q_1 + q_2) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

From where a state representation is:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & p_4 \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & p_4 \cos(q_2) & p_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & -p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_6 \sin(\theta_1) \\ p_7 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ p_8 \sin(q_1) & p_8 \cos(q_1) \\ p_9 \sin(q_1 + q_2) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

and considering $\theta_A = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ which represents the measured variables and $x_A = \begin{bmatrix} \theta_A \\ \dot{\theta}_A \end{bmatrix}$, the full state including the non-measured speeds as:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \cos(q_2) \\ p_4 \cos(q_2) & p_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \ddot{\theta}_A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_2 \\ -p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \dot{\theta}_A \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (24)$$

where $D_a(\theta_A) = \begin{bmatrix} p_6 \sin(\theta_1) \\ p_7 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}$ and $C(\theta_A) = \begin{bmatrix} p_8 \sin(q_1) & p_8 \cos(q_1) \\ p_9 \sin(q_1 + q_2) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$.

Finally, the static coupling term, **Figure 2**, that feedbacks from Σ_A to Σ_T corresponds to the following:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} -p_{10} \sin(q_1) \dot{\theta}_1 & -p_9 \sin(q_1 + q_2) \dot{\theta}_2 & p_{10} \cos(q_1) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \Gamma_1. \quad (25)$$

Thus, Σ_A equation 21, Σ_T (24) and the coupling term (25) exactly represent the S3S model (3).

Unknown Input Observation Problem

In both cases, as previously done for the S3S model (6), a double integrator cascade, that is, $\ddot{\Gamma}_k \approx 0$ $k \in \{0, 1, 2\}$ is used as a good compromise to realize the torque estimations. For the system Σ_T , the state is augmented to include the torque $\Gamma_U = \Gamma_c + \Gamma_0$. Effectively, at this first stage, there is no way to make a difference between the torques Γ_c and Γ_0 as they enter at the same place in (20). Therefore, (21) is rewritten in the PI-extended form as:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \dot{\Omega}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix}, \Omega_T = \begin{bmatrix} \Gamma_U \\ \dot{\Gamma}_U \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

For the model Σ_A (24), the state is augmented to include the torques Γ_1 and Γ_2 . For sake of simplification, we define $A_A(x_A) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_1 \\ -p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$, $B_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$, and $E_A(\theta_2) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \cos(q_2) \\ p_4 \cos(q_2) & p_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ to rewrite (24) as:

$$E_A(\theta_A) \dot{x}_A = A_A(x_A) x_A + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_A(\theta_A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

and its extended PI-extended form with $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $\Omega_A = [\Gamma_1 \quad \dot{\Gamma}_1 \quad \Gamma_2 \quad \dot{\Gamma}_2]^T$ as:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{\Omega}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A(x_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ D_A(\theta_A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \\ y_A = [I_2 \quad 0] \begin{bmatrix} x_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} = \theta_A = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{cases}. \quad (28)$$

Thus, with (26), (28), and the coupling term (25), the goal is to build a cascade of two observers for Σ_T and Σ_A , and to make their synthesis in order to guarantee an asymptotic convergence as well as performances comparable to a global observer. Before solving the problem for the S3S model, let us give a general result concerning cascade observers in the descriptor form.

CASCADE OBSERVATION PROBLEM

Conditions for a Separation Principle

Cascade observation has been studied for interconnected non-linear and linear systems, for example in Lendek et al. (2008), Gripa et al. (2012). The idea is to build observers independently, in a way that the global performances are satisfied. Thus, we can combine different types of observer regarding the local subsystem concerned. A separation principle is proposed based on a vector comparison principle, and the proof follows similar paths than the observer/control separation principle for quasi-LPV systems (Ma et al., 1998). The advantage of this methodology of estimation is that separate observers can be built from a local subsystem which makes their adjustment less difficult (Lendek, et al., 2010).

Consider the following proposition.

Theorem 1: consider two descriptor systems $[E_i(\cdot), A_i(\cdot), C_i(\cdot)]$, $i \in \{1, 2\}$ ($E_i(\cdot)$ being always regular) such that it exists in matrices as $K_i(\cdot)$, $i \in \{1, 2\}$ ensuring that the estimation error systems defined by $E_i(\cdot) \dot{e}_i = [A_i(\cdot) - K_i(\cdot) C_i(\cdot)] e_i$ are globally asymptotically stable (GAS); knowing it exists as two Lyapunov functions $V_i(e_i)$ and scalars $\bar{\lambda}_i \geq \underline{\lambda}_i > 0$, $\mu_i > 0$, $\delta_i > 0$ satisfying the following:

$$i. \quad 0 < \underline{\lambda}_i \|e_i\|^2 \leq V_i(e_i) \leq \bar{\lambda}_i \|e_i\|^2. \quad (29)$$

$$ii. \quad \frac{\partial V_i(e_i)}{\partial e_i} \dot{e}_i = \frac{\partial V_i(e_i)}{\partial e_i} E_i^{-1}(\cdot) (A_i(\cdot) - K_i(\cdot) C_i(\cdot)) \leq -\mu_i \|e_i\|^2. \quad (30)$$

$$iii. \quad \left\| \frac{\partial V_i(e_i)}{\partial e_i} \right\| \leq \delta_i \|e_i\|^2. \quad (31)$$

Consider the System

$$\begin{bmatrix} E_1(\cdot) & 0 \\ E_{12}(\cdot) & E_2(\cdot) \end{bmatrix} \dot{e} = \begin{bmatrix} A_1(\cdot) - K_1(\cdot) C_1(\cdot) & 0 \\ A_{12}(\cdot) & A_2(\cdot) - K_2(\cdot) C_2(\cdot) \end{bmatrix} e, \quad (32)$$

where $E_{12}(\cdot)$ and $A_{12}(\cdot)$ norm-bounded; then (32) is also globally asymptotically stable.

Proof: $E_i(\cdot)$ being regular, it is direct that $\begin{bmatrix} E_1(\cdot) & 0 \\ E_{12}(\cdot) & E_2(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E_1^{-1}(\cdot) & 0 \\ -E_2^{-1}(\cdot) E_{12}(\cdot) E_1^{-1}(\cdot) & E_2^{-1}(\cdot) \end{bmatrix}$; let us rewrite $A_i^*(\cdot) = E_i^{-1}(\cdot) (A_i(\cdot) - K_i(\cdot) C_i(\cdot))$, thus (32) is equivalent to the following:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} A_1^*(\cdot) & 0 \\ E_2^{-1}(\cdot) (A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot) A_1^*(\cdot)) & A_2^*(\cdot) \end{bmatrix} e. \quad (33)$$

Consider now a positive scalar $\gamma > 0$ and the Lyapunov function as:

$$V(e_1, e_2) = V_1(e_1) + \gamma V_2(e_2). \quad (34)$$

Its derivative along the trajectories of (33) is:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e_1, e_2) &= \frac{\partial V_1(e_1)}{\partial e_1} \dot{e}_1 + \gamma \frac{\partial V_2(e_2)}{\partial e_2} \dot{e}_2 \\
&= \frac{\partial V_1(e_1)}{\partial e_1} A_1^*(\cdot) e_1 + \gamma \frac{\partial V_2(e_2)}{\partial e_2} A_2^*(\cdot) e_2 \\
&\quad + \gamma \frac{\partial V_2(e_2)}{\partial e_2} E_2^{-1}(\cdot) (A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot) A_1^*(\cdot)) e_1. \quad (35)
\end{aligned}$$

Using (30) and Passing at Norms, we get the following:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e_1, e_2) &\leq -\mu_1 \|e_1\|^2 - \gamma \mu_2 \|e_2\|^2 + \gamma \left\| \frac{\partial V_2(e_2)}{\partial e_2} \right\| \\
&\quad \times \|E_2^{-1}(\cdot) (A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot) A_1^*(\cdot))\| \|e_1\|, \quad (36)
\end{aligned}$$

where $A_1^*(\cdot)$ is GAS, and $E_{12}(\cdot)$ and $A_{12}(\cdot)$ are norm-bounded; we can write that it exists a positive scalar $M > 0$ such that $\|E_2^{-1}(\cdot) (A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot) A_1^*(\cdot))\| \leq M$. Using condition (31), the bound (36) of the derivative $\dot{V}(e_1, e_2)$ holds if:

$$\dot{V}(e_1, e_2) \leq -\mu_1 \|e_1\|^2 - \gamma \mu_2 \|e_2\|^2 + \gamma \delta_2 M \|e_1\| \|e_2\|. \quad (37)$$

Using a completion of square, (37) is equivalent to:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e_1, e_2) &\leq -\left(\mu_1 - \gamma \frac{\delta_2^2 M^2}{4\mu_2}\right) \|e_1\|^2 - \gamma \left(\sqrt{\mu_2} \|e_2\| - \frac{\delta_2 M}{2\sqrt{\mu_2}} \|e_1\|\right)^2. \quad (38)
\end{aligned}$$

As $\gamma > 0$ is a free parameter, it can always be set such as $\gamma < \frac{4\mu_1\mu_2}{\delta_2^2 M^2}$ and thus, $\dot{V}(e_1, e_2) < 0 \forall (e_1, e_2) \neq 0$ which ends the proof.

Remark 4: This result is readily extended to a n-cascade of observers that keep the triangular structure of (32) and the norm-bounded property on its non-diagonal entries. This will be particularly interesting for the future studies considering a 3D-S3S model.

From this general result, next part shows how to exploit it to derive the 2D-S3S cascaded observers *via* LMI constraints problems.

Cascade Proportional Integral-Observers for the S3S Model

First of all, let us describe the two observers cascade for the S3S case, **Figure 3**. Recall that only the angles are measured. Thus the first observer of Σ_T (so-called $\hat{\Sigma}_T$, **Figure 3**) has θ_0 and $\dot{\theta}_0$ as inputs, and $\hat{\Gamma}_U = \hat{\Gamma}_c + \hat{\Gamma}_0$ as output. The second observer for Σ_A (so-called $\hat{\Sigma}_A$, **Figure 3**) uses the first observer outputs and the angles θ_1 and θ_2 as inputs. Its outputs are $\hat{\theta}_i, \dot{\hat{\theta}}_i$, and $\hat{\Gamma}_i$ $i \in \{1, 2\}$.

We considered the extended body trunk model Σ_T (26) and transform it in a classical non-descriptor form with: $x_T = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}$, $A_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix}$ $[B \ 0]$, and $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

To get a compact form of (26):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{\Omega}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_T \\ \Omega_T \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Therefore, we considered a first local observer for Σ_T :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_T \\ \dot{\hat{\Omega}}_T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_T \\ \hat{\Omega}_T \end{bmatrix} + K_T(\theta_0)(y_T - \hat{y}_T), \quad (40) \\
\hat{y}_T &= C_T \hat{x}_T = \theta_0,
\end{aligned}$$

and the estimation error dynamic $e_T = \begin{bmatrix} x_T \\ \Omega_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_T \\ \hat{\Omega}_T \end{bmatrix}$ writes as:

$$\dot{e}_T = \left(\begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_T(\theta_0) C_T \right) e_T, \quad (41)$$

The design of $K_T(\theta_0)$ such that (41) is GAS is explained in section *PI-Observers Cascade Design*.

For the extended shoulder and the arm system Σ_A (28), the observer can be derived paying attention that θ_0 and $\dot{\theta}_0$ being non-measured, they are replaced with their estimate $\hat{\theta}_0$ and $\dot{\hat{\theta}}_0$. Thus, an expression is:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_A \\ \dot{\hat{\Omega}}_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_A(\hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} + K_A(\cdot)(y_A - \hat{y}_A). \quad (42)
\end{aligned}$$

Let us define the observation error $e_A = \begin{bmatrix} x_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix}$ and writing

$$\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{e}_A \quad \text{renders as:} \quad \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{e}_A = \begin{bmatrix} A_A(x_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_A(\hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix} - K_A(\cdot) C e_A + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} \right)$$

From where defining $\Delta A_A(\cdot) = A_A(x_A) - A_A(\hat{x}_A)$ and $\Delta \theta_T = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix}$ as:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{e}_A &= \left(\begin{bmatrix} A_A(x_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot) C \right) e_A \\
&\quad + \begin{bmatrix} \Delta A_A(\cdot) \hat{x}_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} \right). \quad (43)
\end{aligned}$$

Now, in order to apply the result of Theorem 1, (43) must be adequately written as the second row of (32). The last part of (43) writes as: $\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 - \dot{\hat{\theta}}_0 \\ \dot{\theta}_0 - \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix}$ from where:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddot{\hat{\theta}}_0^2 \\ \ddot{\hat{\theta}}_0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 - \dot{\hat{\theta}}_0 \\ \ddot{\theta}_0 - \ddot{\hat{\theta}}_0 \\ \Omega_T - \hat{\Omega}_T \end{bmatrix} &= -E_{12}(\theta_A, \dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0) \dot{e}_T, \quad (44)
\end{aligned}$$

where $E_{12}(\theta_A, \dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0) = -\begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. The last transformation concerns the middle term of (43). Considering

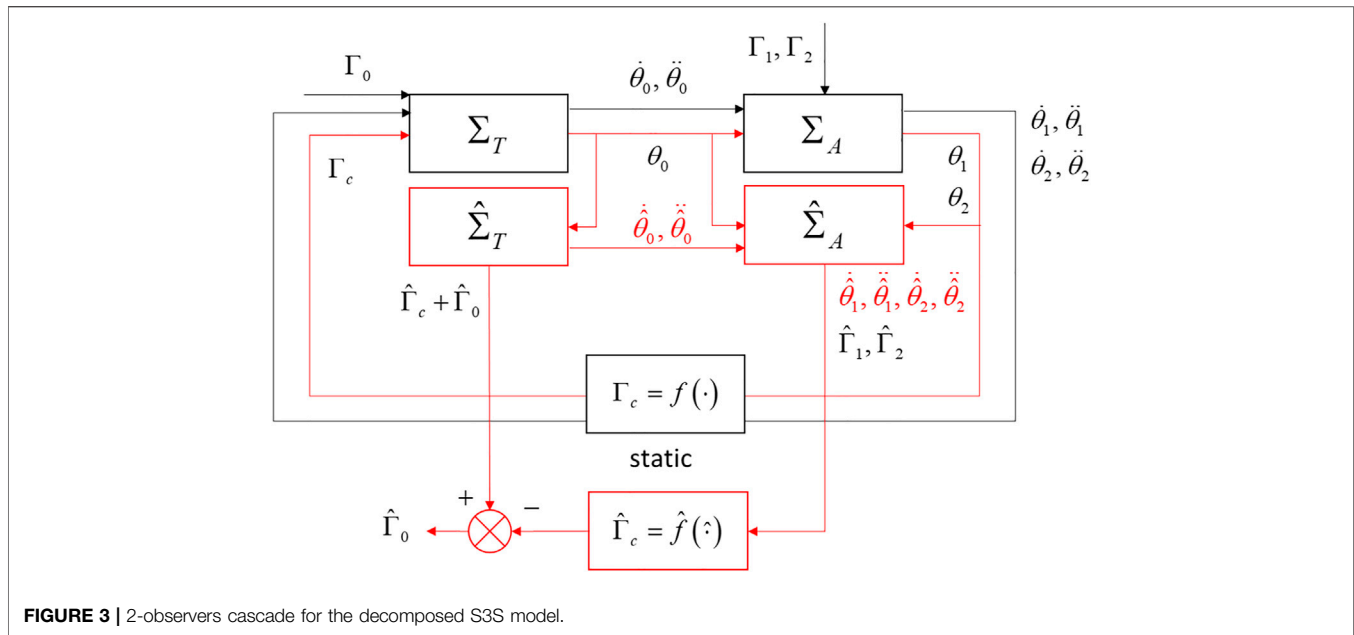


FIGURE 3 | 2-observers cascade for the decomposed S3S model.

that $\Delta A_A(\cdot) = p_4 \sin(q_2) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 \\ -\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$, let us rewrite the part $A_A(x_A)e_A + \Delta A_A(\cdot)\hat{x}_A$ in (43) such as:

$$A_A(x_A)e_A + \Delta A_A(\cdot)\hat{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + p_4 \sin(q_2) \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} e_A = H(x_A, \hat{x}_A)e_A. \quad (45)$$

Finally, (43) can be transformed in the following:

$$E_{12}(\theta_A, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_0)\dot{e}_T + \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{e}_A = \left(\begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot)C \right) e_A, \quad (46)$$

and the full observation problem writes from (41) and (46) as:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ E_{12}(\cdot) & \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_T \\ \dot{e}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_T(\theta_0)C_T & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_T \\ e_A \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Eq. (47) does correspond to the conditions of Theorem 1, the non-diagonal terms being bounded. Thus, conditions of Theorem one are fulfilled and the separation principle applies.

PROPORTIONAL INTEGRAL-OBSERVERS CASCADE DESIGN

Proportional Integral-Observer for Σ_T

The first observer (40) for the body trunk model Σ_T is associated with the error dynamic model (41) recalled thereafter:

$$\dot{e}_T = \left(\begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_T(\theta_0)C_T \right) e_T. \quad (48)$$

As $A_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix}$ and $C_T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$, consider the following observer gain: $K_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0 & \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + K_{LT}$, $K_{LT} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$. Thus, the observation error is linear:

$$\dot{e}_T = \left(\begin{bmatrix} J & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_{LT}C_T \right) e_T. \quad (49)$$

Any method can come at hand to determine K_{LT} . Therefore, the observer writes as:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_T \\ \dot{\hat{\Omega}}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_T \\ \hat{\Omega}_T \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + K_{LT} \right) (y_T - \hat{y}_T). \quad (50)$$

Proportional Integral-Observer for Σ_A

The second observer (42) for the model Σ_A is associated with a reduced error dynamic model issued from (46), with $H(x_A, \hat{x}_A)$ given in (45):

$$\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{\varepsilon}_A = \left(\begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot)C \right) \varepsilon_A. \quad (51)$$

In (51), it appears ε_A as a slack variable different from e_A , as it is not the full-term error on the Σ_A model. Thus, from the separation principle result if (41) and (51) are GAS, (47) is GAS.

The non-linear model (51) has a non-linear part $E_A(\theta_2)$ on the left. Of course as $E_A^{-1}(\theta_2)$ exists for every θ_2 a classic representation of (51) could be used. Nevertheless, see Remark 1, a descriptor form is kept and the a polytopic representation of (51) is derived. $E_A(\theta_2)$ has one non-linearity $\cos(q_2)$, and $H(x_A, \hat{x}_A)$ defined in (45) two non-linearities: $\sin(q_2)(\dot{\theta}_1 + \hat{\theta}_1)$ and $\sin(q_2)(\dot{\theta}_2 + \hat{\theta}_2)$. Therefore, a $2^3 = 8$ vertices corresponding to a polytopic model can be derived as:

$$\sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{\varepsilon}_A = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{ij}(x_A, \hat{x}_A) w_{2j}(x_A, \hat{x}_A) \times \left(\begin{bmatrix} H_{ij} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot)C \right) \varepsilon_A, \quad (52)$$

with $\cos(q_2) \in [\nu, 1]$, $v_1(q_2) = \frac{1-\cos(q_2)}{1-\nu} = 1 - v_2(q_2)$, $\sin(q_2)(\dot{\theta}_i + \hat{\theta}_i) \in [\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i]$, $i \in \{1, 2\}$ $w_{i1}(x_A, \hat{x}_A) = \frac{\bar{\rho}_i - \sin(q_2)(\dot{\theta}_i + \hat{\theta}_i)}{\bar{\rho}_i - \underline{\rho}_i} = 1 - w_{i2}(x_A, \hat{x}_A)$, $i \in \{1, 2\}$ and the matrices:

$$\begin{aligned} E_{A1} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} p_3 & \nu p_4 \\ \nu p_4 & p_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, & E_{A2} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \\ p_4 & p_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\ H_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \begin{bmatrix} 0 & \underline{\rho}_2 \\ -\underline{\rho}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, & H_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \begin{bmatrix} 0 & \underline{\rho}_2 \\ -\bar{\rho}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\ H_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \begin{bmatrix} 0 & \bar{\rho}_2 \\ -\underline{\rho}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, & \text{and } H_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \begin{bmatrix} 0 & \bar{\rho}_2 \\ -\bar{\rho}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (53)$$

From this polytopic description, as usual, an extended description of (52) is used (Taniguchi et al., 2000). The extended state $\varepsilon^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_A \end{bmatrix}$ is chosen together using $\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ and with a Lyapunov function:

$$V(\varepsilon^*) = \varepsilon^{*T} \bar{E}^T P \varepsilon^*, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, \quad P_1 = P_1^T > 0. \quad (54)$$

The observer gain can only depend on measured variables; therefore, due to the definitions of w_{ij} , $j \in \{1, 2\}$, only $v_i(q_2)$ is concerned:

$$\bar{E} \varepsilon^* = (\bar{A}_{vw_1w_2} - P^{-T} \bar{K}_v \bar{C}) \varepsilon^*, \quad (55)$$

with $\bar{A}_{vw_1w_2} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \begin{bmatrix} H_{vw_1w_2} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} E_{Av} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ and $\bar{K}_v = \begin{bmatrix} K_{1v} \\ K_{2v} \end{bmatrix}$. Following the study of Guerra et al. (2015), a LMI constraint problem is given by the following:

Find $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$, $P_1 = P_1^T > 0$, $\begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix}$ such that, $i, j, k \in \{1, 2\}$

$$\begin{bmatrix} P_3^T \begin{bmatrix} H_{jk} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_{1i} C + (*) & (*) \\ P_4^T \begin{bmatrix} H_{jk} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_{2i} C + P_1 - \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T P_3 - P_4^T \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T P_4 \end{bmatrix} < 0. \quad (56)$$

At the end, the observer for Σ_A is, with $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$, $P_1 = P_1^T > 0$, $\begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix}$ $i \in \{1, 2\}$, solution of, (56):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_A \\ \dot{\hat{\Omega}}_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_A(\hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left[\sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} I \right] P_{(-)}^{-T} \\ &\times \sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} K_{1i}(\cdot) \\ K_{2i}(\cdot) \end{bmatrix} (y_A - \hat{y}_A). \end{aligned} \quad (57)$$

At last for the coupling term Γ_c (25):

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_c &= \begin{bmatrix} -p_{10} \sin(q_1) \dot{\theta}_1 & -p_9 \sin(q_1 + q_2) \dot{\theta}_2 & p_{10} \cos(q_1) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_A \\ \dot{\hat{\Omega}}_A \end{bmatrix} - \hat{\Gamma}_1. \end{aligned} \quad (58)$$

Linear Matrix Inequalities Solutions

For the global continuous PI-observer, solving the LMI constraints problem (18) in the compact set Ω_x (17) is feasible. To enhance the performances, a decay rate (add τP_1 , $\tau > 0$ in the first entry of constraints (18)) and a norm limitation on the gains $[K_{1i} \ K_{2i}] \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix} \leq \varepsilon I_3$ are used. The second part, using a Schur's complement being equivalent to $\begin{bmatrix} \varepsilon I_3 & [K_{1i} \ K_{2i}] \\ [K_{1i} \ K_{2i}]^T & I_{24} \end{bmatrix} \geq 0$. A good compromise was obtained using a decay rate of $\tau = 6$ and $\varepsilon = 10^6$. It is useless to present the full set of matrices solution of the problem, just the extreme of the polytope of the gains $K_{2,1}$ and $K_{2,16}$ are given to exemplify:

$$K_{2,1} = \begin{bmatrix} 71.1 & 4.3 & -2.2 \\ -0.5 & 111 & -33 \\ -2.9 & -35.3 & 222 \\ 79 & 12 & -2 \\ 10.5 & 45.4 & 12 \\ 1.7 & 13.4 & 1.1 \\ -1.6 & 1.4 & 0.01 \\ -0.33 & -12.3 & -6 \\ 1.9 & -4.7 & 8.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{2,16} = \begin{bmatrix} 66.2 & -0.7 & -1.8 \\ -2.3 & 115 & -36 \\ -4.3 & -35 & 230 \\ 83 & 7.5 & 3.8 \\ 7.4 & 50 & 17.6 \\ 2.8 & 16.8 & -2.2 \\ -1.5 & -1.6 & -0.5 \\ -7.7 & -5.7 & -9.5 \\ 7.8 & -7 & 23 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Local trunk observer gain K_{LT} is easily calculated via pole placement, after some trials-and-errors. The solution

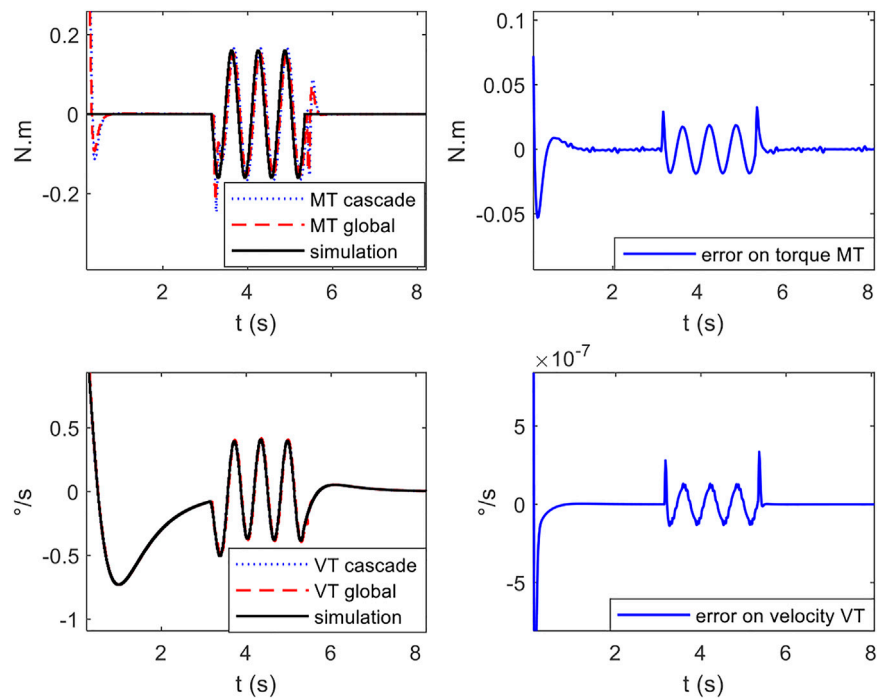


FIGURE 4 | left: estimation of lumbar velocity and torque by cascade observer and global observer compared to simulation; right: estimation error.

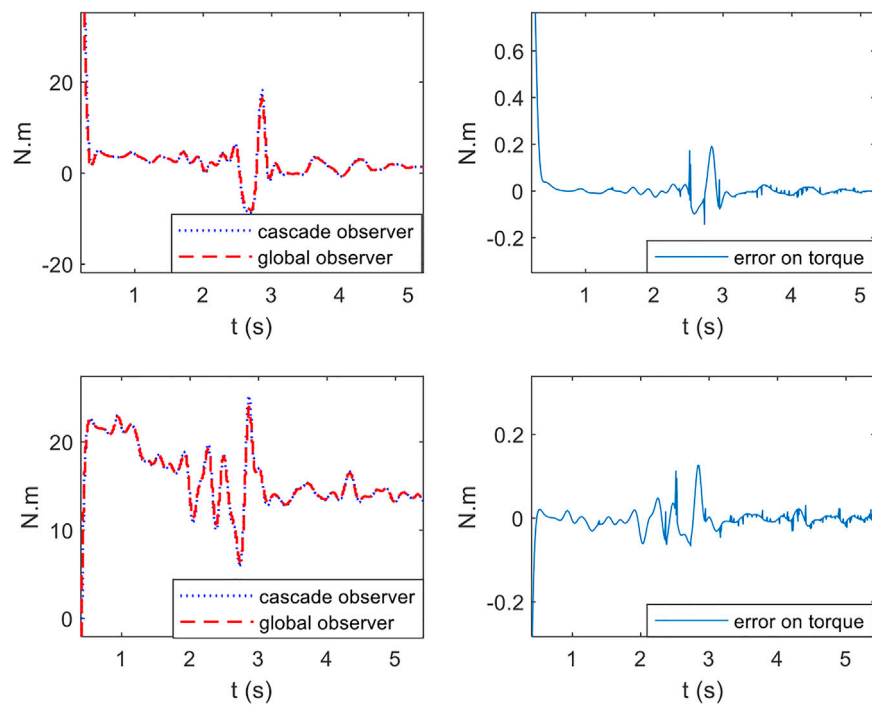


FIGURE 5 | real-time lumbar torque estimated by cascade observer and global observer: top first subject and bottom second subject.

of (49) for the model Σ_T observer is: $K_{LT} = 10^2 [6 \quad 4 \quad 5.4 \times 10^2 \quad 1.9 \times 10^2]^T$.

For the problem (56), a decay rate of $\tau = 7$ has been added in the first entry of (56), and the solution adopted by solving LMIs problem is $\begin{bmatrix} K_{1i}(\cdot) \\ K_{2i}(\cdot) \end{bmatrix}$, $i \in \{1, 2\}$ where:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 141.2 & -31.3 \\ -31.3 & 144.4 \\ 11.8 & -3 \\ -3.6 & 12.7 \\ 8 \times 10^{-3} & 6 \times 10^{-3} \\ 3 \times 10^{-3} & -5 \times 10^{-3} \\ 10^{-3} & 2 \times 10^{-3} \\ 10^{-4} & -3 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, K_{12} = \begin{bmatrix} 131.6 & -27.1 \\ -21.2 & 122.6 \\ 10.7 & -2.7 \\ -1.4 & 9.8 \times 10^{-1} \\ 2 \times 10^{-3} & 4 \times 10^{-3} \\ 8 \times 10^{-3} & -3.3 \times 10^{-1} \\ 10^{-3} & 9 \times 10^{-3} \\ 10^{-4} & -21 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} 19.3 & -4.5 \\ -4.6 & 20.1 \\ -2.7 \times 10^{-1} & 92 \times 10^{-2} \\ -3.6 \times 10^{-2} & -18 \times 10^{-2} \\ 6 \times 10^{-4} & 49 \times 10^{-3} \\ 13 \times 10^{-4} & 8 \times 10^{-3} \\ 10^{-4} & 2 \times 10^{-3} \\ 10^{-3} & -3 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, K_{22} = \begin{bmatrix} 15.3 & -7.5 \\ -4.98 & 28.1 \\ -2 \times 10^{-1} & 8.7 \times 10^{-1} \\ -2 \times 10^{-2} & -5 \times 10^{-2} \\ 8 \times 10^{-4} & 5 \times 10^{-3} \\ 5 \times 10^{-3} & 6 \times 10^{-3} \\ 10^{-4} & 2.7 \times 10^{-3} \\ 10^{-3} & -1.6 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

VALIDATION AND EXPERIMENTAL RESULTS

Validation in Simulation

Simulations were run using MATLAB software R2019b and YALMIP interface on a computer with a 2.6 GHZ processor. A MOSEK solver is chosen as the numeric calculating tool to solve LMI problems.

A full non-linear S3S controlled model in a closed-loop is simulated and acts like a black box with the angles as outputs. Between 2 and 3 s a sinusoidal disturbance is added on the lumbar velocity, it corresponds to the amplitude of the accelerations used during rehabilitation exercises in living subjects with SCI (Bjerkefors et al., 2007). For simulation purposes, a passive lumbar contribution defined as a sinusoidal signal with an amplitude of 0.15 *N.m* and frequency 2 *Hz* is added as an input to the nonlinear model. An example of simulation gives the estimated lumbar couple and velocity of the global 2D-S3S observer and the cascade local observer under the same constraints.

Figure 4 shows one result. Only the speed \dot{q}_0 and the torque T_0 at the trunk are shown as they present the farthest variable from the measured angles, thus the ones that cumulate all the errors. Both observers exhibit similar performances and errors (less than 5% on the torque), showing that they are suitable to solve the problem.

Real-Time Experiments

The protocol in real-time experiments is similar to simulation context with human joint angles resulting from experimental manipulations. The experiments were carried out according to the agreement of “comité

d'éthique pour la recherche du Centre de Recherche Interdisciplinaire en réhabilitation du Grand-Montréal (CRIR-1083-0515R).” Two subjects were treated with different profiles: a 32-year-old woman (weight: 55 kg, tall: 162 cm) having a SCI in vertebra T6 for 3 years and a 53-year-old man (weight: 100 kg, tall: 180 cm) suffering from a SCI in vertebra in T11 for 10 years.

The experimental protocol is as follows: the subject is asked to keep his seated balance while applying a disturbing force to the level of the T6 vertebra of the trunk. Once disturbed, each subject tries to stabilize himself by designing a compensatory strategy using the upper limbs. Figure 5 gives the estimated real-time lumbar couple of the global 2D-S3S observer and the cascade local observer as well as the difference. Results of the real-time experiments confirm the simulation results and show the similarity between the response of the global observer and the cascade observer. The difference in behaviors after applying the disturbing force depends on the level of the injury and its severity. Each subject in order to recover a stable behavior, has his/her own stabilization strategy based on the upper body part.

At last, note that the Trunk torque is positive at the beginning of each experimental acquisition, which makes sense from a mechanical balance point of view because the angle q_0 is negative at that time (a positive articular torque rotates the segment counterclockwise). Once the disturbing force applied, the joint torque decreases. This significant reduction is related to the disturbance which pushes each subject in the direction anterior to what is equivalent to injecting a negative torque (resp. positive) at the level of the trunk (resp. of the shoulder) (Blandeau, 2018).

CONCLUSION

People living with a SCI sitting position has been described *via* a so-called S3S model (Blandeau, 2018). The main goal is to be able to understand the different strategies that can be used by the people with the SCI. The internal control to stabilize the 2D-S3S model was out of the scope of this study and previously solved in Guerra et al. (2020). Understanding the strategies amounts to finding the torques that are unmeasured variables. A first PI-observer was derived in a discrete form in Blandeau (2018). In continuous, due to the problem of unmeasured variables in the premises of the quasi-LPV model, the problem was not solved. The first part of this study answered to this question especially thinking to push farther as possible the building of the polytope. The next step is to go to a more precise model especially including the sagittal plane, thus going to a 2D-S3S to its 3D-S3S form. Even if perfectly suitable for the 2D-S3S model, the global PI-observer solution ends with number of variables and LMI constraints that is very certainly not compatible for the 3D-S3S with actual solvers.

Therefore, two different solutions can apply. The first one consists in simplifying the model (partial linearization for example) but then introduces modeling errors in the observer.

The second one, presented in this study, consists in using a cascade of observers. From an initial separation-like property, the 2D-S3S has been decomposed *via* two descriptors quasi-LPV observers, which design involved much more simplified LMI constraints problems.

Simulation and real-time experiments show that both approaches are suitable for the 2D-S3S model. Thus, not only the continuous global PI-observer design is validated but also the cascade observers using a decomposed form. Thus, it also validates the future steps to get a solution for a 3D-S3S model.

Thereby, as a final goal, we will be able to provide the occupational therapist with real time torques during rehabilitation exercises in order to follow the learning of new stabilization strategies outside the sagittal plan.

DATA AVAILABILITY STATEMENT

The original contributions presented in the study are included in the article/Supplementary Material; further inquiries can be directed to the corresponding author.

ETHICS STATEMENT

The studies involving human participants were reviewed and approved by comité d'éthique pour la recherche du Centre de

Recherche Interdisciplinaire en réhabilitation du Grand-Montréal (CRIR-1083-0515R). The patients/participants provided their written informed consent to participate in this study.

AUTHOR CONTRIBUTIONS

All authors listed have made a substantial, direct, and intellectual contribution to the work and approved it for publication.

FUNDING

This work was partly supported by Zodiac Seats France and Direction Générale de l'Aviation Civile (project n°2014 930181). The present research work has been supported by the European Community, the French Ministry de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie, the Region Hauts-de-France, the Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS); in part through the project ELSAT2020.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors gratefully acknowledge the support of these institutions.

REFERENCES

- Blandeau, M., Estrada-Manzo, V., Guerra, T. M., Pudlo, P., and Gabrielli, F. (2018). Fuzzy unknown input observer for understanding sitting control of persons living with spinal cord injury. *Eng. Appl. Artif. Intelligence* 67, 381–389. doi:10.1016/j.engappai.2017.09.016
- Blandeau, M. (2018). *Modélisation Et Caractérisation De La Stabilité En Position Assise Chez Les Personnes Vivant Avec Une Lésion De La Moelle Épinrière*. PhD Thesis. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis. Valenciennes: Université Polytechnique Hauts-de-France.
- Bouarar, T., Guelton, K., and Manamanni, N. (2010). Robust fuzzy Lyapunov stabilization for uncertain and disturbed Takagi-Sugeno descriptors. *ISA Trans.* 49 (4), 447–461. doi:10.1016/j.isatra.2010.06.003
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Chadli, M., and Darouach, M. (2012). Novel bounded real lemma for discrete-time descriptor systems: Application to H_∞ control design. *Automatica* 48 (2), 449–453. doi:10.1016/j.automatica.2011.10.003
- Chen, J., Patton, R. J., and Zhang, H.-Y. (1996). Design of unknown input observers and robust fault detection filters. *Int. J. Control* 63 (1), 85–105. doi:10.1080/00207179608921833
- Fang, Y., Morse, L. R., Nguyen, N., Tsantes, N. G., and Troy, K. L. (2017). Anthropometric and biomechanical characteristics of body segments in persons with spinal cord injury. *J. Biomech.* 55, 11–17. doi:10.1016/j.jbiomech.2017.01.036
- Grip, H. F., Saberi, A., and Johansen, T. A. (2012). Observers for interconnected nonlinear and linear systems. *Automatica* 48 (7), 1339–1346. doi:10.1016/j.automatica.2012.04.008
- Guerra, T.-M., Bernal, M., and Blandeau, M. (2018). Reducing the Number of Vertices in Some Takagi-Sugeno Models: Example in the Mechanical Field. *IFAC-PapersOnLine* 51 (10), 133–138. doi:10.1016/j.ifacol.2018.06.250
- Guerra, T. M., Blandeau, M., Nguyen, A. T., Srihi, H., and Dequidt, A. (2020). “Stabilizing unstable biomechanical model to understand sitting stability for persons with spinal cord injury,” in *IFAC- PapersOnLine* (Berlin, Germany: World Congress). doi:10.1016/j.ifacol.2020.12.2225
- Guerra, T. M., Estrada-Manzo, V., and Lendek, Z. (2015). Observer design for Takagi-Sugeno descriptor models: An LMI approach. *Automatica* 52, 154–159. doi:10.1016/j.automatica.2014.11.008
- Ichalal, D., and Guerra, T. M. (2019). Decoupling unknown input observer for nonlinear quasi-LPV systems. *IEEE 58th Conf. Decis. Control. (Cdc)*, 3799–3804. doi:10.1109/cdc40024.2019.9029339
- Khalil, W., and Dombre, E. (2004). *Google-Books-ID: nyrY0Pu5kl0C. Modeling, Identification and Control of Robots*. UK: Butterworth-Heinemann.
- Lendek, Z., Nagy, Z., and Lauber, J. (2018). Local stabilization of discrete-time TS descriptor systems. *Eng. Appl. Artif. Intelligence* 67, 409–418. doi:10.1016/j.engappai.2017.09.006
- Lendek, Zs., Babuska, R., and De Schutter, B. (2008). Stability of cascaded fuzzy systems and observers. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 17 (3), 641–653.
- Lendek, Zs., Guerra, T. M., Babuska, R., and De Schutter, B. (2010). Stability Analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models. *Stud. fuzziness soft Comput.* Vol. 262, 2010938248, 2010. Library of Congress Control Number.
- Potten, Y. J. M., Seelen, H. A. M., Drukker, J., Reulen, J. P. H., and Drost, M. R. (1999). Postural muscle responses in the spinal cord injured persons during forward reaching. *Ergonomics* 42, 1200–1215. doi:10.1080/001401399185081
- Skelton, R. E., Iwasaki, T., and Grigoriadis, D. E. (1997). *A Unified Algebraic Approach to Control Design*. Routledge, 1997.
- Tanaka, K., and Wang, O. H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. New York: Wiley.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2000). Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 8 (4), 442–452. doi:10.1109/91.868950
- Varga, A. (1995). On stabilization methods of descriptor systems. *Syst. Control. Lett.*, 1995. doi:10.1016/0167-6911(94)00017-p

Zemouche, A., Boutayeb, M., and Bara, G. I. (2008). Observers for a class of Lipschitz systems with extension to performance analysis. *Syst. Control. Lett.* 57 (1), 18–27. doi:10.1016/j.sysconle.2007.06.012

Conflict of Interest: The authors declare that the research was conducted in the absence of any commercial or financial relationships that could be construed as a potential conflict of interest.

Publisher's Note: All claims expressed in this article are solely those of the authors and do not necessarily represent those of their affiliated organizations, or those of

the publisher, the editors, and the reviewers. Any product that may be evaluated in this article, or claim that may be made by its manufacturer, is not guaranteed or endorsed by the publisher.

Copyright © 2021 Srihi, Guerra, Nguyen, Pudlo and Dequidt. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC BY). The use, distribution or reproduction in other forums is permitted, provided the original author(s) and the copyright owner(s) are credited and that the original publication in this journal is cited, in accordance with accepted academic practice. No use, distribution or reproduction is permitted which does not comply with these terms.

Recovering Control Parameters in Seated Position for People with Medullar Injury

Hajer Srihi*, Thierry-Marie Guerra, Philippe Pudlo, Anh-Tu Nguyen, Mathias Blandeau

Automatic Control Departement, Université Polytechnique Hauts-de-France, CNRS, UMR 8201 LAMIH, Valenciennes 59313, France

Corresponding Author Email: hajer.srihi@uphf.fr



https://doi.org/10.18280/mmc_c.831-404

ABSTRACT

Received: 11 October 2022

Accepted: 5 December 2022

Keywords:

medullar injury, biomechanical modeling, postural control, unknown input observer, quasi-LPV formalism

People living with spinal cord injury (SCI) suffer from paralysis of their back and lower limbs muscles, which negatively impacts the control of their sitting position. Also, instead of using their back and abdominal muscles, which naturally are engaged to stabilize a sitting position, these individuals engage their upper limbs to maintain stability. This paper presents a model-based approach to better understand which strategies contribute to postural control in a sitting position. The proposed model is written in the form of a nonlinear descriptor system. The main difficulty is to be able to reconstruct joint torques which are unmeasurable. An unknown input observer is synthesized in order to estimate these unmeasurable torques. Results issued from simulation and real tests data are presented in order to underline the validity of the approach for estimating postural control parameters which could allow, in future developments, to better qualify the contribution of the upper limbs in rehabilitation exercises.

1. INTRODUCTION

Sitting control results from active contribution (flexor muscles and erector back muscles), passive contribution called also joint resistance (tissues and bones that contribute mechanically to preserve the integrity of the spine) and neuronal contribution (command and sensory) [1, 2]. A person with complete spinal cord injury (SCI) can no longer control the muscles below the level of injury which impairs the ability to maintain a sitting position, particularly when it is disturbed. For the sake of autonomy, patient must then learn new strategies which involves head and upper limbs actions [3]. In order to provide quantified elements to the occupational therapists in monitoring this learning, the joint torques generated (active and passive) by the patients in an attempt to maintain their balance can be considered. Since direct measurement of joint torques is invasive, a so-called “model-based” approach is necessary. The estimation of these joint torques can be performed via inverse dynamics, an approach commonly used in biomechanics, or with the help of particular observers, such as PI-observers, belonging to the class of unknown input observer (UIO) [4]. Few mechanical models of sitting posture exist in the literature, but most of them have limitations and/or are not suitable for people with SCI. Estimating joint torques supposes keeping a model close to reality i.e., without simplifications (such as linearization or neglecting nonlinear terms for example). Models that apply, for example, a linearization around the equilibrium state, as in the study [5, 6, 7] are not adapted because it is an assumption only valid for small movements around this state, whereas it is intended to cope with a model compatible with large movements. Also, models controlled through an active joint located at the lumbosacral joint [8] are not suitable to estimate internal torques for people with SCI, as they generally

experience paralysis or paresis of their abdominal and lower back muscles. Indeed, in the absence of voluntary control at the lumbar level, sitting control uses the upper limbs as a compensatory stabilization strategy [9]. A first model allowing to study postural control in sitting position of people with SCI taking into account the contribution of the upper limbs and based on the use of an UIO has been proposed in the study [10]. This model, known as H2AT for «Head-2-Arms-Trunk», was created on the basis of tools developed in the study [11, 12] and is inspired by human movements observed in a clinical setting. The H2AT mechanical model includes two solids: the first rod is the trunk as a classical inverted pendulum and the second rod represents the head and upper limbs sliding at the top of the first solid according to a prismatic joint with a constant angle.

The H2AT model (Figure 1) is based on a mechanical assumption of linear displacement of the center of mass (COM) of the head and upper limbs with respect to the trunk, thereby limiting the inertial effects of rotation of the upper limbs at the shoulder and elbow. This assumption is both important and limiting from an experimental and mechanical point of view, this point was discussed in the study [9]. To address these limitations, an extension of the H2AT model has been introduced in the study [9] through the S3S model, for “Seated-3-Segments”. It consists of a triple inverted pendulum represented in the sagittal plane defined by the trunk, arms and forearms. The S3S model is close to human anatomy compared to the H2AT model, however its development comes at the cost of increased modeling complexity and conditions required for observer synthesis. In the study [13] we show that these conditions are close to the limits of actual solvers [14]. Then, the main problem if we want to enrich this model, for example going from 2D-S3S to 3D-S3S, it is unlikely that a global approach will be compatible with the

solvers. To overcome this drawback, an idea is to find a decomposition of the main global problem into smaller subproblems while keeping a good estimation quality [15]. This approach is possible with a cascade of descriptor observers and has been proposed and fully discussed in the study [16], it will be referred to as “decomposed-S3S”. This approach allows to solve locally each observation problem while maintaining a proof of asymptotic convergence of the estimation error, leading to a good trade-off between complexity and estimation quality.

The aim of this paper is to present the decomposed-S3S model, answering the limitations of the previous models, and to study the validity of the approach associating the nonlinear decomposed-S3S model to an UIO through numerical simulations and data-based experiments. This paper is organized as following: the first section is dedicated to the decomposed-S3S model, the second section describes the design of the cascade observers and the final section presents results issued from numerical simulations and data-based tests.

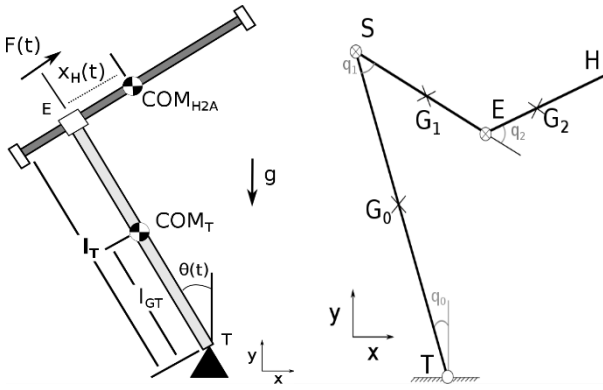


Figure 1. Left: The H2AT model; Right: The S3S model

2. MATERIALS AND METHODS

2.1 The S3S decomposed model

The decomposed-S3S model (Figure 2) was presented in the study [16], only its equations are recalled here. It is a triple inverted pendulum represented in the sagittal plane defined by three blocks in cascade: the trunk “T”, the upper limbs “A” and a static decoupling term $\Gamma_c = f(\cdot)$. The indices (0, 1 and 2) correspond to the trunk, arms and forearms respectively. Anatomical data of flexion/extension of the upper limbs [17, 18] are directly issued from anatomical constraints, and they define the compact set of joint variables (in ° and °/s):

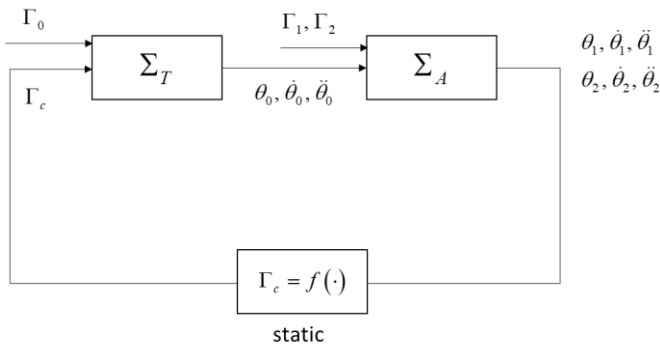


Figure 2. The decomposed-S3S model (Σ_T and Σ_A)

$$\Omega_x = \left\{ \begin{array}{l} \|\dot{\theta}_0\| \leq 29^\circ / s \\ -20^\circ \leq \theta_1 - \theta_0 - \pi \leq 60^\circ \\ -10^\circ \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 45^\circ \\ \|\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_0\| \leq 57^\circ / s \\ \|\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\| \leq 57^\circ / s \end{array} \right\} \quad (1)$$

For each segment: Γ_i is the joint torque, m_i the mass, l_i the length, l_{G_i} the length from the origin to the COM and I_{G_i} the inertial moment at the COM. Inertial and geometric parameters of the model are issued from the regression rules presented in the study [19]. The inertial parameters p_i $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ and system matrices are fully described in the study [16].

The trunk model Σ_T is expressed by the following equation:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{\Omega}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_T \\ \Omega_T \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{With } \Gamma_U = \Gamma_c + \Gamma_0, \quad x_T = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_T = \begin{bmatrix} \Gamma_U \\ \dot{\Gamma}_U \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$$A_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

The arm model Σ_A is expressed by the following equation:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{\Omega}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A(x_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ p_6 \sin(\theta_1) \\ p_7 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} \\ y_A = [I_2 \quad 0] \begin{bmatrix} x_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} = \theta_A = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

where, $x_A = \begin{bmatrix} \theta_A \\ \dot{\theta}_A \end{bmatrix}$,

$$\theta_A = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_A = [\Gamma_1 \quad \dot{\Gamma}_1 \quad \Gamma_2 \quad \dot{\Gamma}_2]^T,$$

$$E_a(\theta_2) = \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \cos(q_2) \\ p_4 \cos(q_2) & p_5 \end{bmatrix},$$

$$A_a(x_A) = \begin{bmatrix} 0 & p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_2 \\ -p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_A(\theta_2) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E_a(\theta_2) \end{bmatrix},$$

$$A_A(x_A) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & A_a(x_A) \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C(\theta_A) = \begin{bmatrix} p_8 \sin(q_1) & p_8 \cos(q_1) \\ p_9 \sin(q_1 + q_2) & p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

And finally, the coupling term:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} -p_{10} \sin(q_1) \dot{\theta}_1 \\ -p_9 \sin(q_1 + q_2) \dot{\theta}_2 \\ p_{10} \cos(q_1) \\ p_9 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \Gamma_1 \quad (5)$$

Obviously, such models representing a seated position for SCI people are open-loop unstable. This instability is due to the absence of control at the level of the lumbosacral joint. A stabilizing control law is therefore necessary prior to implement any PI-observer. This control law must also mimic the behavior of a SCI person, who in the absence of voluntary control at the trunk level will use the upper limbs in order to stabilize himself in a sitting position. In this work, the decomposed-S3S was controlled via a control law defined and synthesized in the study [20].

2.2 Cascade observation problem

In order to reconstruct unmeasurable joint torques (active at the shoulder and elbow level, passive at the lumbar level), a cascade-based approach is used on the decomposed-S3S. Cascade observation has been addressed in the literature by [21, 22]. The idea is to reduce the complexity of the observer design using local observers for each subsystem. The proof of convergence is detailed in the study [16], it uses a classical separation principle. The results lead to two cascaded observers according to the following scheme (Figure 3):

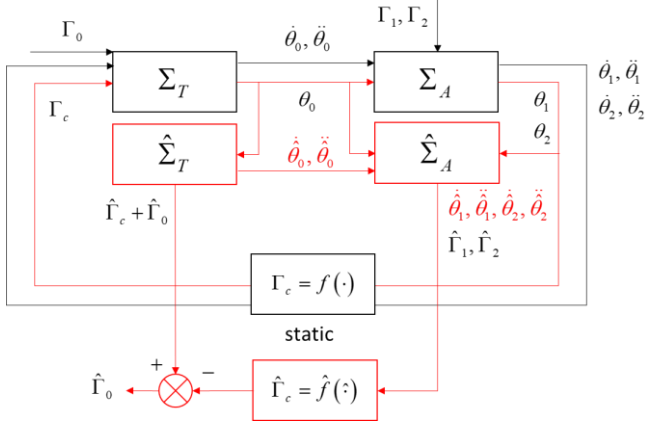


Figure 3. 2 cascade observers for decomposed-S3S model

2.2.1 Takagi-Sugeno formalism

The design of the observers uses a Takagi and Sugeno formalism [23] belonging to the class of quasi-LPV systems, which allows to obtain conditions of convergence of the estimation error. It consists in decomposing a non-linear model into a convex sum of linear sub-models weighted by nonlinear functions that are directly linked to the nonlinearities in the model [15]. Consider a bounded nonlinearity $z_j(\cdot) \in [z_j, \bar{z}_j]$, it exists a convex basis of functions satisfying $\eta_0^j(\cdot) \geq 0$, $\eta_1^j(\cdot) \geq 0$ and $\eta_0^j(\cdot) + \eta_1^j(\cdot) = 1$ such that the nonlinearity can be written as $z_j = z_j \eta_0^j(z_j) + \bar{z}_j \eta_1^j(z_j)$.

$$\eta_0^j(\cdot) = \frac{\bar{z}_j - z_j(\cdot)}{\bar{z}_j - z_j}, \quad \eta_1^j(\cdot) = 1 - \eta_0^j(\cdot) \quad (6)$$

An affine nonlinear model in the type control expressed as $E(x)\dot{x} = f(x) + g(x)u$, ($E(x)$ represents a so-called descriptor form) has a perfect equivalent polytopic model:

$$\sum_{i=1}^r v_i(x) E_i \dot{x} = \sum_{i=1}^r v_i(x) (A_i x + B_i u) \quad (7)$$

r is the number of models, it is in 2^{nl} , nl is the number of nonlinearities in the model.

2.2.2 Design of PI-Observers

For the trunk model Σ_T , the PI-observer expression is:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_T \\ \dot{\hat{\Omega}}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_T \\ \hat{\Omega}_T \end{bmatrix} \\ + K_T(\theta_0)(y_T - \hat{y}_T), \\ \hat{y}_T = C_T \hat{x}_T = \theta_0 \end{cases} \quad (8)$$

K_T is the observer gain to determine, a simple pole placement has been used. Note that the state has been augmented with a double cascade integrator (hence the name PI-observers). The extended state allows to include the estimation of unmeasurable inputs. For the upper limbs model Σ_A , the descriptor structure being preserved, the observer has a particular structure [24]. With $i \in \{1, 2\}$, $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$, $P_1 = P_1^T > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_A \\ \dot{\hat{\Omega}}_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_A(\hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ p_6 \sin(\theta_1) \\ p_7 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \\ &+ \left[\sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P_{(i)}^T \sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} K_{1i}(\cdot) \\ K_{2i}(\cdot) \end{bmatrix} \right] (y_A - \hat{y}_A) \end{aligned} \quad (9)$$

E_{Ai} are constant matrices. v_i , w_{ij} are the convex weighting functions issued from the TS formalism Eq. (6). They are composed of 3 nonlinearities bounded in the compact set Ω_x defined in Eq. (1). First, the function $\cos(q_2) \in [v, 1]$, that can be written with the basis functions $v_1(q_2) = \frac{1 - \cos(q_2)}{1 - v}$ and $v_2(q_2) = 1 - v_1(q_2)$; second the functions $i \in \{1, 2\}$ $\sin(q_2)(\hat{\theta}_i + \hat{\theta}_i) \in [\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i]$ and the basis: $w_{i1}(x_A, \hat{x}_A) = \frac{\bar{\rho}_i - \sin(q_2)(\hat{\theta}_i + \hat{\theta}_i)}{\bar{\rho}_i - \underline{\rho}_i} = 1 - w_{i2}(x_A, \hat{x}_A)$.

And finally, the stating coupling term Γ_c :

$$\hat{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} -p_{10} \sin(q_1) \hat{\theta}_1 \\ -p_9 \sin(q_1 + q_2) \hat{\theta}_2 \\ p_{10} \cos(q_1) \hat{\theta}_1 \\ p_9 \cos(q_1 + q_2) \hat{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} - \hat{\Gamma}_1 \quad (10)$$

3. RESULTS

First of all, to confirm the validity of the approach, a simulation part is proposed. It allows to access all the simulated variables of the decomposed-S3S (including the torques) and to verify that, on the basis of the only information of the measurable angles, the cascade of observers allows to converge to the unmeasurable variables. In particular, it allows to validate the estimation of the joint torques located at the end of the chain where any uncertainty and modeling error is reflected. Secondly, the cascade of observers is evaluated with real data collected from clinical trials.

3.1 Simulation test protocol

For simulation purpose, it is mandatory to first stabilize the open-loop. It is done on the decomposed-S3S (Figure 4) using

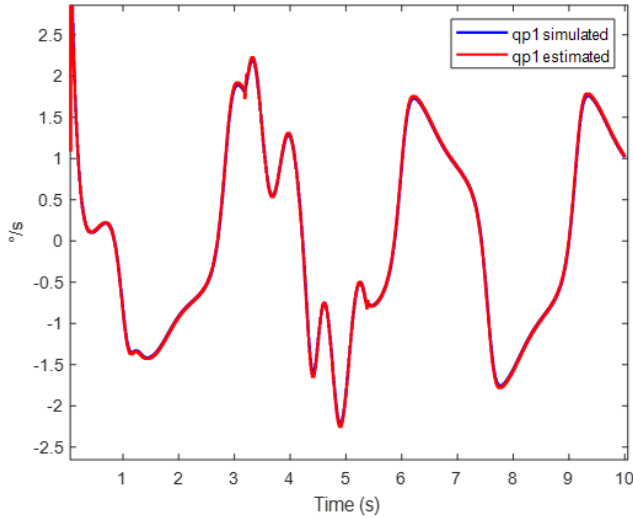


Figure 5. Angular velocity of the shoulder and estimation error

Observation error is small, around 10^{-3} , which confirms the reliability of the observers. The next step is to assess the validity of the approach using real data collected from clinical trials.

3.2 Data-based experiments

The main objective of this study is to show that it is possible to obtain an estimate of the unmeasured torques, including the passive torque at the lumbar level, from the solution of local problems. In order to specifically solicit the lumbar torque, the long sitting position (straight legs) experiment [26] has been included in the experimental protocol. These experimental tests have received the ethical agreement of Centre de Recherche Interdisciplinaire en réhabilitation du Grand-Montréal (CRIR-1083-0515R). Experimental protocol was fully detailed in the study [9].

a control law defined in the study [20]. This control law delivers the inputs for the model i.e., the joint torques $u = \Gamma_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$. The cascade PI-observers in Eq. (8), (9) and (10) use as inputs only the measurement of the angles $y^T = [q_0 \ q_1 \ q_2]$ to estimate unmeasurable velocities and torques. To test the robustness of the observer, a sinusoidal type signal is added on the joint velocity of the trunk between 2 and 3 seconds. It is compatible (amplitude of accelerations) with real observed disturbances for people with SCI during rehabilitation exercises [25].

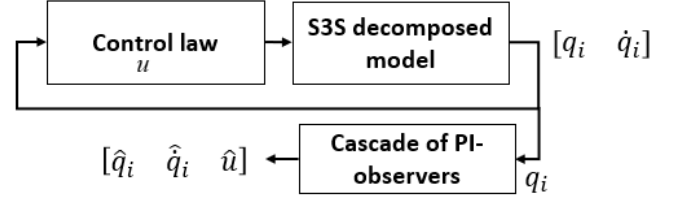
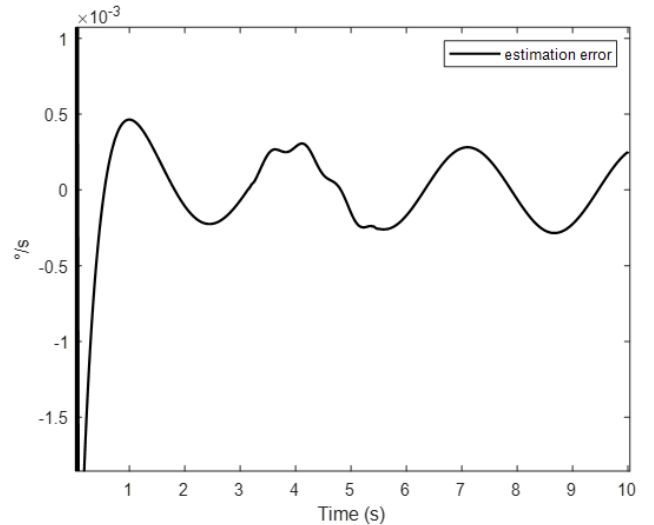


Figure 4. Simulation protocol including a stabilizing control law

The following figure (Figure 5) give the simulated and estimated shoulder angular velocity \dot{q}_1 , \hat{q}_1 and the estimation error between them.



26 subjects with SCI (including 14 with an injury located above the T7 vertebra) were involved. Subjects were asked to maintain their seated balance while keeping, if possible, the upper limbs raised. A destabilizing external force applied at the level of the T8 vertebra then disrupted their sitting position. The goal of this force is to challenge sitting stability while ensuring its safety [27]. Two experimental conditions of the lower limbs' positions have been assessed: 1: straight lower limbs and 2: lower limbs and knee bent at 90°. For each experimental condition, 5 trials have been carried out and measured.

The instructions ask the subject to raise the upper limbs and to maintain this position. 2 to 3 seconds later, a force in the anterior direction is applied to destabilize the subject. The subject must then maintain his sitting balance by adopting compensatory strategies through the action of the upper limbs. Finally, 2 to 3 seconds later and once balanced, the

experimenter asks the subject to lower his arms. The cascade PI-observer is used between the moment when the subject is stabilized and the end of stabilization.

Two different subjects have been chosen to illustrate the results: a 32-year-old woman (weight: 55Kg, and height: 163 cm) with SCI at the T6 vertebra for 3 years and a 53-year-old man (weight: 80 Kg, and height: 180 cm) with SCI at the T11 vertebra for 10 years.

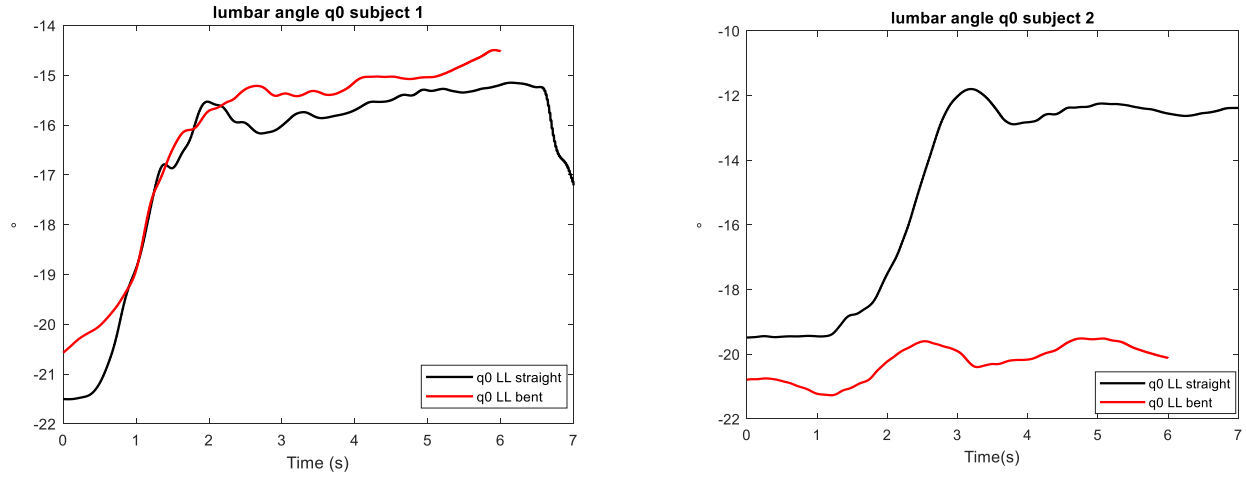


Figure 6. Lumbar angle q_0 according to lower limbs experimental conditions

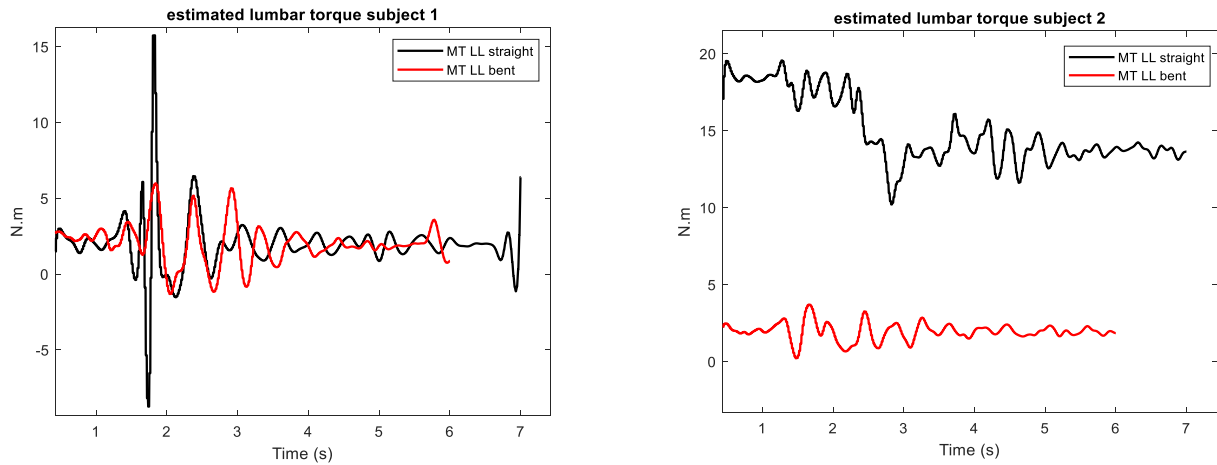


Figure 7. Estimated lumbar torques according to lower limbs experimental conditions

For the same angle, the estimated lumbar torque is given next figure (Figure 7).

The passive torque is on average positive for both subjects. This torque allows to limit the flexion of the trunk. For subject 1, it is on average 5 N.m (resp. 3.25 N.m for subject 2) for bent lower limbs and it is on average 7 N.m (resp. 12 N.m for subject 2) for straight lower limbs. For both subjects the passive torque is higher for extended lower limbs, which is in agreement with the study [26]. In an extended position of the lower limbs, the trunk is located forward of the vertical [9]. The lumbar torque is positive at the beginning of each acquisition, which is consistent from a mechanical point of view because the lumbar angle is negative at the same moment (an articular torque is said to be positive if it rotates a body segment counterclockwise).

4. DISCUSSIONS

The main purpose of this paper is to improve our

Figure 6 presents lumbar angle (q_0) for both subjects as a function of the experimental conditions of the lower limbs (straight or bent). The lumbar angle is positive, trunk back from vertical axis, for a bent position of lower limbs and negative; trunk forward from vertical axis, for a straight position of the lower limbs.

understanding of sitting stability for SCI persons. In this context, active and passive contributions that control the sitting position despite the absence of motor actions below the injury level have been considered. A bio-inspired model based on movements observed in spinal cord subjects during rehabilitation exercises has been proposed. Through this model, estimation of human joint torques through a cascade PI-observers were designed. The synthesis of these observers uses a quasi-LPV or Takagi-Sugeno formalism and numerical tools for solutions of matrix linear equations (not presented in this paper). The numerical simulation results validate the approach, showing that the cascade PI-observers is able to reconstruct the inputs of the nonlinear S3S model. It is confirmed by clinical results obtained on patients. Compared to the methodologies developed previously in the study [9], the possibility of decomposing the global observation problem into smaller problems allows to consider working with even more complex models, for example a S3S-3D. In addition, this methodology is relevant compared to the inverse dynamics

technique commonly used in biomechanics, which consists in deriving experimental position data to recover joint velocity and acceleration of a body segment. The disadvantage of this derivation is that it propagates the estimation errors and can therefore considerably bias the end-of-chain variables that are the joint torques. This approach, which shows its interest, particularly from a methodological point of view, will allow the implementation of more elaborated models. They are useful for improving understanding and carrying out more advanced trials. For example, the experimental recordings show that to counteract the disturbing external force, subjects have adopted compensatory strategies with action of upper limbs outside the sagittal plane. These movements cannot be processed directly with the S3S model and an extension to 3D is in progress.

5. CONCLUSION

Modeling and estimating are promising paths to understand situations such as sitting stability of SCI persons. The global approach presented in the study [9] has paved this way, with limitations due to the complexity of the problems to be solved; whose solutions are at the limits of what solvers are able to do today. Going further therefore requires reducing the complexity of the problems to be solved, and a decomposition into local problems has been proposed in the study [16]. A proof of convergence of the global system from local observers showed that this possibility is promising. This approach has been analyzed in this paper both in simulation and in a clinical context. It allows to consider the next step (3D models) with confidence. The goal is to be able, in a long term, to provide relevant data to occupational therapists allowing them to better follow the patient and possibly to see the progress made, for example during a rehabilitation.

REFERENCES

- [1] Panjabi, M.M. (1992a). The stabilizing system of the spine Part I. Function, dysfunction, adaptation, and enhancement. *Journal of Spinal Disorders & Techniques*, 5(4): 383-389. <https://doi.org/10.1097/00002517-199212000-00001>
- [2] Panjabi, M.M. (1992b). The Stabilizing System of the Spine. Part II. Neutral Zone and Instability Hypothesis. *Journal of Spinal Disorders*, 5(4): 390-396. <https://doi.org/10.1097/00002517-199212000-00002>
- [3] Potten, Y.J.M., Seelen, H.A.M., Drukker, J., Reulen, J.P.H., Drost, M.R. (1999). Postural muscle responses in the spinal cord injured persons during forward reaching. *Ergonomics*, 42(9): 1200-1215. <https://doi.org/10.1080/001401399185081>
- [4] Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6): 596-602. <https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099826>
- [5] Masani, K., Popovic, M.R., Nakazawa, K., Kouzaki, M., Nozaki, D. (2003). Importance of Body Sway Velocity.
- [6] Qu, X., Nussbaum, M.A., Madigan, M.L. (2007). A balance control model of quiet upright stance based on an optimal control strategy. *Journal of Biomechanics*, 40(16): 3590-3597. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2007.06.003>
- [7] Reeves, N.P., Cholewicki, J., Narendra, K.S. (2009). Effects of reflex delays on postural control during unstable seated balance. *Journal of biomechanics*, 42(2): 164-170. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2008.10.016>
- [8] Tanaka, M.L., Ross, S.D., Nussbaum, M.A. (2010). Mathematical modeling and simulation of seated stability. *Journal of biomechanics*, 43(5): 906-912. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2009.11.006>
- [9] Blandeau, M. (2018). Modélisation et caractérisation de la stabilité en position assise chez les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière (Doctoral dissertation, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis).
- [10] Blandeau, M., Guerra, T.M., Pudlo, P., Gabrielli, F., Estrada-Manzo, V. (2016). Modelling Seated Postural Stability for Complete Spine Cord Injury. *AMSE, Modelling, Measurement & Control, C*, 77(2): 40-50.
- [11] Grangeon, M., Gagnon, D., Gauthier, C., Jacquemin, G., Masani, K., Popovic, M.R. (2012). Effects of upper limb positions and weight support roles on quasi-static seated postural stability in individuals with spinal cord injury. *Gait & posture*, 36(3): 572-579. <https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2012.05.021>
- [12] Milosevic, M., Gagnon, D.H., Gourdou, P., Nakazawa, K. (2017). Postural regulatory strategies during quiet sitting are affected in individuals with thoracic spinal cord injury. *Gait & posture*, 58: 446-452. <https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2017.08.032>
- [13] Blandeau, M., Estrada-Manzo, V., Guerra, T.M., Pudlo, P., Gabrielli, F. (2018). Fuzzy unknown input observer for understanding sitting control of persons living with spinal cord injury. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 67: 381-389. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.09.016>
- [14] Ortiz, A., Guerra, T.M., Estrada-Manzo, V., Lauber, J. (2021). Choosing an Adequate Convex Structure for Controller and Observer Gains in Takagi-Sugeno Control Systems. *IFAC-PapersOnLine*, 54(4): 206-211. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.10.035>
- [15] Lendek, Z., Guerra, T.M., Babuska, R., De Schutter, B. (2011). Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models, 262. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-16776-8>
- [16] Srihi, H., Guerra, T.M., Nguyen, A.T., Pudlo, P., Dequidt, A. (2021). Cascade descriptor observers: Application to understanding sitting control of persons living with spinal cord injury. *Frontiers in Control Engineering*, 10. <https://doi.org/10.3389/fcteg.2021.710271>
- [17] Kapandji, A.I. (2005a). Anatomie fonctionnelle I: Membres supérieurs. Physiologie de l'appareil locomoteur. 6th edition. Maloine.
- [18] Kapandji, A.I. (2005b). Anatomie fonctionnelle III: Tête et rachis. 6th edition. Maloine.
- [19] Dumas, R., Cheze, L., Verriest, J.P. (2007). Adjustments to McConville et al. and Young et al. body segment inertial parameters. *Journal of biomechanics*, 40(3): 543-553. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2006.02.013>
- [20] Guerra, T.M., Blandeau, M., Nguyen, A.T., Srihi, H., Dequidt, A. (2020). Stabilizing unstable biomechanical model to understand sitting stability for persons with spinal cord injury. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2): 8001-8006. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2225>
- [21] Lendek, Z., Babuska, R., De Schutter, B. (2008). Stability of cascaded fuzzy systems and observers. *IEEE*

- Transactions on Fuzzy Systems, 17(3): 641-653.
<https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2008.924353>
- [22] Grip, H.F., Saberi, A., Johansen, T.A. (2012). Observers for interconnected nonlinear and linear systems. Automatica, 48(7): 1339-1346.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.04.008>
- [23] Takagi, T., Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, 1: 116-132. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1985.6313399>
- [24] Guerra, T.M., Estrada-Manzo, V., Lendek, Z. (2015). Observer design for Takagi–Sugeno descriptor models: An LMI approach. Automatica, 52: 154-159.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.11.008>
- [25] Bjerkefors, A., Carpenter, M.G., Thorstensson, A. (2007). Dynamic trunk stability is improved in paraplegics following kayak ergometer training. Scandinavian journal of medicine & science in sports, 17(6): 672-679.
<https://doi.org/10.1111/j.1600-0838.2006.00621.x>
- [26] Shirado, O., Kawase, M., Minami, A., Strax, T.E. (2004). Quantitative evaluation of long sitting in paraplegic patients with spinal cord injury. Archives of physical medicine and rehabilitation, 85(8): 1251-1256.
<https://doi.org/10.1016/j.apmr.2003.09.014>
- [27] John, L.T., Cherian, B., Babu, A. (2010). Postural control and fear of falling in persons with low-level paraplegia. Journal of Rehabilitation Research & Development (JRRD), 47(5): 497-502.
<https://doi.org/10.1682/JRRD.2009.09.0150>

Reconstructing Human Torques of People with Medullar Injury via Discrete-Time Nonlinear Cascade Observers

Hajer Srihi, Thierry-Marie Guerra, Philippe Pudlo, Anh-Tu Nguyen

Université Polytechnique Hauts-de-France, CNRS, UMR 8201 LAMIH, Valenciennes, France.

Email: hajer.srihi@uphf.fr

Abstract: Sitting posture is different in subjects with spinal cord injury (SCI) compared to asymptomatic subjects. This difference comes from the spine which, without muscular activity will bend under the weight of the trunk. The impact of this human deformation is particularly visible through the stability maintenance exercise. Indeed, in response to a disturbance, subjects with a spinal cord injury will adopt new stabilization strategies through the action of the upper limbs in order to compensate for the absence of voluntary control below the complete injury level. Understanding the effects of this injury on postural control leads us to design a biomechanical model of sitting stability. With this model, it is possible to estimate human joint torques using an unknown input observer (UIO). The nonlinear structure of the model is considered via quasi-LPV framework also called Takagi-Sugeno framework. The convergence of the UIO is expressed by linear matrix inequalities (LMI), which are solved via convex optimization techniques. We provide in this paper numerical simulations and real data experiments performed in a discrete framework to demonstrate the effectiveness of the UIO-based approach.

Copyright © 2022 The Authors. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Index Terms— Takagi-Sugeno fuzzy models, unknown input observer, LMI, cascade observers.

I. INTRODUCTION

Subjects with a complete spinal cord injury are unable to control muscles below the level of injury. Muscle control and sensory feedback are then reduced (or even lost) (Kirshblum et al., 2011). The lack of muscular activity of their abdominal and lower back muscles leads to an increased risk of falls and consequently of associated injuries (Xiang et al., 2006; Nelson et al., 2010). To stabilize sitting position, only upper limbs are engaged, as the main actuator in the stabilization process, the trunk, is not functional.

People with SCI are characterized by high physiological variability (Wyndaele and Wyndaele, 2006), which hinders experimental studies. In this case, working with a model-based approach is highly recommended. The main objective is to reconstruct non-measurable torques, so it is very important not to simplify the problem, as even a little linearization will imply a loss of information and reduce the quality of the human torques estimation.

The main advantage is to reconstruct variables for which it is difficult or impossible to place a sensor. The S3S model, Seated-3-Segments, is a biomechanical model used in our case of study without reducing the validity and usability domains of the problem and accounting for paresis of the lower back muscles in sitting control (Blandeau, 2018). The S3S model is a variation of triple inverted pendulum represented in the sagittal plane by the trunk, upper arm and forearm segments. The model is inherently unstable in an open-loop setting, so it is necessary to stabilize the system prior to designing an UIO. The challenge is to derive a stabilizing control law similar to the human behavior while stabilizing sitting. Because in case

of disturbance, people with SCI will generate new strategies by the action of upper limbs to compensate for the weak back muscle control. The construction of an internal control law has been done in (Guerra et al. 2020).

The problem of approaches using such nonlinear models is the complexity issued from their writing with a quasi-LPV framework. Complexity is thought in terms of number of variables and conditions necessary to use to solve both problems of control and observation (the reader can refer to (Srihi et al., 2021) where this point is fully discussed). Therefore, with the idea of using more complex models in a near future (including more joints and segments), complexity has to be reduced in order to find problems compatible with actual solvers. An interesting track to follow is the use of a cascade systems observation. It has been realized in the continuous case (Srihi et al., 2021), this paper proposes to deal with the discrete framework.

Thus, the first issue is to show under what conditions the convergence of the state error can be proven globally using reduced problems with a cascade of observers. These conditions are proposed in section III. Afterwards, under these conditions, performances have to be shown at least comparable to the global observer designed in (Blandeau, 2018). Notice that the reduced problems also allow more flexibility in the Lyapunov functions that are used, especially Non-quadratic Lyapunov functions introducing extra free variables can help to increase the performances of the cascaded observers. Results are compared on the S3S model and show globally similar performances.

Notations and preliminaries: Convex sums: $A_h = \sum_{i=1}^r h_i(z)A_i$,

$$A_h^{-1} = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z)A_i \right)^{-1}, A_{hv} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z)v_j(z)A_{ij}. \quad h_i(\cdot) \geq 0$$

$i \in \{1 \dots r\}$ stands for nonlinear function satisfying convex property: $\sum_{i=1}^r h_i(\cdot) = 1$. The asterisk (*) is used in matrix expressions to represent the transpose of a symmetrical elements. For example: $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (*) \\ B & C \end{bmatrix}$. $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stands for the identity matrix and $0_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for the matrix of null entries. The following lemma is useful for the theoretical development.

Finsler lemma (Oliveira and Sketlon, 2001): Let $\psi \in \mathbb{R}^n$, $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that $\text{rank}(V) < n$, then the following expressions are equivalent:

- a) $\psi^T P \psi < 0, \quad \forall \psi \in \{\psi \in \mathbb{R}^n; \psi \neq 0, V\psi = 0\}$
- b) $\exists \zeta \in \mathbb{R}^{n \times m} : \zeta V + V^T \zeta^T + P < 0$

II. MATERIALS AND METHODS

1. S3S decomposition-based approach for observer design

The S3S model was presented by (Blandeau, 2018), see Figure 1, which consists of a triple 2D inverted pendulum represented in the sagittal plane by the trunk, upper arms and forearms segments (i.e. segments 0,1 and 2 respectively). Regressions rules are obtained in relative biomechanical points using real data for a typical male of 80 Kg (Dumas et al., 2007; Fang et al., 2017). For each segment we define: Γ_i the torque, m_i the mass, l_i the length, l_{G_i} the length to the center of mass (COM) and I_{G_i} is the moment of inertia about the (COM). $i \in \{0,1,2\}$ (Dumas, Chèze, et al., 2007).

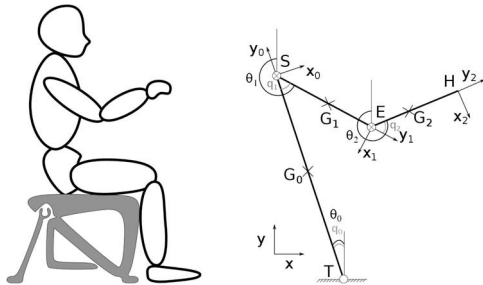


Figure 1: S3S model.

The dynamics of the S3S model can be described as

$$\begin{cases} E(q_k)x_{k+1} = A_d(x_k)x_k + S_d(q_k) + B_d u_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (1)$$

where $x_k = [q_k^T \quad \dot{q}_k^T]^T = [q_{0k} \quad q_{1k} \quad q_{2k} \quad \dot{q}_{0k} \quad \dot{q}_{1k} \quad \dot{q}_{2k}]^T \in \mathbb{R}^6$ is the state containing angles and velocities, and the torque control input is $u_k = [\Gamma_0 \quad \Gamma_1 \quad \Gamma_2]^T \in \mathbb{R}^3$, and

$$E(q) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \bar{E}(q) \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_3 \\ S(q) & \bar{A}(x) \end{bmatrix},$$

$$S(q) = \begin{bmatrix} s_0 + s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{012} & s_{012} & s_{012} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$A_d(x_k) = TA(x_k) + E(q_k), \quad S_d(q_k) = TS(q_k), \quad B_d = TB. \quad \text{In}$$

this paper, the Euler's method $\dot{x}(t) \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T}$, where T is the sampling period, is used for the model discretization. The details of the system matrices are given in (Srihi et al., 2021). The representation of model (1) under the Takagi-Sugeno (TS) framework considers its nonlinearities in a defined compact set directly issued from anatomical constraints of the trunk and upper segments and corresponds to (in ° and °/s):

$$\Omega_x = \left\{ \begin{array}{l} -20 \leq q_1 \leq 60 \\ -10 \leq q_2 \leq 45 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\dot{q}_0\| \leq 29 \\ \|\dot{q}_1\| \leq 57 \\ \|\dot{q}_2\| \leq 57 \end{array} \right\}$$

Using the sector nonlinearity approach (Ohtake et al., 2001), the nonlinear model (1) can be rewritten in the form

$$\begin{cases} E_h x_{k+1} = A_h x_k + S_d(q_k) + B_d d_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (2)$$

where $E_h = \sum_{i=1}^r h_i(z)E_i$, $A_h = \sum_{i=1}^r h_i(z)A_{d_i}$, E_i and A_{d_i} $i \in \{1 \dots r\}$ are constant matrices. The TS model (2) can exactly represent system (1) within compact set Ω_x . To estimate the unmeasurable torques, we consider the following observer structure (Blandeau, 2018):

$$\begin{cases} E_h^e \hat{x}_{k+1}^e = A_h^e \hat{x}_k^e + S^e(q_k) + H(q_k)^{-1} K_h (y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = C^e \hat{x}_k^e \end{cases} \quad (3)$$

where $x_k^e \in \mathbb{R}^{12}$ is the extended state including the system state $x_k \in \mathbb{R}^6$ and its PI part $D_k \in \mathbb{R}^6$ in order to reconstruct the unmeasurable torques:

$$D_{k+1} = \Gamma \times D_k \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d_{k+1} \\ d_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ -I_3 & 2 \times I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k \\ d_{k+1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

The state-dependent matrix $H(q_k)^{-1} K_h$ represents the observer “gain”, whose structure is chosen to ensure an acceptable tradeoff between theoretical complexity and estimation accuracy (Blandeau, 2017). Importantly, it has been shown that the conditions issued from this observer are closed to the limits of the actual solvers (Ortiz et al., 2021). Therefore, it has been proposed to write the 2D-S3S in a decomposed approach. Comparison and validation of the methodology have been performed in the continuous framework. The decomposed models have been developed in (Srihi et al., 2021), and only their equations are recalled here. In this paper, we use this decomposition-based approach in the discrete-time domain and compare results to the 2D-S3S presented in (1). The 2D-S3S decomposed model is defined in 3 interconnected blocks as shown Figure 2, i.e., Σ_T is the trunk model and Σ_A is the shoulder + arms model. “T” stands for the trunk, “A” for

the arm. Γ_0 is the passive lumbar torque, Γ_1 is the shoulder torque and Γ_2 is the elbow torque.

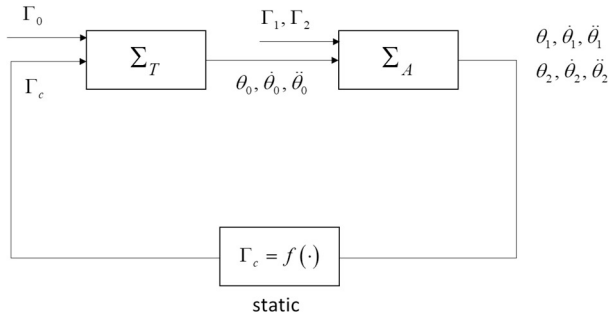


Figure 2: S3S decomposed model.

The equations of the S3S decomposed model in continuous framework are detailed in (Srihi et al., 2021). For the trunk model Σ_T , the arm model Σ_A and the coupling term Γ_c . For simplicity, the index k is omitted and x^+ replaces x_{k+1} . The Σ_T trunk model can be obtained as

$$x_T^+ = \left(T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_{0k})}{\theta_{0k}} & 0 \end{bmatrix} + I_2 \right) x_T + T \begin{bmatrix} 0 \\ p_1^{-1} \end{bmatrix} \Gamma_U \quad (5)$$

where the parameters p_i , $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ can be found in (Srihi et al., 2021). For the Σ_A arm model, we use $\ddot{\theta}_0 = T^{-1}(\dot{\theta}_0^+ - \dot{\theta}_0)$.

For simplicity, we introduce

$$A_A(x_A) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_2 \\ -p_4 \sin(q_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$E_A(\theta_2) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \cos(q_2) \\ p_4 \cos(q_2) & p_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad B_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

The discrete form of the Σ_A model is defined by:

$$E_A(x_A^+ - x_A) = T A_A x_A + T B_A \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T D_A(\theta_A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T C(\theta_A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Finally, the coupling term is given as $q_{12} = q_1 + q_2$

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} -p_{10} \sin(q_1) \dot{\theta}_{1k} \\ -p_9 \sin(q_{12}) \dot{\theta}_{2k} \\ p_{10} \cos(q_1) \\ p_9 \cos(q_{12}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1k} \\ \dot{\theta}_{2k} \\ \ddot{\theta}_{1k} \\ \ddot{\theta}_{2k} \end{bmatrix} - \Gamma_1, \quad (7)$$

$$\ddot{\theta}_1 = T^{-1}(\dot{\theta}_1^+ - \dot{\theta}_1) \quad (8)$$

$$\ddot{\theta}_2 = T^{-1}(\dot{\theta}_2^+ - \dot{\theta}_2) \quad (9)$$

From this decomposition, we will show how to design a nonlinear cascade observer with asymptotic convergence.

2. Separation principle for cascade observation problem

Proposition: Consider two regular descriptor systems $(E_j(\cdot), A_j(\cdot), C_j(\cdot))$, $j \in \{1, 2\}$ such that there exist matrices $L_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$ ensuring that the estimation error systems defined by: $E_j(\cdot) e_{jk+1} = (A_j(\cdot) - L_j(\cdot) C_j(\cdot)) e_{jk}$ are asymptotically stable, i.e. there exist two Lyapunov functions $V_j(e_{jk}) = e_{jk}^T P_j(\cdot) e_{jk}$ and scalars $\bar{\lambda}_j \geq \underline{\lambda}_j$, satisfying:

$$0 < \underline{\lambda}_j \|e_{jk}\|^2 \leq V_j(e_{jk}) \leq \bar{\lambda}_j \|e_{jk}\|^2 \quad (10)$$

$$\Delta V_j(e_{jk}) = e_{jk+1}^T P_j^+(\cdot) e_{jk+1} - e_{jk}^T P_j(\cdot) e_{jk} < 0 \quad (11)$$

Consider the system:

$$\begin{bmatrix} E_1(\cdot) & 0 \\ E_{12}(\cdot) & E_2(\cdot) \end{bmatrix} \Theta^+ = \begin{bmatrix} A_1(\cdot) - L_1(\cdot) C_1(\cdot) & 0 \\ A_{12}(\cdot) & A_2(\cdot) - L_2(\cdot) C_2(\cdot) \end{bmatrix} \Theta \quad (12)$$

with $\Theta_k = \begin{bmatrix} e_{1k} \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}$, $E_{12}(\cdot)$ and $A_{12}(\cdot)$ being norm-bounded.

Then, system (12) is also asymptotically stable.

Proof: Since $E_j(\cdot)$ is regular, we can define

$$A_j^*(\cdot) = E_j^{-1}(\cdot) (A_j(\cdot) - L_j(\cdot) C_j(\cdot)) \quad (13)$$

$$\chi(\cdot) = E_2^{-1}(\cdot) (A_{12}(\cdot) - E_{12}(\cdot) A_1^*(\cdot)) \quad (14)$$

It follows from (12) and (13) that

$$\begin{bmatrix} e_{1k+1} \\ \varepsilon_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*(\cdot) & 0 \\ \chi(\cdot) & A_2^*(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1k} \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} \quad (15)$$

We consider the Lyapunov function $V(e_k, \varepsilon_k)$ as

$$V(e_{1k}, \varepsilon_k) = V_1(e_{1k}) + \gamma V_2(\varepsilon_k) \quad (16)$$

with $\gamma > 0$ is a positive scalar. Its variation along the trajectory of (15) is expressed by

$$\Delta V(\cdot) = V(e_{1k+1}, \varepsilon_{k+1}) - V(e_{1k}, \varepsilon_k) = \Delta V_1(e_{1k}) + \gamma \Delta V_2(\varepsilon_k) \quad (17)$$

$$\Delta V(\cdot) = e_{1k} (A_1^{*T} P_1^+(\cdot) A_1^* - P_1(\cdot)) e_{1k} + \varepsilon_k^T (A_2^{*T} P_2^+(\cdot) A_2^* - P_2(\cdot)) \varepsilon_k + \quad (18)$$

$$\gamma (\chi(\cdot) e_{1k})^T P_2^+(\cdot) \chi(\cdot) e_{1k} + \gamma (\chi(\cdot) e_{1k})^T P_2^+(\cdot) A_2^* \varepsilon_k + (*) \leq 0$$

Using the following matrix inequality:

$$\begin{pmatrix} e_{1k} \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Gamma_1(\cdot) + \gamma \chi^T(\cdot) P_2^+(\cdot) \chi(\cdot) & * \\ \gamma A_2^{*T} P_2^+(\cdot) \chi(\cdot) & \gamma P_2(\cdot) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1k} \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} \leq 0 \quad (19)$$

with $\Gamma_j(\cdot) = A_j^{*T} P_j^+(\cdot) A_j^* - P_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$. It follows from (11) that there exists $\mu_j > 0$ such that $\Gamma_j(\cdot) \leq -\mu_j I$. Then, condition (19) holds if

$$\begin{pmatrix} -\mu_1 I + \gamma \chi^T(\cdot) P_2^+(\cdot) \chi(\cdot) & * \\ \gamma A_2^{*T} P_2^+(\cdot) \chi(\cdot) & -\gamma \mu_2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (20)$$

Using a Schur's complement, inequality (20) is equivalent to $\gamma (\mu_2^{-1} (*) A_2^{*T} P_2^+(\cdot) \chi(\cdot) + \chi^T(\cdot) P_2^+(\cdot) \chi(\cdot)) - \mu_1 I < 0$ (21)

It can be noted that there always exists a sufficiently small γ such that (21) holds.

2.1) PI observer for the trunk model

A double integrator cascade is used to satisfy a good compromise between torque estimations and computational

complexity $\ddot{\Gamma}_k \approx 0$, $k \in \{0,1,2\}$. We use the extended form of the equation (5) by adding the unknown inputs such as:

$$x_T^{e+} = \left(T \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} + I_4 \right) x_T^e \quad (22)$$

$$x_T^e = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \Omega_T \end{bmatrix}, \quad \Omega_T = \begin{bmatrix} \Gamma_U \\ \dot{\Gamma}_U \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}$$

From equation (22), we develop a PI-observer for Σ_T model

$$\hat{x}_T^{e+} = \left(T \begin{bmatrix} A_T(\hat{\theta}_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} + I \right) \hat{x}_T^e + K_T(\theta_0)(y_T - \hat{y}_T) \quad (23)$$

$$\hat{y}_T = C_T \hat{x}_T^e = \hat{\theta}_0 \quad (24)$$

$$C_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Moreover, the estimation error dynamic $e_T = \hat{x}_T^e - x_T^e$ writes

$$e_T^+ = \left(T \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_T(\theta_0)C_T + I \right) e_T \quad (25)$$

$$\text{As } A_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix} \text{ and } C_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

consider the following observer gain:

$$K_T(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0 & \beta p_1^{-1} p_2 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + K_{LT}, \quad K_{LT} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$$

Thus, the linear estimation error dynamics can be described as

$$e_T^+ = \left(T \begin{bmatrix} J & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} - K_{LT}C_T + I \right) e_T \quad (26)$$

where K_{LT} is obtained from pole placement method. Then the observer structure can be defined as

$$x_T^{e+} = \begin{bmatrix} A_T(\theta_0) & B_T \\ 0 & J \end{bmatrix} x_T^e - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta p_1^{-1} p_2 \text{sinc}(\theta_0) \\ 0 \end{bmatrix} + K_{LT} (y_T - \hat{y}_T) \quad (27)$$

2.2) PI observer for the arm model

For simplicity, we denote:

$$\begin{bmatrix} E_A(\theta_2) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = E_{gama} \text{ and } \begin{bmatrix} A_A(x_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = A_{gama}$$

We use the extended form of (6) adding UIs such that

$$E_{gama} x_A^{e+} = (TA_{gama} + E_{gama}) x_A^e + TD_a^e(\theta_A) + TC^e(\theta_A) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\text{where } x_A^e = \begin{bmatrix} x_A & \Omega_A \end{bmatrix}^T, \quad D_a^e(\theta_A) = \begin{bmatrix} 0 \\ D_a(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^e(\theta_A) = \begin{bmatrix} 0 \\ C(\theta_A) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \Omega_A = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \dot{\Gamma}_1 & \Gamma_2 & \dot{\Gamma}_2 \end{bmatrix}^T. \quad \text{The}$$

extended output is defined as

$$y_A = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \end{bmatrix} x_A^e = \theta_A = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

From (28) we can develop a nonlinear observer of the form

$$E_{gama} x_A^{e+} = (TA_{gama} + E_{gama}) x_A^e + TD_a^e(\theta_A) + TC^e(\theta_A) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0^2 \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} + \quad (30)$$

$$K_A(\cdot)(y_A - \hat{y}_A)$$

We define the observation error as $e_A = \begin{bmatrix} x_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\Omega}_A \end{bmatrix}$. Using

the same methodology of (Srihi et al., 2021), we can easily find the equivalent discrete form of the continuous expression

$$E_{gama} \dot{e}_A = \left(\begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} - K_A(\cdot)C \right) e_A \quad (31)$$

with

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & p_4 \sin(q_2) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 + \dot{\hat{\theta}}_2 \\ -\dot{\theta}_1 - \dot{\hat{\theta}}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = H(x_A, \hat{x}_A)$$

For simplicity, we denote

$$\begin{bmatrix} H(x_A, \hat{x}_A) & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = H_{gama} \text{ and } \rho = \begin{bmatrix} -\lambda P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}, \text{ of course, we}$$

use \mathcal{E}_A instead of e_A since it is not the full-term error in Σ_A model. Then we can write (31) in discrete approach as

$$E_{gama} \mathcal{E}_A^+ = (TH_{gama} - TK_A(\cdot)C + E_{gama}) \mathcal{E}_A \quad (32)$$

which can be written in the form

$$\left((TH_{gama} + E_{gama} - TK_A(\cdot)C) - E_{gama} \right) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_A \\ \mathcal{E}_A^+ \end{pmatrix} = 0 \quad (33)$$

We consider a quadratic Lyapunov function

$$V(\mathcal{E}_k) = \mathcal{E}_k^T P \mathcal{E}_k, \quad P = P^T > 0.$$

$\Delta V(\mathcal{E}_k) = V(\mathcal{E}_{k+1}) - \lambda V(\mathcal{E}_k)$ with $0 < \lambda < 1$ is a decay rate

$$\Delta V(\mathcal{E}_k) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_A \\ \mathcal{E}_A^+ \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\lambda P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_A \\ \mathcal{E}_A^+ \end{bmatrix} < 0. \quad (34)$$

Using Finsler Lemma, it follows from (33) and (34) that

$$\begin{bmatrix} 0 \\ H(\cdot) \end{bmatrix} \left[TH_{gama} + E_{gama} - TK_A(\cdot)C - E_{gama} \right] + (*) + \rho < 0 \quad (35)$$

Let us choose an observation gain as $K_A = H(q_k)^{-1} K_h$, then condition (35) can be rewritten as

$$\begin{bmatrix} 0 \\ H(\cdot) \end{bmatrix} \left[TH_{gama} + E_{gama} - TH(\cdot)^{-1} K_h C - E_{gama} \right] + (*) + \rho < 0 \quad (36)$$

which can be represented in the following LMI form:

$$\begin{bmatrix} -\lambda P & (*) \\ H(q_k)(TH_{gama} + E_{gama}) - TK_h C & P - H(q_k)E_{gama} - (*) \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

Using a TS fuzzy description to (37), it follows that

$$\begin{bmatrix} -\lambda P & (*) \\ H_h(q_k)(TH_{gama_h} + E_{gama_h}) - TK_h C & P - H_h(q_k)E_{gama_h} - (*) \end{bmatrix} < 0 \quad (38)$$

with $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{1i}(x_A, \hat{x}_A) w_{2j}(x_A, \hat{x}_A) \begin{bmatrix} H_{ij} & B_A \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = H_{gama_h}$ and

$$E_{gama_v} = \sum_{i=1}^2 v_i(q_2) \begin{bmatrix} E_{Ai} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \text{ Then the LMI problem can be}$$

derived from (38), for $i, j, k \in \{1, 2\}$, as follows:

$$\begin{bmatrix} -\lambda P & (*) \\ H_i(TH_{gama_h} + E_{gama_i}) - TK_i C & P - H_i E_{gama_i} - (H_i E_{gama_i})^T \end{bmatrix} < 0 \quad (39)$$

III. SIMULATION TEST PROTOCOL

In this work, the LMI constraints are solved via YALMIP toolbox and MOSEK solver within MATLAB R2021 environment. The LMI problem is feasible in the compact set Ω_x . For brevity, the decision matrices obtained for the TS global observer are not shown here. For the gain of the trunk model, the solution of (26) is given by a pole placement with $K_{LT} = 10^3 [6.98 \ 1.33 \ 2.90 \ 4.1]^T$. To enhance the estimation performance a decay rate $\tau = 0.56$ is added in the first entry of the constraints (39). Solving the LMI problem, we can obtain the matrix gains $[K_{li}^T(\cdot) \ K_{2i}^T(\cdot)]^T$, $i \in \{1, 2\}$.

The simulation protocol (Figure 3) is as follows: under the control law designed in (Guerra et al., 2020), taking into account the possible controls of PRM, i.e., Shoulder S , Elbow E , Trunk T being unavailable, we stabilize the S3S model (global and decomposed). This system acts like a ‘black box’ from which only the joint angles are measured $y_k = [q_0 \ q_1 \ q_2]^T$ and included in the discrete-time TS-UIO. Then, a random white noise filtered with a 5 Hz low pass-band second order filter is added to the output in order to replicate experimental disturbance. Note that nonlinearities using angular velocities are computed with the variable $\hat{q}_0(k-1)$ instead of $\dot{q}_0(k)$ as discussed in (Blandeau, 2017).

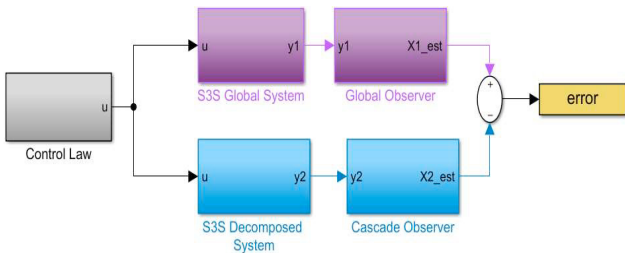


Figure 3: Simulation protocol.

Figures 4 and 5 give torques in the shoulder MS and the elbow ME (respectively the velocity qp_0 and the angle q_0 of the trunk) and the absolute error between cascade observer and global unique observer compared to simulation. As for the simulation in continuous domain, the joint angles and velocities converge toward 0° , the equilibrium position. Both observers show similar performance and estimation error (less

than 8% on the torque) highlighting that they are adequate to figure out and to resolve the problem.

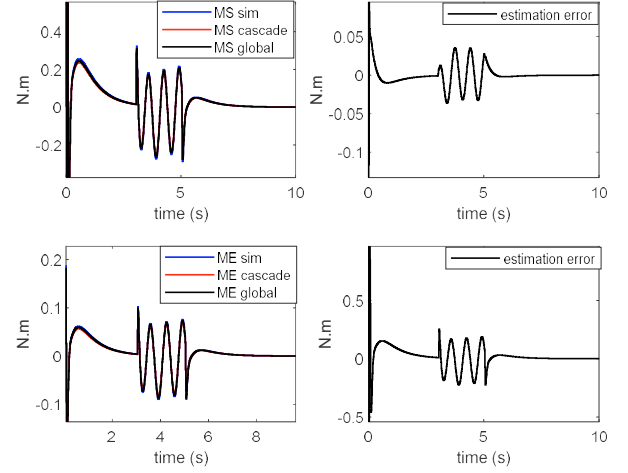


Figure 4: Simulation results in torques.

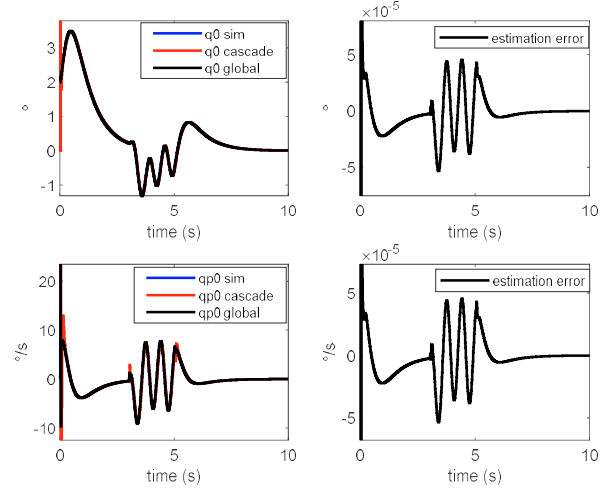


Figure 5: Simulation results in lumbar angle and velocity.

IV. DATA-BASED EXPERIMENTS

For real time simulations, we use inertial and geometric data for two subjects: A man (weight :80 Kg, high: 172 cm) and a woman (weight: 71 Kg, high:163 cm) having both complete spinal cord injury for 3 years and 7 years. Ethical approval has been obtained from the Research Ethics Committee of the Center for Interdisciplinary Research in 208 Rehabilitation of Greater Montreal (CRIR-1083-0515R).

The simulation protocol in real data experiments is as follows: Each subject is asked to keep his/her seated balance (with upper limbs raised) while applying an external force in the level of the vertebra T8. The objective of this experiment is to solicit the postural control in sitting position of the two subjects without causing loss of balance. For that reason, the intensity of the disturbing external force is adapted to the reaction and the feeling of each subject. The estimated Lumbar torque MT is given in Figure 6 where the first line is dedicated to the first subject results and the second line is dedicated to the second subject results. The estimation error is defined as the difference between the results given by the cascade observer and the global observer. Note that the observers depend on measurable premise variables, in contrast with

several recent works as we can mention (Ichalal et al., 2018; Pan et al., 2020; Nguyen et al., 2021).

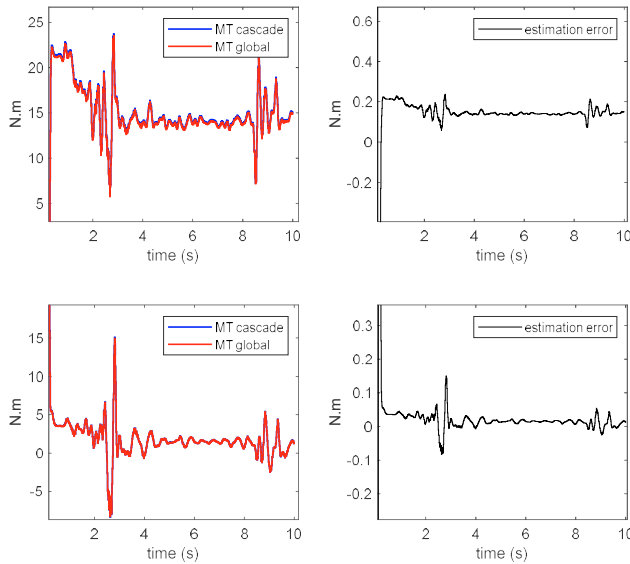


Figure 6: Results in experimental data protocol.

Once stabilized by the action of upper limbs, the UIO estimates the unmeasurable torques and particularly the one at the lumbar joint. Like the results show in Figure 6, depending on the injury level and its severity, each subject has adopted a different behavior in order to counter the disturbance which can be considered as an external input that pushes each subject in the direction anterior and thus explaining the decrease of the joint torques once the disturbance is applied.

V. CONCLUSIONS

The goal was to be able to cope with cascade observers of biomechanical models to lower the complexity of the LMI conditions to solve. Especially, if the perspective is to include new degrees of freedom, such as more joints and segments, a global approach will fail to provide solutions compatible with the actual solver. The proposition made allows showing that conditions for local convergence of the observers ensure global convergence. From this result, applied to the S3S-model, the capability to attain the same performances as a global observer, in simulation as well as for real-data has been demonstrated. Next steps will investigate several possibilities; as already said introducing more complex models, especially going from 2D to 3D descriptions, as well as trying to cope with the estimation of the inherent human delays, which is another important challenge.

REFERENCES

Blandeau M., Estrada V., Guerra T., Pudlo P., Gabrielli F., (2017). Unknown input observer based on discrete nonlinear descriptor model for understanding sitting control. *IFAC-PapersOnLine*, 50, 820-825.

Blandeau M. (2018). Modélisation et Caractérisation de la Stabilité en Position Assise chez les Personnes Vivant avec une Lésion de la Moelle Épineuse. *PhD Thesis*. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis.

Blandeau M., Estrada V., Guerra T., Pudlo P., Gabrielli F. (2018). Fuzzy unknown input observer for understanding sitting control of persons living with spinal cord injury. *Eng. Appl. Artif. Intell.*, 67, 381-389.

Ichalal D., Marx B., Mammar S., Maquin D., Ragot J. (2018). How to cope with unmeasurable premise variables in Takagi–Sugeno observer design: Dynamic extension approach. *Eng. Appl. Artif. Intell.*, 67, 430-435.

de Oliveira C., Skelton R. (2001). Stability tests for constrained linear systems, in *Perspectives in Robust Control*. Lect. Notes Control Inf. Sci. Springer, London. pp. 241–257.

Dumas R., Chèze L., Verriest J.-P. (2007) Adjustments to McConville et al. and Young et al. body segment inertial parameters. *J. Biomech.* 40 (3), 543–553.

Fang Y., Morse L., Nguyen N., Tsantes N., Troy K. (2017) Anthropometric and biomechanical characteristics of body segments in persons with spinal cord injury. *J. Biomech.* 1–17.

Guerra T.-M., Blandeau M., Nguyen A.-T., Srihi H., Dequidt A. (2020). Stabilizing unstable biomechanical model to understand sitting stability for persons with spinal cord injury. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 8001-8006.

Kirshblum S., Burns S., Biering-Sorensen F., Donovan W., Graves D., Jha A., Johansen M., Jones L., Mulcahey M. (2011) International standards for neurological classification of spinal cord injury. *J. Spinal Cord Med.* 34:535–546.

Nelson A., Groer S., Palacios P., Mitchell D., Sabharwal S., Kirby R., Gavin-Dreschnack D., Powell-Cope G. (2010) Wheelchair-related falls in veterans with spinal cord injury residing in the community: A prospective cohort study. *Arch. Phys. Med. Rehabil.* 91(8), 1166–1173.

Nguyen A.-T., Campos V., Guerra T., Pan J., Xie W. (2021). Takagi–Sugeno fuzzy observer design for nonlinear descriptor systems with unmeasured premise variables and unknown inputs. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 31(17), 8353-8372.

Ohtake H., Tanaka K., Wang, H. (2001) ‘Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept’, in July 2001 pp. 127–132.

Ortiz A., Guerra T.-M., Estrada V., Lauber J. (2021). Choosing an Adequate convex structure for controller and observer gains in Takagi-Sugeno control systems. *IFAC-PapersOnLine*, 54(4), 206-211.

Pan, J., Nguyen, A.-T., Guerra, T. M., Ichalal, D. (2020). A unified framework for asymptotic observer design of fuzzy systems with unmeasurable premise variables. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 29(10), 2938-2948.

Srihi H., Guerra T., Nguyen A.-T., Pudlo P., Dequidt A. (2021) Cascade descriptor observers: Application to understanding sitting control of persons living with spinal cord injury. *Front. Control. Eng.* 2:710271. DOI: 10.3389/fcteg.2021.710271

Xiang H., Chany A.-M., Smith G. (2006) Wheelchair related injuries treated in US emergency departments. *Injury Prevention*. 12(1), 8–11.

Wyndaele M., Wyndaele J. (2006). Incidence, prevalence and epidemiology of spinal cord injury: what learns a worldwide literature survey. *Spinal Cord*. 44 (9), 523–529.