UNIVERSITÉ PARIS 8 - VINCENNES-SAINT-DENIS

ÉCOLE DOCTORALE CLI
COGNITION LANGAGE INTERACTION

T H È S E

en vue d'obtenir le grade de

Docteur

de l'Université Paris 8 - Vincennes-Saint-Denis
Discipline : Informatique

Présentée par

Silvia FAJARDO FLORES

Modélisation des interactions non visuelles dans un environnement de travail mathématique visuel et non visuel synchronisé

Thèse dirigée par Dominique ARCHAMBAULT

soutenue le 8 Juillet 2014

Jury :

Rapporteurs :	Pr Jan Engelen	-	KU Leuven, Université Catholique de Louvain
	Dr Nadine Jessel	-	Université Toulouse Jean Jaurès
Examinateurs :	Dr Jacques Charlin	-	Université Claude Bernard Lyon 1
	Pr Jaime Lopez-Krahe	-	Université Paris 8-Vincennes-Saint-Denis
	Pr Klaus Miesenberger	-	Université Johannes Kepler de Linz
	Pr Masakazu Suzuki	-	Université de Kyushu
Directeur :	Pr Dominique Archambault	-	Université Paris 8-Vincennes-Saint-Denis

Dédicace

À Nachita pour avoir inspiré ce travail.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dominique Archambault pour la supervision de ce travail dont j'espère avoir été à la hauteur.

Mes remerciements vont également à Jaime López Krahe pour le support et les conseils.

Aux élèves, étudiants et enseignants de mathématiques qui ont participé aux expériences le long du travail de recherche. Leur contribution a enrichi énormément ce travail et a apporté des idées pour ceux à venir, et je leur en suis très reconnaissante.

À l'École Doctorale Cognition Langage Interaction, pour avoir soutenu la diffusion de mon travail.

À l'Université de Colima pour l'opportunité de continuer ma formation professionnelle.

Je remercie profondément les chercheurs qui m'ont fait l'honneur de participer au Jury de soutenance.

Merci Elka pour l'assistance morale et matérielle.

Une dédicace spéciale à Alem pour l'encouragement et le soutien.

Table des matières

Chapitre 1
Introduction

Sommaire

1.1 L'apprentissage des mathématiques par les déficients visuels

Les élèves non voyants et malvoyants qui apprennent les mathématiques dans un environnement scolaire intégré font face à des problèmes qui vont au-delà de la difficulté des mathématiques elle-mêmes. Selon [Stanley 2008], la difficulté rencontrée par des élèves déficients visuels qui apprennent les mathématiques n'est pas provoquée par la manque de vue ; en effet les étudiants peuvent écrire et travailler avec des mathématiques en utilisant le braille, qui contient l'information sémantique nécessaire pour la compréhension du sens mathématique. [Archambault 2009] estime que le problème principal vient des modalités non visuelles d'accès aux contenus mathématiques, qui sont linéaires et ne donnent pas un accès direct à la structure des expressions, tandis que les représentations utilisées par les voyants sont bidimensionelles et favorisent la compréhension de la sémantique mathématique contenue dans une expression. D'autre part cette différence essentielle entre les représentations utilisées par les personnes voyantes et non voyantes rend plus difficile la communication directe entre eux, par exemple entre un élève non voyant en intégration scolaire et son enseignant de mathématiques. Tandis que les élèves voyants utilisent du papier et le stylo pour prendre des notes et faire des mathématiques, les élèves non voyants, et dans certaines cas les malvoyants, utilisent du braille ou une synthèse vocale. Bien qu'il soit possible d'écrire et de comprendre les expressions en utilisant le braille mathématique, la transformation et la résolution d'équations reste une tâche complexe pour les personnes ayant un handicap visuel. Même les taches de simplification, qui se trouvent parmi les plus faciles dans la résolution d'une équation, peuvent demander un important effort cognitif et de manipulation à une personne aveugle qui utilise le braille [Stöger 2004].

D'un autre côté, la prise des notes, la soumission des devoirs et la résolution d'examens sont des activités courantes dans la salle de cours. De plus, les élèves ont besoin de suivre le discours oral du professeur qui, la plupart du temps, utilise le sens visuel des élèves. C'est le cas par exemple des références à la position des termes d'une expression ou de leur indication par un geste sur le tableau.

Le travail de l'enseignant est un des facteurs les plus importants dans la réussite d'un élève, voyant ou non voyant, dans l'étude des mathématiques. L'enseignant est responsable de créer des situations d'enseignement-apprentissage pour attirer l'attention de l'élève et l'orienter vers des objectifs de caractère mathématique [Fernández del Campo 1986]. La communication directe élève-enseignant est indispensable ; malheureusement, ce type de communication est rarement possible dans une classe avec des élèves en intégration.

Actuellement, les élèves non voyants normalement sont aidés par des spécialistes en la déficience visuelle, qui font la transcription du braille vers le noir et vice versa. En France, ils peuvent bénéficier dans certaines cas de l'aide des auxiliaires de vie scolaire (AVS) pour un suivi personnalisé. Les AVS aportent une aide pratique aux élèves pour des activités dans la salle de classe ou bien pour des sorties occasionnelles, mais ils n'ont pas un rôle pédagogique. Même si le travail des enseignants spécialisés rend possible la communication de contenus par écrit, cette communication ne se produit pas de façon immédiate pour servir aux besoins dans la salle de cours.

1.2 Objectifs de la recherche

L'utilisation d'un ordinateur peut rendre possible la représentation de contenus mathématiques dans des modalités synchronisées qui conviennent à la fois aux voyants et aux non voyants, permettant ainsi la communication entre eux sans intermédiaire. Il est aussi possible de faciliter les tâches de résolution, mais cela demande une analyse plus profonde de besoins pour sa mise en opération.

Selon [Miesenberger 2008], les challenges actuels pour apporter une aide au travail des non voyants qui apprennent les mathématiques sont :

- L'accès aux contenus mathématiques.
- La navigation dans les expressions.
- La présentation et communication de contenus.
- La facilitation des calculs.

Des travaux de recherche ont été menés pour l'analyse et le développement de chaque aspect, comme le Math Genie [Miesenberger 2008], LAMBDA [Schweikhardt 2006] et les prototypes MaWEn [Stöger 2004, Archambault 2009]. L'accès, la navigation et la présentation ont été traités de façon plus approfondie avec des résultats relativement satisfaisants, mais la facilitation des calculs n'a pas encore eu un succès acceptable.

Le but de notre travail consiste à identifier les caractéristiques de représentation et d'interaction souhaitables pour la conception d'un prototype d'interface qui puisse servir comme outil de support dans le processus d'enseignement-apprentissage de l'algèbre dans un environnement intégré. On peut situer notre recherche spécifiquement dans la représentation multimodale d'équations algébriques, et les interactions qui facilitent leur compréhension et résolution sur l'ordinateur.

Nos questions de recherche sont :

- Quelles sont les besoins d'interaction pour les élèves voyants et non voyants concernant l'écriture et la résolution d'expressions ? Nous voulons savoir s'il y a des différences entre les actions nécessaires pour l'accès visuel et non visuel par rapport à la stratégie de résolution.
- Comment présenter de façon synchronisée les représentations visuelle et non visuelle pour faciliter la communication entre les personnes voyantes et les non voyantes ? Les caractéristiques fondamentales des différentes représentations sont évidentes : la représentation en noir est bidimensionnelle, le braille est linéaire, l'audio est transitoire. Par contre, la façon de les présenter de façon synchronisée n'est pas aussi évidente.
- Quels sont les interactions non visuelles qui facilitent l'accès aux termes de l'expression ?
- Comment présenter les interactions pour faciliter la transformation d'expressions sans influencer négativement la compréhension des concepts algébriques ?
- Est-ce que l'interface peut influencer le raisonnement algébrique de l'élève ?

Les résultats de ce travail de recherche pourraient être considérés pour l'implémentation des caractéristiques dans des interfaces collaboratives pour l'accès visuel et non visuel aux mathématiques.

1.3 Organisation de la thèse

Ce document est organisé en trois parties. Dans la première partie on fait la description des aspects qui interviennent dans le processus d'apprentissage de l'algèbre, ainsi que les modalités de représentation de la notation mathématique :

Le Chapitre 2 porte sur les aspects cognitifs de l'apprentissage de l'algèbre, tels que la compréhension et la résolution d'expressions.

Le Chapitre 3 décrit les caractéristiques des différentes modalités de représentation d'expressions, visuelle et non visuelle.

Le Chapitre 4 expose les outils actuels de support informatique, ceux dirigés vers le grand public, ainsi que les logiciels spécifiques pour les utilisateurs non voyants.

Dans la deuxième partie on rapporte le développement de l'interface, dont on considère les principes de la conception centré sur l'utilisateur, ainsi que les aspects cognitifs et didactiques discutés dans la première partie :

Le Chapitre 5 décrit des analyses de besoins des élèves et des enseignants de mathématiques par rapport à leur stratégie de résolution et leurs actions pour l'exécuter.

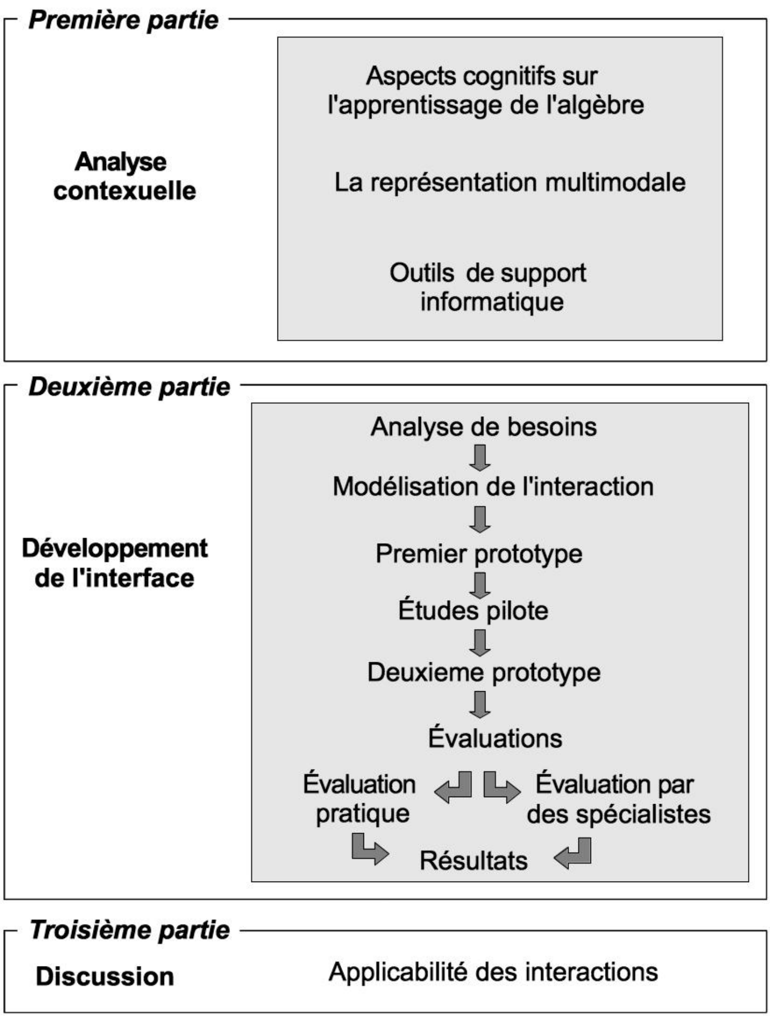


Figure 1.1 – Organisation de la thèse.

Dans le Chapitre 6 on présente la modélisation des interactions qui vont supporter les intentions des utilisateurs dans l'interface, ainsi que leur représentation multimodale.

Le Chapitre 7 porte sur l'implémentation partielle des interactions dans un premier prototype, ainsi que l'évaluation par l'étude pilote avec des utilisateurs, dont les résultats ont servi à l'amélioration de l'interface.

Le Chapitre 8 détaille la finalisation d'implémentation dans un deuxième prototype, ainsi que l'évaluation de l'interface dans deux modalités :

1. une évaluation pratique afin de tester l'interface par rapport à la facilité d'écriture, lecture et résolution, et la communication entre l'élève et l'enseignant
2. une évaluation avec des enseignants de mathématiques spécialistes des élèves ayant une déficience visuelle, afin de vérifier la pertinence des interactions par rapport à leurs besoins. Les résultats suggèrent que les interactions proposés dans ce travail pourraient être prises en compte dans l'implémentation d'interfaces accessibles pour faire des mathématiques, afin qu'ils puissent être utilisés comme un outil de support dans une salle de classe intégrée.

La troisième partie discute des contributions de ce travail en les plaçant dans leur contexte. Le Chapitre 9 présente la discussion des résultats des évaluations de l'interface, ainsi qu'une réflexion sur les possibilités d'applicabilité des interactions proposés. Finalement, on présente dans le Chapitre 10 les conclusions de ce travail et les possibilités de continuation de la recherche.

Première partie

Analyse contextuelle

Chapitre 2

Aspects cognitifs sur l'apprentissage de l'algèbre

Sommaire

L'objectif d'un cours d'algèbre c'est de comprendre la relation entre diverses représentations mathématiques, verbales et graphiques incluses, afin de permettre la résolution de problèmes. La manipulation d'expressions en elle même n'est pas utile si l'élève ne peut pas les associer aux situations de la vie réelle [Anderson 2005].

Le processus d'apprentissage de l'algèbre a été décrit par [Heck 2001] : Quand un élève commence à apprendre l'algèbre, il y a un lien important avec l'arithmétique ; il commence à utiliser des lettres pour représenter des chiffres et des relations numériques. Une fois habitué à voir des lettres dans les formules, il apprend quelques règles pour les simplifier. Cependant, dans l'apprentissage des mathématiques à l'école, on fait souvent la différence entre les mots « formule » et « équation ». Par exemple, le rôle des lettres dans la formule $y = x + 1$ n'est pas le même que dans l'équation $y - x = 1$; dans la première, il y a une relation fonctionnelle entre la variable y qui dépend de l'autre variable, et dans la deuxième il y a une relation générale entre les inconnues. Pour les élèves il est important de distinguer entre les deux ; par contre, un mathématicien sait que $y = x + 1$ peut représenter également une équation qu'une forme abrégée de $x + 1$, ou bien le processus pour trouver la valeur de y à partir de la valeur de x. Après avoir travaillé avec d'expressions algébriques contenant des opérations arithmétiques, les élèves apprennent à voir une expression non seulement comme le processus d'un calcul, mais aussi comme le résultat du processus. Progressivement, les élèves apprennent à considérer les variables comme remplacements non seulement de chiffres, mais aussi d'expressions.

La réussite de l'acquisition des compétences planifiés pour un programme d'algèbre dépend en grande mesure des connaissances précédemment acquises par l'élève : arithmétique, représentation des fractions et interprétation syntaxique. Si un élève ne maîtrise pas ces connaissances, il aura des difficultés pour comprendre les concepts algébriques [Anderson 2005].

Durant le processus d'apprentissage les élèves doivent apprendre à distinguer les opérations correctes des incorrectes, mais aussi à considérer les erreurs comme une partie importante du processus. Ils doivent être conscients qu'ils vont faire des erreurs malgré leurs efforts, et que des méthodes susceptibles de les aider à surmonter leurs difficultés existent. La correction d'erreurs doit être considéré comme indispensable et non comme indésirable [Carry 1979].

Cependant, la compréhension des concepts par l'élève dépend en grande mesure de la façon dont le professeur les explique. Les travaux de recherche menés dans le domaine de l'apprentissage de l'algèbre montrent que les élèves font face à plusieurs types de difficultés pour comprendre les façons d'utiliser les lettres dans une expression. Les résultats des recherches rapportés en [Kieran 2007] montrent que les élèves prennent du temps à comprendre la mise en équations des problèmes en forme verbale, et à interpréter le symbole « $=$ » comme un symbole relationnel, et pas justement comme le symbole de « faire quelque chose ». La plupart d'élèves interprètent les lettres comme des inconnues, alors que seule une minorité les interprète comme des variables. Par exemple, dans une expérience précédente, menée par Küchemann en 1981, les participants ont trouvé difficile de répondre à la question « *Parmi* $2n$ *et* $n+2$*, quel expression est la plus large ?* », mais ils n'ont pas eu des difficultés avec des questions de la forme « *Si* $a+b=43$*, donc* $a+b+2=?$ ». Il est proposé que les élèves doivent apprendre à faire le rapport entre leur connaissance des inconnues et des variables dans des fonctions.

D'un autre côté, [Oksuz 2007] reporte que les élèves trouvent souvent difficile d'interpréter les fractions comme une division. Ils suggèrent que la compréhension de quotients dans les expressions algébriques dépendait en grande mesure de la compréhension de quotients arithmétiques, et que cette difficulté est le résultat d'enseigner la division exclusivement avec des noms entiers. Depuis ce principe, les élèves ne seront jamais familiarisés avec des divisions ayant un diviseur plus grand que le dividende, ce qui leur posera des problèmes dans le domaine des nombres rationnels.

Notre intention n'est pas de signaler les défauts de l'enseignement de l'algèbre, mais de faire noter que les difficultés d'interprétation et de compréhension des symboles et d'expressions sont en grande mesure liés à la façon d'enseigner les concepts.

2.1 Quelques mots sur la notation mathématique

La notation mathématique est utilisée pour représenter de façon abrégée des énoncés afin de faciliter son analyse. De plus, la représentation symbolique facilite les calculs et le raisonnement symbolique. Les puissances constituent un exemple évident : elles permettent non seulement d'économiser de l'espace, mais aussi de faciliter les calculs [Perelman 1936]. Par exemple, la masse du soleil en grammes est représenté par : 1983000000000000000000000000000000 ; une représentation plus convenable et moins susceptible d'erreurs dans la recopie et les calculs serait $1983 * 10^{30}$.

Depuis son apparition, la notation mathématique symbolique a subi de nombreux changements à travers le temps. Dans son Histoire des Notations Mathématiques, [Cajori 1993] décrit l'évolution de la notation mathématique et les différents aspects concernant la préférence pour un symbole sur un autre. Considérons les structures les plus courantes dans l'algèbre :

Puissances. Diophantus utilisait des symboles différents pour représenter x et x^2 : la lettre « s » suivi d'un apostrophe pour représenter x, et une figure géométrique suivi par y pour représenter x^2. Il n'utilisait aucun symbole pour indiquer la multiplication, et il indiquait l'addition par la juxtaposition de termes.

Bachet et Ferman utilisait la lettre « N » *(Numerus)* pour représenter x, « Q » *(Quadratus)* pour x^2, et « C » *(Cubus)* pour x^3. Par exemple, l'équation $x^2+5x = 24$ été écrite comme : $1Q+5N = 24$. Descartes préférait la notation aa au lieu de a^2 ; par contre, dans l'édition latine de 1649 de sa Géométrie il a utilisé x^2. Gauss préférait d'utiliser xx au lieu de x^2, et justifiait sa décision en se basant sur le fait que x^2 prends autant d'espace que xx, donc il ne représentait pas aucun avantage comme symbole.

Divisions et fractions. Leonardo de Pisa (Fibonacci) indiquait en 1202 qu'une fraction devait être écrite de la façon suivante : un nombre sur un autre séparés par une ligne horizontale, dont le numéro supérieur indique la partie ou les parts du numéro inférieur ; l'inférieur se nomme « dénominateur » et le supérieur « numérateur ». Pour Fibonacci, une division indiqué se représente de la même façon que une fraction. Le symbole de division « $\div$ » a été proposé par le Suisse Johann Heinrich Rahn en 1659 ; ce symbole avait été utilisé par d'autres pour indiquer la soustraction. Le symbole n'a pas eu du succès en Suisse mais il a été adopté en Grande Bretagne et aux États Unis. Leibniz suggère que parfois il n'est pas adéquat d'utiliser la notation fractionnaire pour indiquer une division ; en 1668, il propose les deux points (:), tandis que Simon Stevin utilisait la lettre « D », J. E. Gallimard la même lettre à l'envers « ᗡ » ; et en 1790 Da Cunha la lettre minuscule « d ».

Pour quelques auteurs de l'époque, une division indiquée est chose différente d'une raison géométrique, donc les symboles doivent pas être différents. En 1817, le mathématicien Allemand F. Schmeisser propose l'utilisation de « .. » pour indiquer la raison géométrique ; ce symbole avait été utilisé par quelques mathématiciens en Angleterre et aux États Unis. Schmeisser explique qu'auparavant, la raison géométrique avait été indiqué par un point $(a.b)$ mais le point indique l'opération de multiplication, donc Leibniz a proposé les deux points $(a : b)$; néanmoins, les deux points indiquent division, raison par laquelle ce symbole n'est pas convenable. Parfois la décision d'adopter un symbole sur un autre dépendait de raisons strictement pratiques. La préférence de la barre oblique « / » sur la forme $\frac{a}{b}$ était de nature typographique, puisque dans sa forme imprimée la première est présenté sur la même ligne de base, alors que la deuxième en utilise trois. Par contre, l'utilisation de la barre oblique dans les expressions complexes obligeait l'emploi de symboles additionnels pour indiquer la fin de la fraction.

Les symboles utilisés pour représenter les opérations algébriques que nous utilisons quotidiennement ont été proposés par des mathématiciens divers. La préférence pour un symbole sur un autre dépendait parfois de circonstances qui n'avaient aucun rapport avec sa pertinence, comme les amitiés du mathématicien ou la popularité d'un certain livre.

Parfois on donne trop d'importance à l'apparence des expressions par rapport à leur compréhension, spécifiquement au fait qu'elles sont représentées de façon bidimensionnelle. Néanmoins, soit de façon bidimensionnelle, soit de façon linéaire, le sens des expressions ne change pas. C'est le sens qui doit être saisi par l'observateur voyant et le non voyant.

2.2 La compréhension et la résolution d'expressions

La capacité de comprendre la structure syntaxique des expressions algébriques est indispensable pour la réussite de l'apprentissage de l'algèbre. Les transformations inhérentes à la résolution d'équations algébriques ne sont possibles qu'après une analyse syntaxique complète [Kirshner 1989].

Dans le modèle pour la compréhension de la signification cognitive des expressions mathématiques cité par [Ernest 1987], le processus de compréhension se déroule de la façon suivante : Premièrement, l'expression est explorée visuellement par le lecteur ; à partir de cette observation il forme une structure superficielle qui sert à vérifier si tous les symboles sont connus et si la longueur et la complexité sont gérables. Ensuite s'exécute le processus d'analyse syntaxique : le lecteur identifie l'opérateur principal à partir duquel l'arbre syntaxique sera formé ; celui ci est un processus itératif qui comprend le traitement de toutes les sous-expressions. Ensuite, la signification des opérateurs est récupérée de la mémoire à long terme. Par la suite, la représentation sémantique de la structure est formée et préparée, soit pour être transformée, ou bien juste comme un complément de la connaissance du sujet (voir figure 2.1).

Depuis ce modèle, la vue intervient dans l'exploration d'une expression afin de former une représentation superficielle dont le lecteur vérifie déjà s'il est possible d'en faire l'analyse syntaxique. Une visualisation persistante de l'expression est aussi nécessaire lors de la procédure d'analyse syntaxique.

Dans le cas des non voyants, l'exploration s'effectue normalement à partir d'une représentation braille ou audio ; le reste du modèle comprend des processus qui ne dépendent pas de la capacité visuelle, donc nous pouvons considérer qu'il peut servir de référence commune pour les voyants et les non voyants.

Selon [Nicotra 2010], afin de travailler l'algèbre l'élève doit premièrement construire une image mentale bidimensionnelle de l'expression à partir de son représentation linéaire en braille. Cependant, dans ce travail nous défendons que la compréhension est possible grâce à l'analyse syntaxique, non grâce à la bidimensionnalité, bien que cette dernière puisse représenter un avantage.

Concernant l'identification de la structure d'une expression, [Ranney 1987] pro-

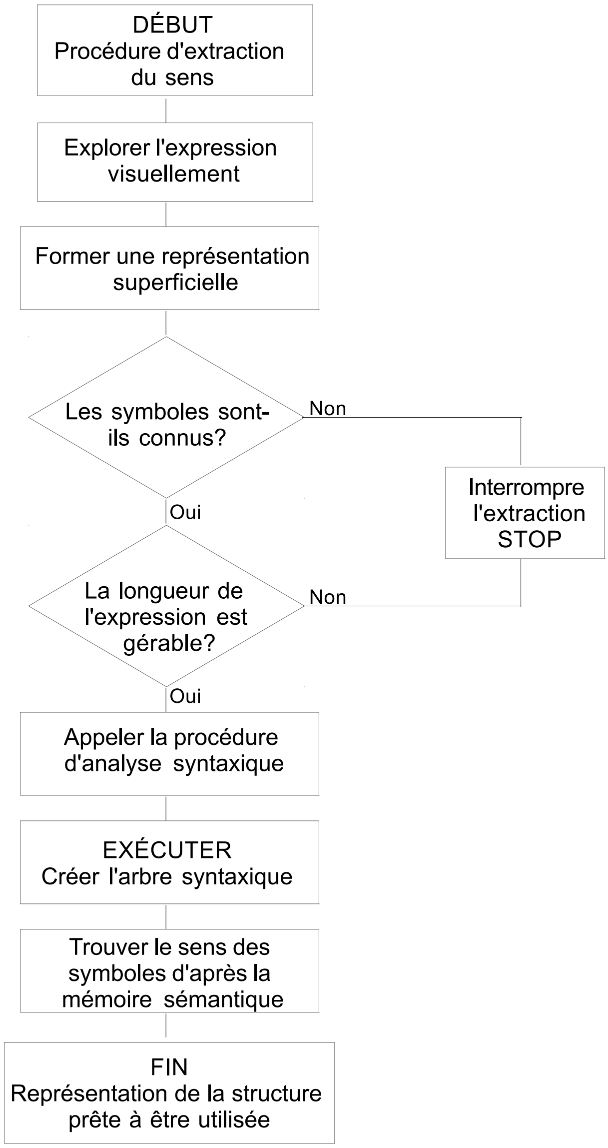


Figure 2.1 – Compréhension d'une expression selon [Ernest 1987].

pose un modèle de la perception d'expressions algébriques, dans lequel il est suggéré que les parenthèses et les opérateurs arithmétiques sont détectés en premier et les chiffres et variables en deuxième ; par contre, les premiers ne sont pas nécessairement identifiés complètement, ils sont peut être juste catégorisés. On pourrait dire que les operateurs servent le même fonction perceptuelle en algèbre que les espaces et traits d'union dans les textes littéraires.

Dans une expérience, [Stevens 1996] a trouvé qu'après la lecture d'une expression, la plupart des participants a récupéré les parenthèses, mais ils ont oublié presque complètement les contenus entre parenthèses. L'expérience de [Gillan 2004] a testé la précision des participants pour se rappeler des expressions après une observation courte. Dans leur expériences, les participants ont été capables de se rappeler plus facilement des chiffres et des opérateurs que des parenthèses. Selon [Gillan 2004], les parenthèses ne sont pas traités de la même manière que les chiffres et les opérateurs, parce qu'ils servent une fonction structurelle et pas sémantique. Ils suggèrent que les parenthèses aident à identifier la façon d'organiser une expression, mais ils ne fournissent aucun sens.

La lecture d'une expression algébrique peut se faire rapidement par la vue. L'accès aux termes est direct, et le lecteur peut aller, revenir et se concentrer dans certains termes de façon presque inconsciente.

Si bien la vue semble être le moyen le plus rapide pour lire une expression algébrique, il y a d'autres aspects importants liés à l'accès visuel. Selon [Kirshner 1989], il existe une correspondance entre la disposition visuelle et les catégories sémantiques d'une expression. Dans une expression il y a deux types de symboles de *parsing* : les symboles explicites comme les parenthèses, les crochets et les accolades, et les symboles implicites comme la position supérieure d'une puissance, signifiant un regroupement physique. Kirshner a identifié que l'ordre de précédence correspond aux caractéristiques visuelles, de telle façon qu'il est possible de interpréter les règles syntaxiques en termes positionnels plutôt qu'en termes propositionnels. Par exemple, le règle qui indique que les opérations d'haut niveau ont précédence sur celles de bas niveau signifie que les exposants et les radicaux précèdent la multiplication et la division. Visuellement, la même règle signifie que la juxtaposition diagonale a une précédence majeur que la juxtaposition horizontale ou verticale. Bien que la disposition positionnelle peut donner des indices immédiats sur la syntaxe, une compréhension correcte de la syntaxe propositionnelle est indispensable pour un apprentissage uniforme.

Depuis une expérience postérieure, [Kirshner 2004] a trouvé que les élèves qui commencent à apprendre l'algèbre profitent des caractéristiques visuelles des symboles. Très souvent, la perception erronée de la structure des équations provoque des erreurs dans l'application des règles de transformation. Kirshner suggère que les erreurs faites par des élèves sont souvent provoqués par la perception incorrecte des structures, et non à cause des erreurs dans la compréhension des règles de transformation. Quelques exemples des transformations correctes et incorrectes sont présentés dans le tableau 2.1. Prenons la troisième expression : Il est possible que l'expression erronée de la droite soit provoquée parce qu'en lisant $\frac{a+x}{b+x}$, l'élève a cru

Table 2.1 – Règles de transformation

Application correcte	**Application incorrecte**
$(a+b)c = ac + bc$	$(a+b)^c = a^c + b^c$
$\frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$	$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$
$\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}$

Table 2.2 – Saillance visuelle des équations

Visuellement Saillantes	**Visuellement Non saillantes**
$x(y+z) = xy + xz$	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$\frac{xy}{xz} = \frac{y}{z}$	$\frac{w}{x} \div \frac{y}{z} = \frac{wz}{xy}$
$\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$	$\frac{w}{x} + \frac{y}{z} = \frac{wz+xy}{xz}$

qu'il s'agit d'une expression de la forme $\frac{ax}{bx}$, dont il connaît l'application correcte de la règle.

La saillance visuelle consiste en la cohérence entre les membres droit et gauche d'une équation qui semblent naturellement liés, ce qui peut provoquer que l'élève sent qu'il n'est pas nécessaire d'en effectuer une analyse plus profonde. Les équations visuellement non saillantes demandent une analyse plus minutieux. Autrement dit, il y a des expressions dont leur transformation semble être évidente, et d'autres dont il ne le semble pas (voir le tableau 2.2). Kirshner a trouvé que les élèves peuvent reconnaître avec beaucoup plus de précision les équations visuellement saillantes que les non saillantes.

Les caractéristiques positionnelles de la notation algébrique peuvent aider à la perception visuelle de la structure d'une expression, mais la perception visuelle par elle même ne détermine pas l'interprétation sémantique correcte.

D'un autre côté, si bien l'apparence d'une expression écrite en noir peut tromper le lecteur, nous ne pouvons pas supposer que l'accès non visuel garantisse l'absence de ce type d'erreurs. La représentation braille, bien qu'elle permette l'accès immédiat par le toucher, ne compte pas sur les caractéristiques positionnelles des expressions écrites en noir. Par contre, il se peut que la perception par des différents modalités de représentation ne soit pas la seule source d'erreurs. D'un autre côté, l'évidente rapidité d'accès par la vue par rapport à l'accès braille peut nous faire soupçonner que les non voyants doivent forcement faire un analyse de façon plus consciente.

L'architecture ACT-R *(Adaptive Control of Thought-Rational)* [Anderson 2005] vise à comprendre les processus cognitifs qui interviennent dans la résolution des problèmes complexes, comme les équations algébriques. ACT-R est capable de modéliser le comportement cognitif humain, de le simuler et de le prédire. Le modèle suppose l'existence de deux types de connaissance : procédurale et déclarative. La connaissance déclarative est composé de faits, d'images et de sons ; la procédurale c'est la connaissance de savoir faire des choses. Les activités de résolution de problèmes impliquent une combinaison des deux types. Les éléments de la connaissance procédurale se nomment règles de production, qui indiquent les conditions dont ils peuvent être appliqués et les actions qui résultent de leur application [Ritter 2007].

Les modules qui interagissent pour la résolution algébrique sont [Anderson 2005] :

- Un module visuel pour percevoir une équation comme $3x - 5 = 7$.
- Un module d'état du problème (ou module imaginal) qui contient la représentation mentale actuelle du problème. Par exemple, la conversion de l'équation vers $3x = 12$.
- Un module de contrôle (ou module d'objectif), qui enregistre les intentions de la personne qui résoud le problème. Par exemple, l'isolement de l'inconnue.
- Un module déclaratif, qui extrait de l'information utile de la mémoire déclarative, comme le fait que $7 + 5 = 12$.
- Un module manuel qui produit la sortie, tel que $x = 4$.

La communication entre ces modules se produit grâce à un module de procédure, parfois appelé système de production (voir figure 2.2).

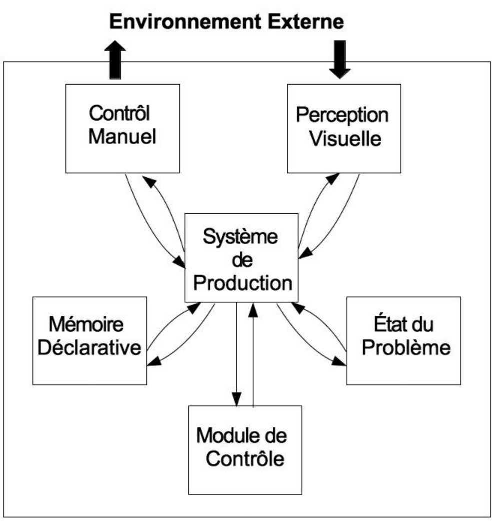


FIGURE 2.2 – Interconnections entre les modules de ACT-R [Anderson 2005].

Selon l'architecture ACT-R, les modules « opératifs » qui sont directement connectés avec l'environnement externe sont ceux de perception et de contrôle manuel. Le reste des modules appartiennent à des processus internes dépendant des connaissances de la personne qui effectue la résolution.

Les modèles de [Carry 1979] et [Anderson 2005] essaient de identifier les processus cognitifs impliqués dans la compréhension et la résolution d'équations algébriques. Bien que ces modèles se basent sur des théories cognitives, ils nous servent de référence pour identifier les aspects de perception et interaction qui interviennent dans notre domaine d'intérêt, afin de comprendre la relation entre l'accès visuel et non visuel lors de la compréhension et résolution d'équations algébriques.

2.3 La psychologie de résolution

Il est reconnu que la résolution d'équations linéaires peut être facilement identifiée et caractérisée [Anderson 2005]. Les expériences menés par [Carry 1979] pour analyser les stratégies de résolution parmi des étudiants d'université nous permettent d'observer non seulement les actions suivies par les participants, mais aussi les erreurs commises dans les protocoles écrits.

2.3.1 Stratégie de résolution

Les actions des participants des expériences de [Carry 1979] ont été classifiés selon de modèle de [Bundy 1975] pour la représentation computationnelle du raisonnement mathématique. Le modèle de Bundy n'est pas de type psychologique, mais il peut servir pour modéliser les actions des participants en résolvant des équations algébriques.

Les actions ont été organisées en trois étapes :

Attraction. L'organisation d'occurrences de l'inconnue de telle façon qu'elles puissent être simplifiés ultérieurement.
e.g. $3x + 1 = x + 2 \rightsquigarrow 3x - x = 2 - 1$

Collection. La simplification de l'équation en additionnant les termes semblables.
e.g. $3x - x = 2 - 1 \rightsquigarrow 2x = 1$

Isolement. L'enlèvement des termes qui entourent l'inconnue, dans le but de trouver sa valeur.
e.g. $2x = 1 \rightsquigarrow x = 1/2$

Afin de décider comment traiter une équation, l'élève doit connaître ses caractéristiques, par exemple le nombre d'occurrences de l'inconnue dans le dénominateur.

Les résultats ont montré que l'ordre des étapes variait en fonction de la stratégie suivie par le participant, et que le nombre de répétitions dépendait de son degré d'expertise. Les élèves plus expérimentés peuvent appliquer des opérateurs plus puissants afin de produire des solutions plus concises. Néanmoins, la quantité de lignes dépend aussi d'autres éléments, comme le nombre des pas exécutés mentalement. Traiter les fractions et éliminer les parenthèses font partie des actions prioritaires.

Voici quelques uns des exemples d'opérations mentionnés dans les protocoles des élèves :

- Trouver le dénominateur commun.
- Combiner les x.
- Mettre les variables d'un côté et les chiffres dans l'autre côté.
- Multiplier les deux côtés par ...
- Soustraire ... des deux côtés.
- Multiplier ce qu'il y a dans les parenthèses.
- Distribuer.

Les expériences ont montré que les élèves non seulement résolvent, mais qu'ils explorent, évaluent et vérifient. La vérification peut être effectuée de plusieurs façons :

- Aller dans les lignes précédentes pour vérifier l'exécution d'une opération.
- Exécuter l'opération inverse de ce qu'ils viennent de faire. Par exemple, vérifier une factorisation en multipliant les facteurs.
- Remplacer la réponse dans l'équation originale afin de vérifier si le résultat est une identité.
- Comparer les résultats de deux différents méthodes de résolution.

2.3.2 Analyse d'erreurs

[Carry 1979] ont catégorisé les erreurs en : erreurs d'opérateur, d'applicabilité et d'exécution, selon les intentions observées et parfois manifestés verbalement par les participants. Cependant, il est parfois difficile à les distinguer car il n'est pas toujours possible de savoir ce que l'élève essaie de faire.

Erreurs d'opérateur. Les erreurs d'opérateur (voir le tableau 2.3) peuvent être des erreurs résultant de l'élimination de termes par soustraction ou division des deux côtés, ou de simplification de quotients. Ils peuvent se produire également lors d'une transposition de termes, ou après une recombinaison quand l'addition et la multiplication sont interprétées comme une opération de combinaison entre eux. Les erreurs de combinaison des fractions se produisent quand les fractions sont additionnés ou multipliés.

Parmi ce type d'erreurs se trouvent également les erreurs de multiplication croisée, et même de séparation d'équations contenant des fractions où les numérateurs et les dénominateurs sont mis en nouvelles équations.

Erreurs d'applicabilité. Il s'agit des erreurs qui se produisent quand une opération correcte est appliquée à une équation qui ne satisfait pas les conditions d'application. Il peut être le résultat d'une reconnaissance erronée des conditions, ou d'une interprétation incorrecte de la syntaxe d'une expression (voir le tableau 2.4).

TABLE 2.3 – Erreurs d'Opérateur

Simplification de quotients
$\frac{x+ax}{a} \rightsquigarrow x+x$
$\frac{x-10}{x+5} \rightsquigarrow -2$
$\frac{2y}{y} \rightsquigarrow y$
Élimination de termes de deux côtés
$x^2 = 2x \rightsquigarrow x = 2$
$\frac{12x}{12} = \frac{x+12}{12} \rightsquigarrow x = x$
Soustraction
$x^2 - x \rightsquigarrow x$
$2yz - 2y \rightsquigarrow z$
Erreurs de Transposition
$28x - 11 = 12x - 3 \rightsquigarrow 40x = -14$
$12x - 24 = x - 12 \rightsquigarrow 12x + x = 24 + -12$
Erreurs de Recombinaison
$p + p \rightsquigarrow p^2$
$x^2 + (x+3) \rightsquigarrow 2x^2 + 3$
Erreurs de Combinaison de Fractions
$\frac{x}{1} + \frac{x+1}{2} \rightsquigarrow \frac{x+x+1}{2}$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \rightsquigarrow \frac{1}{x+y+z}$
Erreurs de Multiplication Croisée
$\frac{1}{2} = \frac{x-10}{x+5} \rightsquigarrow \frac{x+5}{2(x-10)}$
Erreurs de séparation de fractions
$\frac{5}{10} = \frac{x-10}{x+5} \rightsquigarrow \begin{array}{l} 5 = x - 10 \\ 10 = x + 5 \end{array}$
Erreurs d'Arithmétique
« *onze moins trois égal à neuf* »
$7(4x-1) \rightsquigarrow 21x - 7$

TABLE 2.4 – Erreurs d'Applicabilité

Erreurs de reconnaissance erronée de parenthèses
$x + 2(x + 6) \rightsquigarrow (x + 2)(x + 6)$
$x + 2(3x + 4) = x + 2 \rightsquigarrow 3x + 4 = 1$
$x + 2(x + 2(x + 2)) = x + 2 \rightsquigarrow x + 2(x^2 + 4x + 4) = x + 2 \rightsquigarrow x^2 + 4x + 4 = 1$

TABLE 2.5 – Erreurs d'Exécution

Erreurs de distribution
$2(x + 1) \rightsquigarrow 2x + 1$
$\left(\frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{2+x}\right) \rightsquigarrow \frac{8x}{2+x^2}$
Erreurs de signe dans une transposition
$2x + 3 = x^2 \rightsquigarrow 0 = x^2 - 2x + 3$
$5x + 25 = 10x - 100 \rightsquigarrow 5x = 10x - 75$
Erreurs de lecture ou d'écriture
$x + 2(x + 2) \rightsquigarrow x + 2 + 4$, depuis la vocalisation « $2x$ »
$3x = 2 \rightsquigarrow x = 3/2$

Erreurs d'exécution. Il peut s'agir d'erreurs d'exécution partielle résultant de l'exécution incomplète d'une opération correcte. Il est également possible qu'ils se produisent lors d'une exécution complète d'une opération incorrecte (voir le tableau 2.5). Parmi les erreurs d'exécution se trouvent les erreurs de contrôle ; il s'agit d'erreurs lors de la lecture ou l'écriture des termes, ou bien des défauts dans le suivi de l'exécution d'opérations correctes appliquées de façon correcte.

Les résultats des expériences montrent que les erreurs commises par un élève en particulier ne sont pas aléatoires, il a une tendance à faire d'erreurs d'un certain type. À mesure que les élèves deviennent plus expérimentés, les erreurs d'opérateur sont moins fréquentes tandis que le nombre d'erreurs d'exécution augmente.

Les erreurs d'opérateur semblent être le résultat d'une connaissance incorrecte de leur application, ou bien une connaissance insuffisante qui devient plus aiguë sous la pression de la résolution. La plupart des erreurs d'applicabilité résultent d'un traitement incorrecte de parenthèses, ce qui provoque que les termes de l'expression soient mal groupés. Ce type d'erreurs est courant même parmi les élèves plus compétents, donc il est peu probable qu'il s'agit d'erreurs provoqués par une compréhension incorrecte de la syntaxe d'une équation ; il semble être tout simplement que la disposition des parenthèses n'est pas assez saillant. L'idée de que certaines erreurs sont provoquées par une perception incorrecte liée à la saillance visuelle d'une expression plutôt que par une connaissance incorrecte des règles de transformation est suggérée également par [Kirshner 2004]. De façon similaire aux erreurs d'applicabilité, les erreurs d'exécution sont relativement courantes parmi les élèves compétents.

Ces résultats nous ont aidé à comprendre la résolution dans le contexte écrit, parmi des élèves voyants.

Chapitre 3

La représentation multimodale

Sommaire

3.1 Représentation visuelle

Le sens de la vue permet la perception immédiate de la structure, longueur et complexité d'une expression mathématique représentée de façon bidimensionnelle.

Il suffit d'une analyse superficielle de l'équation 3.1 au lecteur pour que celui se rende compte qu'il s'agit d'une fraction, et que le numérateur comme le dénominateur sont courts.

$$\frac{x+1}{x-1} \tag{3.1}$$

La perception de la disposition bidimensionnelle d'une expression peut également faciliter la résolution. Les enseignants profitent de cet avantage afin d'expliquer les transformations les plus courantes. Par exemple, dans la multiplication de fractions la méthode c'est de multiplier les numérateurs puis les dénominateurs de l'équation. Visuellement il y a une correspondance directe entre numérateurs et entre dénominateurs qui rend la transformation très simple. La réduction de facteurs est également évidente à la vue ; de plus, sur la feuille de papier, nous pouvons rayer au crayon les termes annulés afin de simplifier l'expression (voir l'équation 3.2).

$$\frac{3x}{x-2} \times \frac{x}{3} = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}(x-2)} = \frac{x^2}{x-2} \tag{3.2}$$

La division de fractions algébriques implique la multiplication du numérateur du premier terme et le dénominateur du deuxième, puis la multiplication du dénominateur du premier terme et le numérateur du deuxième. Comme précédemment,

Table 3.1 – Disposition de chiffres dans l'expérience de [Deslauriers 2008].

Horizontale	Verticale
$439 + 386$	$\begin{array}{r} 439 \\ +386 \end{array}$

la division devient une tâche facile quand on l'explique comme une « multiplication croisée » (voir équation 3.3). Cette expression peut également être ré-arrangée pour en faciliter le traitement : dans 3.4 la fraction qui divise est inversée afin de traiter l'expression comme une multiplication ; dans l'équation 3.5 l'expression est ré-arrangée sous la forme d'une fraction.

$$\frac{3y^2}{x+1} \div \frac{y}{2} = \frac{6y^2}{y(x+1)} = \frac{6y}{x+1} \tag{3.3}$$

$$\frac{3y^2}{x+1} \times \frac{2}{y} \tag{3.4}$$

$$\frac{\frac{3y^2}{x+1}}{\frac{y}{2}} \tag{3.5}$$

Une expérience menée par [Deslauriers 2008] a montré que la disposition verticale des chiffres dans une addition arithmétique en facilite la résolution par rapport à la disposition horizontale (tableau 3.1). Les résultats suggèrent que la présentation visuelle aide à la perception et peut rendre plus facile la résolution.

Une représentation linéaire d'expressions, même lorsqu'on y accède de façon visuelle, n'a pas autant d'avantages que la représentation bidimensionnelle. L'équation 3.6 est une représentation linéaire de l'équation 3.1. La perception de la structure n'est pas immédiate, il faut au lecteur une observation plus longue. De plus, cette représentation nécessite des caractères additionnels afin de prévenir tout problème d'ambigüité.

$$(x+1)/(x-1) \tag{3.6}$$

Parfois on appelle « représentation visuelle » la notation mathématique conventionnelle parce que c'est la modalité utilisée couramment par les voyants. Nous préférons le terme de notation ou représentation bidimensionnelle, par opposition à la représentation linéaire. Cette représentation bidimensionnelle facilite la compréhension et la résolution d'expressions mathématiques.

3.2 Représentation non visuelle

Représenter des expressions pour leur l'accès par les personnes non voyantes n'est pas une tâche facile. La conversion d'une structure bidimensionnelle vers une représentation non visuelle telle que le braille ou l'audio demande normalement sa linéarisation, et par conséquent l'utilisation d'information additionnelle pour décrire les termes [Edwards 1993, Bates 2010].

Selon [Awde 2008, Bates 2010], la conversion d'une expression bidimensionnelle est difficile parce que l'interprétation dépend de la connaissance de la disposition spatiale par le lecteur.

3.2.1 Audio

La parole est la forme la plus riche pour la communication non visuelle ; cependant, il a des limitations par rapport à la présentation d'information mathématique. La limitation principale vient de la nature éphémère de la parole, qu'elle partage avec tous les sons [Edwards 1993].

Quand un utilisateur voyant regarde une expression mathématique le contrôle est subconscient, le processus reste simple et sans effort mental. Par contre, le contrôle du flux d'information dont a besoin un utilisateur non voyant perturbe la lecture et implique une charge cognitive additionnelle [Stevens 1994]. De plus, la représentation sous forme audio nécessite des indices spécifiques pour éviter les ambiguïtés.

Pour [Edwards 1993], le problème de l'adaptation non visuelle provient du fait qu'aucun des autres sens n'a autant de bande passante que la vision À première vue une personne voyante peut saisir la longueur et complexité d'une expression, et contrôler le flux d'information de façon immédiate. Dans la représentation auditive de la notation algébrique il est souhaitable de remplacer ces caractéristiques autant que possible. Il ne suffit pas d'énoncer linéairement l'expression, mais le lecteur doit avoir la possibilité de contrôler l'analyse de l'expression, et de décider comment la lire. Au niveau de l'adaptation existent deux problèmes : elle doit offrir au lecteur l'accès à toute l'information disponible visuellement, et elle doit lui donner la possibilité de contrôler un tel accès.

Comme proposé par [Nemeth 1995], les lecteurs non voyants doivent avoir la même information disponible pour les voyants. Les voyants se forment une orientation mentale immédiate de la nature de la notation avec laquelle ils travaillent. Des aspects comme le niveau de complexité d'une expression sont importants ; rappelons nous de l'importance de l'analyse de l'expression afin de détecter la complexité et les possibles opérateurs inconnus [Ernest 1987].

D'un autre côté, de même que l'économie des symboles aide à la mémoire, une économie des symboles audio est souhaitable. Selon [Bates 2010], lorsqu'un utilisateur travaille des contenus mathématiques de façon non visuelle, la charge cognitive augmente parce qu'il doit garder l'information structurelle en mémoire. Par conséquent, la méthode de représentation de la structure spatiale d'une expression doit être le plus facile possible à traiter cognitivement. Ils suggèrent que l'utilisation d'information auditive additionnelle est une question incontournable puisque il est nécessaire de décrire les propriétés de l'expression par rapport à la résolution spatiale. Ainsi, la description auditive doit résoudre l'ambiguïté structurelle d'une façon efficace.

Selon [Nemeth 1995, Stevens 1996] la lecture audio ne doit pas faire d'interprétation sémantique, de la même façon que la notation écrite en noir n'en fait pas. Dans le protocole de lecture de Nemeth, les chiffres et les lettres sont lus individuellement. Par exemple, 15 ne se lit pas comme « *quinze* », mais comme « *un, cinq* » ; « *sin* » n'est pas « *sin* » mais « *s, i, n* ».

3.2.1.1 Communication de la structure syntaxique

De la même façon que la disposition de la notation écrite en noir permet de percevoir facilement la structure d'une expression, il est possible de faciliter la compréhension de façon auditive par l'utilisation des indices prosodiques, lexicaux, *earcons* et *spearcons*.

La prosodie est la façon d'énoncer une expression en utilisant des caractéristiques qui ne font pas partie du contenu mais qui facilitent leur compréhension et communiquent une intention. L'intonation, l'inflexion, les pauses, le ton et le volume sont des composants de la prosodie.

Les *earcons* sont des sons abstraits qui peuvent être utilisés pour représenter des événements dans un système. Les *spearcons* sont une combinaison d'*earcons* et d'éléments verbaux. Ils peuvent être pertinents pour représenter des éléments structurels comme les parenthèses et les fractions [Bates 2010].

Le protocole de lecture de Stevens fait la différence entre structures simples et complexes. Par exemple, une fraction simple contient un seul terme dans le numérateur et un seule terme dans le dénominateur, comme $\frac{1}{2}$. Une fraction complexe a plus d'un terme soit dans le numérateur, soit dans le dénominateur.

[Stevens 1996] utilise des indices lexicaux pour rendre la lecture plus compréhensible. Les structures complexes nécessitent des indices lexicaux pour prévenir l'ambiguïté, alors que les structures simples ne posent pas ce problème. Par exemple, l'expression $3(x + 4) = 7$ est lue : « *trois fois la quantité x plus quatre fin quantité égal à sept* ». Les indices « *quantité, fin quantité* » sont utilisés pour indiquer le début et la fin d'une sous-expression. Les puissances utilisent l'indice « *super, fin super* ».

Quand un groupe de parenthèses ou une fraction sont la base d'un exposant, les mots « *le tout* » s'ajoutait avant l'indice lexical « *super* » pour clarifier que l'exposant s'applique sur tout le groupe. Néanmoins, les tests ont montré que la présence de cet indice gênait la lecture, et il a été finalement enlevé de la lecture.

Les fractions étaient précédées par l'indice « *la fraction* », suivi par « *numérateur* ». Le début du dénominateur avec l'indice « *dénominateur* » servait pour indiquer aussi la fin de numérateur. Une fraction est terminée par « *fin fraction* » .

Par contre, [Nemeth 1995] propose que pour toutes les fractions, incluant celles du type $\frac{1}{2}$, s'utilisent les indices lexicaux « *B-frac* » et « *E-frac* » pour éviter l'ambiguïté.

L'utilisation des indices lexicaux, bien qu'effective, a des limitations. Puisque ces indices sont finalement des énonciations, ils ont parfois confondu le lecteur quand ils ont été présentés en combinaison avec les contenus. Dans le protocol de

TABLE 3.2 – Exemples de Protocoles de Lecture.

Expression	**Par [Nemeth 1995]**	**Par [Stevens 1996]**
$x^n + 1$	« *x sup n base plus* 1 »	« *x super n plus* 1 »
x^{n+1}	« *x sup n plus* 1 *base* »	« *x super n plus* 1 *fin super* »
$\frac{1}{2}$	« *B-frac* 1 *sur* 2 *E-frac* »	« 1 *sur* 2 »
$\frac{x+1}{x+2}$	« *B-frac x plus* 1 *sur x plus* 2 *E-frac* »	« *la fraction numérateur x plus* 1 *dénominateur x plus* 2 *fin fraction* »
$\sqrt{2}$	« *B-rad* 2 *E-rad* »	« *racine de* 2 »
$\sqrt{b^2 - 4ac}$	« *B-rad b sup* 2 *base moins* 4*ac E-rad* »	« *racine de la quantité b super* 2 *moins* 4*ac fin quantité* »

[Stevens 1996], devéloppé et testé en anglais, quelques problèmes ont été détectés pour différencier la lettre « *n* » (enoncé « *en* » en anglais) de la particule « *en* » qui fait partie du mot « *end* ».

Le tableau 3.2 présente les énoncés d'expressions simples et complexes selon les protocoles de [Nemeth 1995] et [Stevens 1996].

[Fitzpatrick 2006] propose un modèle prosodique basé sur les caractéristiques de la voix et le langage utilisé pour communiquer les contenus et pour prévenir l'ambiguïté de la structure. Ce modèle utilise les indices lexicaux proposés par [Nemeth 1995], qui produit des énoncés parfois plus longus, mais réduit les ambiguïtés de façon effective. Le modèle utilise des pauses de différentes durées pour indiquer l'ensemble de termes d'un exposant, les sous-expressions et les fractions, ainsi que des variations de la vitesse de lecture pour indiquer l'imbrication des sous-expressions ; les sous-expressions plus imbriqués sont lues plus rapidement.

[Doush 2009] optent par une représentation dépendant du contexte et de la complexité des expressions. Ils supposent que trop de verbosité auditive peux fatiguer le lecteur, et ils ont prévu l'utilisation de règles pour décider la façon de présenter les structures algébriques de façon auditive. Par exemple, dans le cas d'une fraction :

<audioMessage>
<rendering1>divided by</rendering1>
<startMsg>fraction</startMsg>
<endMsg>end fraction</endMsg>
</audioMessage>

Depuis les règles de décision, une fraction de la forme $\frac{1}{2}$ sera lue comme « *un sur deux* », et $\frac{x+1}{2*y}$ comme « *fraction x plus un divisé par deux fois y fin fraction* ».

Les indices prosodiques permettent d'établir des caractéristiques structurelles. D'ailleurs, depuis les tests menés par [Stevens 1996], les indices prosodiques ont été plus efficaces que les indices lexicaux pour communiquer la structure. Afin de comprendre la structure d'une expression, il ne suffit pas toujours de l'écouter à plusieurs reprises. Présenter l'expression de façon abstraite au lieu de la lire entièrement pourrait faciliter la compréhension [Karshmer 2002]. Dans cette représentation abstraite, les termes d'une expression complexe peuvent être représentés de façon plié, indiquant seulement qu'il y a un groupe contenant des sous-éléments. Cette modalité de présentation doit permettre la navigation interactive et la possibilité d'étendre les éléments complexes selon la demande de l'utilisateur.

3.2.1.2 Vue générale de l'expression

Une personne voyante peut se rendre compte de la complexité d'une expression par simple inspection, donc elle peut savoir immédiatement le type de notation avec laquelle elle travaille. Il est très important que la personne non voyante aie la même information en même temps que la personne voyante [Nemeth 1995].

Avoir une vue générale de l'expression pour connaître la structure aide le lecteur à planifier le processus de lecture. Selon [Stevens 1994], une vue générale doit être : 1) rapide, et 2) indiquer la longueur et la complexité. [Stevens 1994] a proposé un type de vue générale d'une expression en utilisant une sonification musicale *(earcons)*. Par exemple, un son de violon indiquait la présence des puissances, la flûte de pan représentait les fractions, le violoncelle indiquait la présence d'une sous-expression.

[Smith 2004] ont proposé l'utilisation du son au style des compteurs Geiger pour indiquer la taille d'un élément. Le son était un un clic qui était présent de façon continue, dont la fréquence variait selon la quantité des sous-éléments. Une fréquence haute indiquait que l'élément contenait plusieurs sous-éléments. Les résultats des tests ont indiqué que le son n'a pas été bien accepté par les participants, qui pour la plupart le trouvaient gênant et l'arrêtaient fréquemment. Cette caractéristique est restée comme optionnelle dans la lecture.

[Awde 2008] ont calculé la complexité des expressions en prennant compte la profondeur de l'arbre syntaxique, le nombre d'opérandes et d'opérateurs, et assignant des pondérations selon l'importance de chacun. Selon [Nemeth 1995], une fraction sans fractions subsidiaires est d'ordre 0. Par induction, une fraction d'ordre n a au moins une fraction subsidiaire d'ordre $n-1$. Une fraction d'ordre 1 peut être considérée comme complexe, et une d'ordre 2 est considérée comme hypercomplexe. Les fractions complexes sont courantes, les hypercomplexes sont rares, et les fractions des niveaux supérieures sont presque non existantes. Afin d'indiquer la présence d'une fraction complexe, [Nemeth 1995] utilise « *B-B-frac* », « *O-over* » et « *E-E-frac* » comme un type de bégaiement. Le début d'une fraction hypercomplexe s'indiquerait comme « *B-B-B-frac* ».

3.2.1.3 Contrôle de l'accès

Selon [Doush 2009], il existe 2 types de présentation de la lecture audio : la présentation passive et la présentation active. La présentation passive est la lecture séquentielle de droite à gauche. Elle peut être utile quand les expressions sont courtes et peu complexes. Dans la présentation active il existe la possibilité de naviguer de façon interactive dans la structure de l'arbre syntaxique de l'expression.

La lecture active est possible grâce au contrôle de l'interaction. La possibilité de fixer le regard sur les différentes parties de l'expression et de contrôler la granularité d'affichage pourraient faciliter la compréhension de la structure. La présentation par audio d'une expression nécessite également l'indication du terme actuel dans l'expression qui est décrite [Stevens 1996].

3.2.2 Braille mathématique

Selon Fernández del Campo [Fernández del Campo 1986], sans le sens de la vue, la voie la plus adéquate pour accéder aux mathématiques est le toucher. L'audio, étant le moyen le plus courant dans la communication, ne suffit pas pour compenser la manque de vue à cause de sa nature éphémère.

En utilisant les dispositifs actuels comme les afficheurs braille interactifs (ou plages braille), les élèves peuvent travailler de façon plus efficace qu'avec les machines Perkins ou le papier et le stylo. Selon [Nicotra 2010], afin d'utiliser une plage braille pour faire des maths l'élève doit avoir une ample connaissance du dispositif.

Grâce au braille mathématique les personnes non voyantes ont la possibilité d'écrire et de travailler avec la notation algébrique, et d'accéder aux documents de façon rapide.

La perception de la structure, par contre, demande d'un peu plus d'efforts à cause de la linéarité du code. En plus, la linéarisation a un impact sur la longueur du code. Par exemple, la représentation visuelle de l'expression 3.1 utilise 7 caractères, alors que la représentation linéaire en noir (voir expression 3.6) en nécessite 11 ; selon [Archambault 2009], la longueur de la représentation braille est de 17 symboles, mais il peut varier selon le code utilisé.

D'un autre côté, le braille a des inconvénients. Comme le braille le plus courant est le braille à 6 points, la quantité de caractères en noir qui peuvent se représenter avec un seul caractère braille est limitée. Cette contrainte oblige à utiliser 2 et parfois 3 caractères pour représenter un seul symbole, ce qui a un impact sur la longueur des expressions et par conséquent sur la complexité du travail de résolution.

Il y a d'autres limitations qui posent un problème lors de la communication avec d'autres personnes. L'un de ces problèmes c'est la communication entre un non voyant et un voyant. De la même façon que la plupart des personnes non voyantes n'est pas familiarisé avec l'écriture en noir, la plupart de personnes voyantes ne connaît pas le braille, ce qui rend impossible la communication écrite entre eux. L'autre problème c'est la diversité de codes mathématiques braille, qui rend difficile la communication entre non voyants n'ayant pas appris le même code. Voici quelques

Table 3.3 – Différences entre Codes Mathématiques Français, CMU (Espagne et Amérique Latine) et Nemeth (États Unis) respectivement.

1	2	3	4	5			
⠡	⠣	⠩	⠹	⠱	Français		
⠼⠁	⠼⠃	⠼⠉	⠼⠙	⠼⠑	CMU		
⠼⠂	⠆	⠒	⠲	⠢	Nemeth		
6	**7**	**8**	**9**	**0**			
⠫	⠻	⠳	⠪	⠼			
⠼⠋	⠼⠛	⠼⠓	⠼⠊	⠼⠚			
⠖	⠶	⠦	⠔	⠴			
+	**−**	**×**	**/**	**ˆ**	**√**	**=**	
⠖	⠤	⠔	⠌	⠈	⠜	⠶	
⠖	⠤	⠦	⠲	⠌	⠫⠱	⠶	
⠬	⠤	⠈⠡	⠸⠌	⠘	⠜	⠨⠅	
(	**)**	**[**	**]**	**{**	**}**	**Début bloc**	**Fin bloc**
⠦	⠴	⠷	⠾	⠨⠦	⠨⠴	⠰	⠆
⠣	⠜	⠷	⠾	⠐⠇	⠸⠂	⠢	⠔
⠷	⠾	⠈⠷	⠈⠾	⠨⠷	⠨⠾	⠀	⠀

exemples de codes mathématiques :

- Notation Mathématique Braille (révision 2007), réalisé par la Commission pour l'Évolution du Braille Français.
- Code Mathématique Unifié (CMU) *(Código Matemático Unificado)* , utilisé en Espagne et en Amérique Latine.
- Code Nemeth, réalisé par le mathématicien Abraham Nemeth, utilisé dans les États-Unis.
- Code Marburg, utilisé en l'Allemagne et en Autriche.
- Code Mathématique Braille, par le *Braille Authority of the United Kingdom*, utilisé au Royaume-Uni et en Irlande.

Le tableau 3.3 présente les différences entre les symboles les plus courants des codes mathématiques Français, CMU et Nemeth (chiffres, opérateurs courants et marques de blocs).

De plus, il existe des différences dans le traitement de certaines structures au sein du même code, qui n'existent pas dans d'autres ; par exemple, le CMU fait la différence entre la représentation de fractions composés des chiffres et celles composées

TABLE 3.4 – Représentation de Fractions.

	Code	Braille
$\frac{a+b}{c}$	Français	⠰⠁⠖⠃⠆⠌⠉
	CMU	⠢⠁⠖⠃⠔⠖⠉
	Nemeth	⠹⠁⠬⠃⠌⠉⠼

par des lettres, comme :

$\frac{1}{2}$, qui peut s'écrire ⠼⠂⠃, dont la fraction utilise un seul préfixe numérique, le numérateur se décale d'une ligne vers le bas, et le dénominateur se représente dans la position normale, et

$\frac{a}{b}$, qui s'écrit ⠁⠲⠉ en utilisant le symbole de division.

3.2.2.1 Représentation de la structure

Alors que dans l'écriture en noir c'est la disposition visuelle qui donne des indices sur la structure de l'expression (voir l'équation 3.1, page 23), les différents codes mathématiques braille utilisent des symboles additionnels pour indiquer le début et la fin de ces structures. Ces symboles auxiliaires en braille n'ont pas un équivalent en noir.

Le code Français et le CMU utilisent des délimiteurs de bloc pour grouper les termes complexes dans des fractions, puissances et racines. Le code Nemeth utilise un principe un peu différent : dans le cas de puissances, un exposant est terminé par le caractère de base ⠐ quand l'expression continue après l'exposant ; une racine est terminée par le caractère de fin de racine ⠻, et une fraction est délimitée par des symboles du début et de fin.

Le tableau 3.4 présente un exemple de représentation de fraction selon les codes Français, CMU et Nemeth. Le numérateur de la fraction consiste en trois éléments. Observez que dans les codes Français et CMU, c'est le numérateur qui nécessite les délimiteurs de début et de fin. Par contre, dans le code Nemeth, les délimiteurs se trouvent au début et à la fin de la fraction, et c'est le symbole de division qui indique la fin du numérateur.

Dans le code Nemeth, les fractions peuvent être représentées aussi de façon bidimensionnelle. Dans ce cas là, des délimiteurs de fraction sont utilisés selon la complexité, des espaces pour la disposition de termes, et une ligne de division qui compose d'une séquence de symboles ⠒⠒⠒ afin de séparer le numérateur du dénominateur.

Exemple :

$$\frac{a}{ab}$$

```
    ⠁
⠹⠒⠒⠒⠼
   ⠁⠃
```

De plus, le code Nemeth considère l'utilisation des symboles pour indiquer des éléments annulés, de façon équivalente à l'annulation en noir. Le début et la fin des termes annulés s'indique avec les symboles ⠪ et ⠻ respectivement.

Exemple :

$$\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}b}$$

```
  ⠪⠁⠻
⠹⠒⠒⠒⠼
 ⠪⠁⠻⠃
```

Néanmoins, normalement l'annulation de termes a pour but non seulement de « marquer » les termes traités, mais de rendre l'expression plus courte pour son traitement. En utilisant plus de caractères pour les termes annulés, l'expression devient forcement plus longue.

3.2.2.2 Vue générale de l'expression

Les codes mathématiques braille permettent de représenter la structure syntaxique des expressions mathématiques de façon efficace et d'y accéder rapidement par le toucher, mais la représentation en braille ne peut pas donner une vue générale équivalente à celle disponible de façon visuelle. Afin de percevoir la complexité il est nécessaire de parcourir l'expression complète. Néanmoins, il y a quelques indices dans la représentation mathématique braille qui peuvent faciliter l'analyse de l'expression. Par exemple, on peut se rendre compte qu'une fraction est complexe par la concentration des délimiteurs de bloc dans les codes Français et CMU. Le code Nemeth fait la différence entre les fractions simples, complexes et hypercomplexes. Les délimiteurs du début et de fin de fraction s'utilisent en combinaison d'un caractère complémentaire qui sert à indiquer la complexité de la fraction (voir le tableau 3.5). Le symbole de division dans ces fractions nécessite également des indicateurs de complexité.

En utilisant le même principe, la complexité d'une puissance est plus facile à appréhender dans le code Nemeth. Par exemple, dans l'expression n^{x^y} ⠝⠘⠭⠘⠘⠽, les deux symboles consécutifs qui précédent l'exposant y (le dernier symbole) indiquent qu'il s'agit d'un exposant imbriqué.

Table 3.5 – Complexité des fractions dans le code Nemeth.

Type de fraction	Début de fraction	Fin de fraction
Simple	⠹	⠼
Complexe	⠠⠹	⠠⠼
Hypercomplexe	⠠⠠⠹	⠠⠠⠼

3.2.2.3 Résolution

Même au niveau secondaire, les expressions peuvent être assez complexes en structure et résolution. Dans une étude de cas [Stöger 2004] ont esquissé le processus pour résoudre une équation en utilisant la plage braille. Les conclusions indiquent que les utilisateurs non voyants ont besoin de :

- Aller et venir continuellement entre la ligne en cours et la précédente.
- Retenir la position du curseur sur les lignes précédentes.
- Mémoriser les termes de référence.
- Mémoriser des résultats partiels qui seront ajoutés au résultat.
- Parcourir l'exercice à gauche et à droite du terme de référence.

La multiplication de fractions preséntée déjà dans l'exemple 3.2, page 23, présentée ci-dessous, devient un tâche assez complexe à réaliser en braille, alors que nous avons constaté que visuellement elle reste très simple.

$$\frac{3x}{x-2} \times \frac{x}{3} = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}(x-2)} = \frac{x^2}{x-2}$$

La résolution dans sa forme linéarisée est la suivante :

$$(3x)/(x-2) \times x/3 = (\cancel{3}x^2)/(\cancel{3}(x-2)) = x^2/(x-2) \tag{3.7}$$

La résolution équivalente en braille mathématique français est présentée ci-dessous :

⠰⠩⠭⠆⠌⠰⠭⠤⠣⠆⠔⠭⠌⠩⠶⠰⠩⠭⠈⠣⠆⠐
⠌⠰⠩⠦⠭⠤⠣⠴⠆⠶⠭⠈⠣⠌⠰⠭⠤⠣⠆

Rappelons-nous que la méthode de multiplication implique tout d'abord la multiplication de numérateurs, suivie par la multiplication de dénominateurs. Les difficultés par rapport à la représentation linéaire sont évidentes :

- En premier, la représentation linéaire ne permet pas la perception immédiate de numérateurs et dénominateurs, donc il est nécessaire de parcourir l'expression afin de les trouver.

- Une fois effectuée la multiplication de numérateurs ou dénominateurs, il faut les mémoriser afin de les écrire dans le résultat partiel. Dans l'accès visuel, la visualisation persistante des facteurs et l'écriture du résultat est pratiquement simultanée.
- Une écriture ligne par ligne des étapes de résolution pourrait clarifier la lecture de la démarche en braille, mais il est nécessaire d'aller et revenir entre la ligne de traitement et la ligne de résultat partiel.
- L'annulation du facteur 3 dans le premier résultat partiel n'est pas facilement identifiable, et même s'il est identifié, ce n'est pas possible de le marquer comme annulé sur le braille dans la plupart des codes mathématiques..
- La représentation en braille français utilise un total de 41 caractères, tant que la bidimensionnelle utilise seulement 28.

3.3 Formats de fichier

Actuellement, les expressions peuvent être visualisés sur l'ordinateur dans sa façon bidimensionnelle en utilisant des logiciels de présentation basés sur des langages comme LaTeX, MathML et OpenMath.

3.3.1 LaTeX

LaTeX permet la composition de documents, y compris les contenus mathématiques. Le langage LaTeX est composé de commandes pour indiquer la structure des documents et la notation mathématique. La mise en page se fait de façon automatique à partir de la structure spécifiée par l'utilisateur. Afin de visualiser les documents dans leur forme conventionnelle il est nécessaire de compiler le code. Concernant la notation mathématique, LaTeX utilise une représentation linéaire qui se base sur des commandes pour indiquer le type de structure et ses paramètres, en utilisant des accolades comme délimiteurs de bloc. Les expressions sont écrites dans un environnement mathématique spécifié par l'utilisateur.

La multiplication de fractions de l'exemple 3.2, page 23 est représentée sur LaTeX de la façon suivante :

```
$ \frac{3x}{x-2}\times\frac{x}{3}=\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}
(x-2)}=\frac{x^2}{x-2} $
```

En plus de l'inconvénient de la linéarisation, la représentation en LaTeX nécessite 69 caractères, ou bien 87 si nous voulons indiquer l'annulation de termes.

3.3.2 MathML

Alors que LaTeX est le format le plus courant pour la production de documents scientifiques complexes, MathML est le format le plus courant pour la présentation sur la Web.

Table 3.6 – Code MathML représentant l'expression $\frac{x^2}{4}$.

Présentation	**Contenu**
<math>	<math>
<mfrac>	<apply>
<msup>	<divide/>
<mi>x</mi>	<apply>
<mn>2</mn>	<power/>
</msup>	<ci>x</ci>
<mn>4</mn>	<cn>2</cn>
</mfrac>	</apply>
</math>	<cn>4</cn>
	</apply>
	</math>

Le langage de marquage MathML est basé sur le standard XML. Il existe deux modalités de représentation d'expressions :

- **MathML de Présentation**, qui se base sur l'affichage visuel. Les étiquettes de marquage concernent des chiffres *(<mn>)*, des identificateurs *(<mi>)*, des opérateurs *(<mo>)* et des structures pour organiser leur disposition *(<mrow>, <msup>, <mfrac>, <msqrt>)*. Leur structure est liée aux caractéristiques visuelles de l'expression.
- **MathML de Contenu**, qui s'occupe de la représentation sémantique plutôt que de l'affichage visuel. Les étiquettes de marquage concernent des fonctions *(<plus>, <times>, <power>)*, appliqués aux opérandes *(<ci>, <cn>)* par l'étiquette principale *(<apply>)*.

Un exemple d'expression représentée dans les 2 variantes du code MathML, de présentation et de contenu, est présenté dans le tableau 3.6.

Les formats de présentation sont adéquats por la représentation visuelle et pour l'accès non supervisé comme l'accès linéaire sur une plage braille. Cependant, la présentation auditive directe de ces formats pourrait induire l'utilisateur en erreur [Pontelli 2004].

La transcription du MathML de Présentation vers le braille rend accessibles les documents sur le Web aux non voyants qui utilisent une plage braille. Néanmoins, la flexibilité de représentation de certaines structures en MathML rend difficile la conversion ver les différents codes mathématiques. [Archambault 2006] ont proposé une représentation canonique du MathML afin de simplifier la transcription. Par exemple, l'expression dans le tableau 3.7 peut être codifiée selon la colonne de gauche ; il s'agit du code MathML valide qui permet l'affichage correcte de $(a + b)$, mais il ne transmet pas l'idée de groupement comme d'autres structures en bloc tels que les fractions et les exposants. Dans l'équivalent canonique la catégorisation entre structure et contenu es accordée dans le code sans modifier la présentation visuelle. Dans la représentation canonique, toutes les structures mathématiques ayant une même représentation braille ont également une représentation MathML unifiée.

Table 3.7 – Canonical MathML à partir du MathML de Présentation (en [Archambault 2006]).

$(a+b)$	
MathML Valide	**Canonical MathML**
<mo> (</mo> <mi> a </mi> <mo> + </mo> <mi> b </mi> <mo>) </mo>	<mrow> <mo> (</mo> <mrow> <mi> a </mi> <mo> + </mo> <mi> b </mi> </mrow> <mo>) </mo> </mrow>

3.3.3 OpenMath

OpenMath est un standard pour la représentation et la communication des objets mathématiques. À l'origine, le standard a été créé pour faciliter la communication d'objets mathématiques entre CAS *(Computer Algebra Systems)* [Kohlhase 2006].

OpenMath permet de décrire la sémantique des expressions mathématiques sous la forme d'objets. OpenMath possède une simple collection de constructions, et la définition des différents opérateurs est fournie de manière modulaire par une série de dictionnaires *(CD, Content Dictionaries)*, chacun de ces dictionnaires fournissant des définitions formelles et informelles de familles opérateurs [Pontelli 2004].

Les objets OpenMath peuvent être représentés sous une forme XML. Par exemple, la fonction $sin(x)$ est représentée de la façon suivante [1] :

```
<OMOBJ>
  <OMA>
    <OMS name="sin" cd="transc1"/>
    <OMV name="x"/>
  </OMA>
</OMOBJ>
```

Où l'étiquette <OMV> contient la variable x et <OMA> représente la fonction à appliquer, définie dans le dictionnaire « transc1 ».

OpenMath et MathML de contenu sont interopérables, de plus OpenMath peut être utilisé pour produire des documents en LaTeX ou en MathML de présentation.

1. http ://www.openmath.org

Chapitre 4

Outils de support informatique

Sommaire

Les outils de support constituent un aspect important pour la réussite des élèves non voyants intégrés dans une salle de classe ordinaire. Il existe des logiciels qui ont été conçus pour servir de support au processus d'enseignement-apprentissage tant au niveau de la production de contenus mathématiques qu'au niveau du travail sur ces contenus.

4.1 Logiciels grand public

Ce sont des logiciels disponibles pour éditer, afficher et travailler des contenus mathématiques. La plupart de ces outils présentent des problèmes de compatibilité avec les lecteurs d'écran et les plages braille, et par conséquent ils peuvent difficilement être utilisés par les non voyants.

4.1.1 Éditeurs

Les éditeurs de texte conventionnels incluent des éditeurs d'équations qui permettent l'insertion de contenus mathématiques comme un objet dans le texte. Néanmoins, la plupart des éditeurs ne sont pas accessibles aux lecteurs d'écran.

Dans l'éditeur de ***Microsoft Word***, *Microsoft Equation Editor* (figure 4.1), l'écriture de la notation mathématique se base sur la sélection de la structure à écrire à partir d'une boîte de dialogue, action qui nécessite l'utilisation de la souris. L'éditeur de ***LibreOffice*** permet également l'écriture linéaire dans une notation

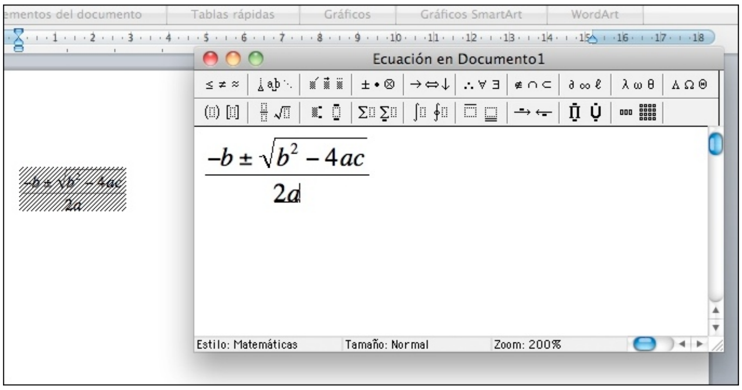


Figure 4.1 – *Microsoft Equation Editor.*

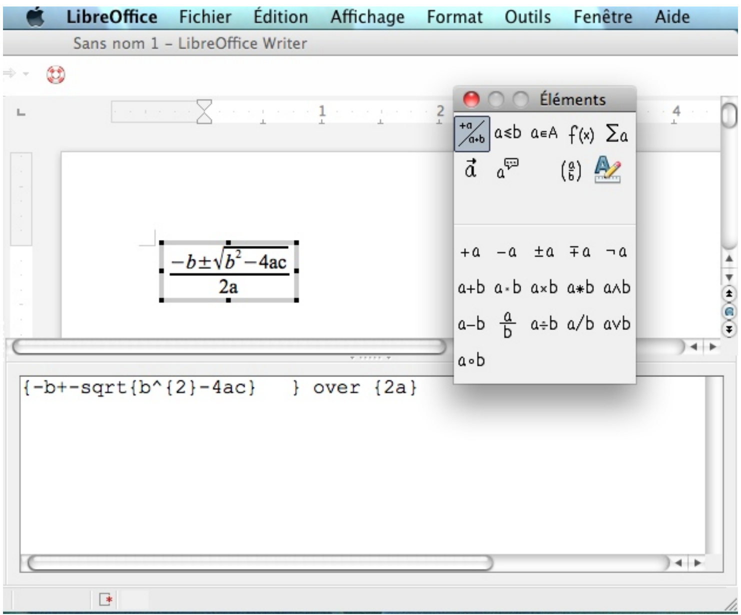


Figure 4.2 – Éditeur d'équations de *LibreOffice.*

similaire à LaTeX (figure 4.2). Dans ce dernier cas l'écriture linéaire est possible pour les élèves non voyants qui connaissent le code.

TexMathsEquations est une extension de *LibreOffice*, qui permet l'édition en LaTeX. Les équations sont insérées en format PNG ou SVG dans le texte (figure 4.3).

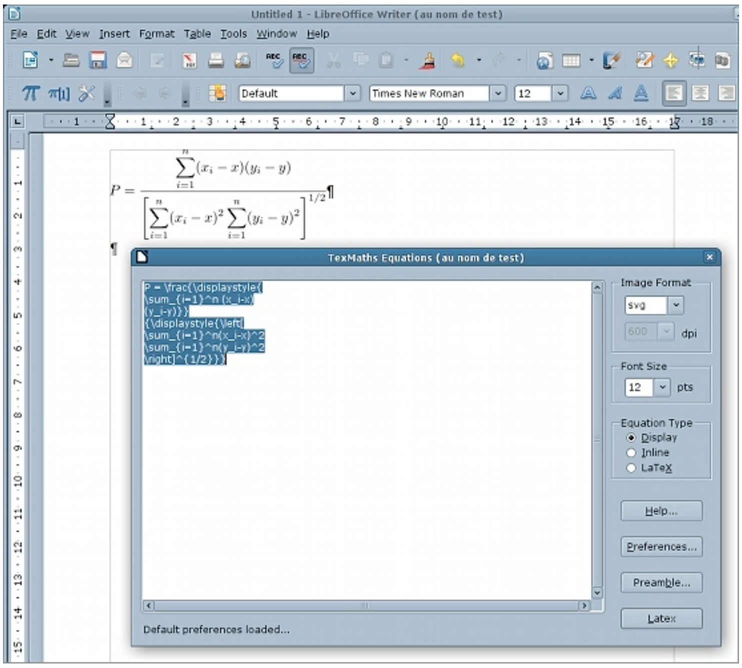


FIGURE 4.3 – TexMathsEquations for ***LibreOffice*** (en http://extensions.libreoffice.org/).

MathType [1] permet l'écriture à partir des sources diverses, tels que la sélection de structures, le code LaTeX, et l'écriture manuelle en utilisant la reconnaissance d'écriture de *Windows 7* (figure 4.4). *MathType* peut être installé comme extension de *Microsoft Word*.

MathTalk [2] permet la reconnaissance vocale d'expressions mathématiques en combinaison avec le logiciel *Dragon Naturally Speaking*. Les expressions sont sauvegardées en LaTeX et la conversion to Nemeth code est également possible.

4.1.2 Afficheurs

Les afficheurs permettent la représentation graphique de contenus mathématiques sur le Web depuis les formats MathML. L'édition de contenus n'est pas pos-

1. http://www.dessci.com/
2. http://www.mathtalk.com/

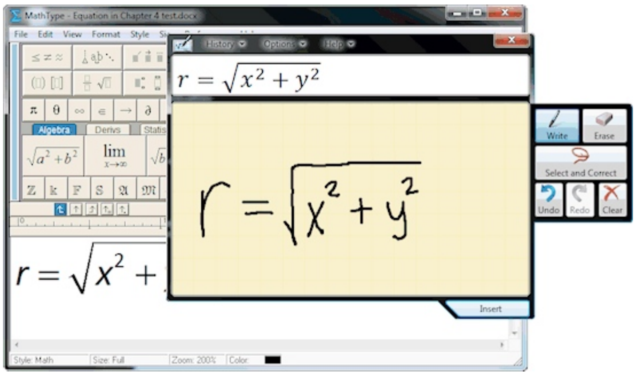


Figure 4.4 – Écriture sur *MathType*.

sible.

Les navigateurs basés sur le moteur Gecko (de Mozilla) dont en particulier *Firefox*, ainsi que *Safari* supportent l'affichage des contenus en MathML de façon native. Il existe des extensions qui rendent possible l'affichage dans des navigateurs différents, comme les 2 solutions suivantes, qui sont de natures différentes.

MathPlayer [Soiffer 2005] est une extension du navigateur Internet Explorer qui rend possible la visualisation de la notation mathématique dans ce navigateur. De plus, *MathPlayer* rend accessibles les contenus mathématiques aux non voyants à travers de la synthèse vocale. À partir du code MathML il produit une chaîne de caractères qui est envoyé au lecteur d'écran à travers MSAA *(Ms Active Accessibility Interface)*. La lecture active est également possible par la navigation dans l'arbre syntaxique de l'expression. Cependant, les capacités prosodiques de MathPlayer sont limitées.

MathJax est une afficheur de code source libre en *JavaScript* qui rend les contenus mathématiques écrits en LaTeX visibles sur les navigateurs Web, et permet de les copier pour les utiliser dans des éditeurs de texte. Il est compatible avec Internet Explorer, Firefox, Chrome, Safari, Opera, et les navigateurs sur iPad/iPhone/iTouch, Android et Symbian. Concernant les aspects d'accessibilité aux déficients visuels, *MathJax* rend les contenus accessibles aux lecteurs d'écran à travers la conversion du LaTeX vers MathML et l'utilisation de *MathPlayer*. Il est possible aussi de zoomer les expressions à grande échelle (figure 4.5).

4.1.3 Logiciels pour faire des mathématiques

Les outils de résolution ont des capacités qui vont au-delà de la représentation des expressions mathématiques ; ils permettent le travail actif sur des contenus mathématiques.

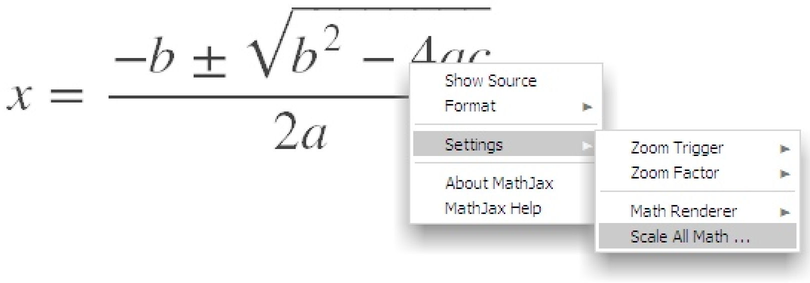


FIGURE 4.5 – Options d'affichage en échelle sur *MathJax*.

APLUSIX [Nicaud 1992] est un logiciel pour travailler l'algèbre, destiné aux voyants (figure 4.6). Il contient des exercices pour calculer, développer, réduire et factoriser des équations de premier et deuxième degré, et des inéquations de premier degré. La sélection de termes s'effectue avec la souris, et la résolution s'effectue par la duplication et l'édition des expressions. Il permet à l'élève d'explorer différents stratégies de solution, efficaces ou non, mais il ne permet pas d'erreurs dans l'application des règles de transformation, et il donne du retour immédiat en cas d'écriture erronée. APLUSIX inclut un compagnon pour expliquer à l'élève les pas à suivre. Après l'explication, il présente la résolution développée.

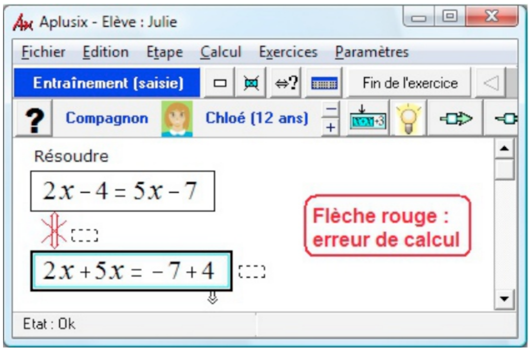


FIGURE 4.6 – Interface Aplusix.

PIXIE [Sleeman 1982] est un logiciel de tutorat qui porte sur les manipulations élémentaires pour la résolution d'équations du premier degré. Il est capable de diagnostiquer et de corriger les erreurs dans la demarche.

Algebra II Cognitive Tutor C'est un logiciel de tutorat développé depuis la théorie ACT-R (voir chapitre 2.2), qui part du principe que les compétences humaines peuvent être modélisés en règles de production. Le modèle cognitif du tuteur décrit en [Corbett 2000] considère les actions nécessaires pour la résolution correcte des expressions linéaires de la forme $ax + by = c$ depuis des problèmes de la vie réelle. Il permet de suivre la stratégie de solution des élèves en suggérant du retour sur leurs actions et leur offrant des conseils sur la résolution du problème (figure 4.7), jusqu'à la la réussite de l'exercice.

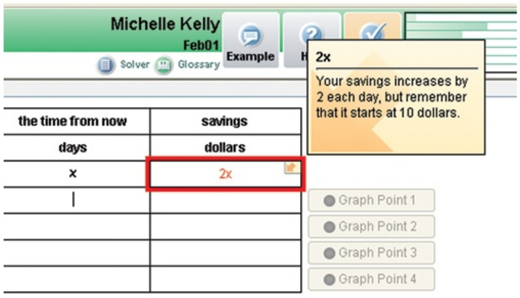


FIGURE 4.7 – Indices offerts à l'élève dans le *Algebra II Cognitive Tutor* (en `http://www.carnegielearning.com/`).

Computer Algebra Systems (CAS). Les CAS sont des logiciels qui fonctionnent comme des calculatrices symboliques. Ils sont utilisés surtout pour accélérer les calculs. Les CAS traditionnels ont été conçus pour les chercheurs, pas pour les étudiants. Ils exécutent la résolution automatiquement sans donner d'explication à l'utilisateur [Özgün Koca 2002].

Selon [Heid 2001], les rôles possibles des CAS dans l'enseignement de mathématiques sont :

1. De produire de résultats symboliques automatiques afin que l'élève se concentre sur les concepts.
2. De jouer un rôle d'assistant pour l'élève en fournissant des exemples afin qu'il identifie des *patterns* symboliques.
3. De servir de générateur de résultats pour des problèmes présentés en forme abstraite.
4. D'être un outil pédagogique pour créer des procédures symboliques afin d'assister aux élèves à développer des connaissances conceptuelles.

Avec des CAS il est possible d'évaluer, étendre et résoudre des exercices de mathématiques avancés. Voici quelques exemples de CAS : les logiciels gratuits ***Axiom*** (figure 4.8) et ***Sage*** , et les logiciels commerciaux ***Maple, MuPAD*** (maintenant intégré dans ***MATLAB***) et ***Mathematica***, qui est également capable de reconnaître l'écriture manuscrite (figure 4.9).

Le ***Symbolic Math Guide (SMG)*** [Özgün Koca 2002] est un CAS pour la calculatrice TI-92 de *Texas Instruments* ; les principes d'utilisation sont les mêmes que dans les CAS sur ordinateur. Le SMG a été conçu comme un outil de support à l'apprentissage ; il a été développé après un analyse de problèmes didactiques dans les

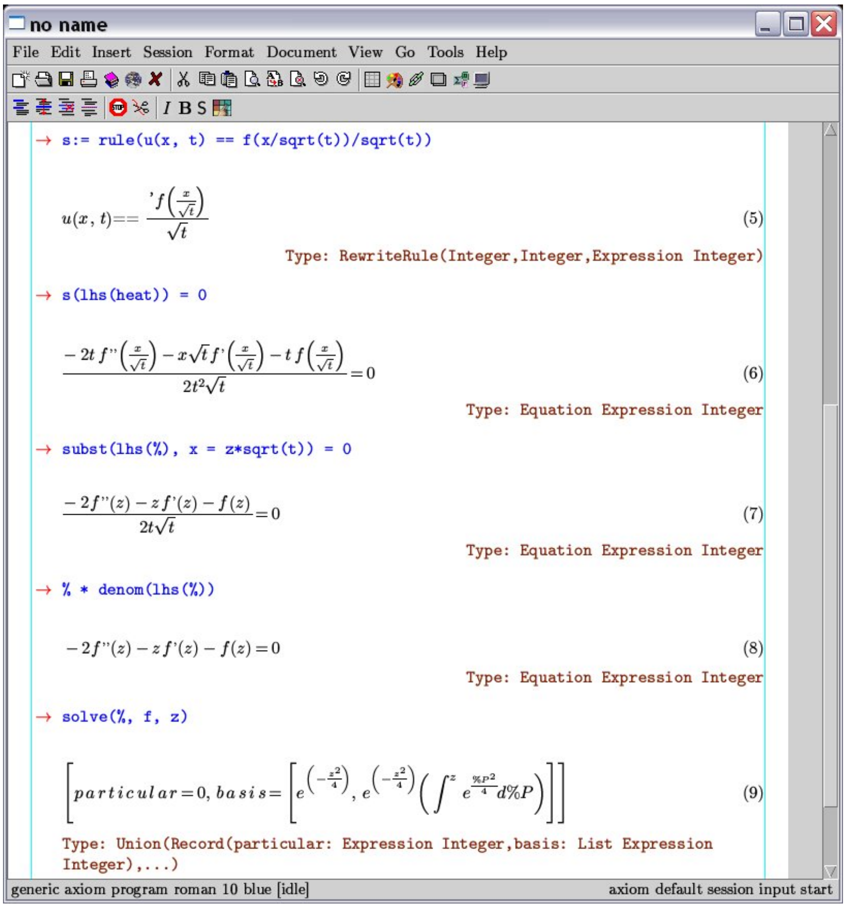


FIGURE 4.8 – Interface d'*Axiom* (en http://linux.softpedia.com/).

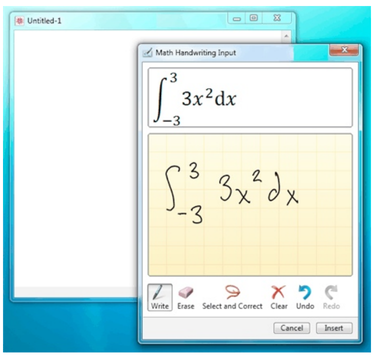


FIGURE 4.9 – Reconnaissance d'écriture sur *Mathematica* (en http://reference.wolfram.com/).

CAS conventionnels. Au lieu de calculer automatiquement des équations, il permet à l'élève de choisir toutes les transformations possibles depuis des boîtes de dialogue (figure 4.10). Il est également possible de donner du retour sur les transformations effectués.

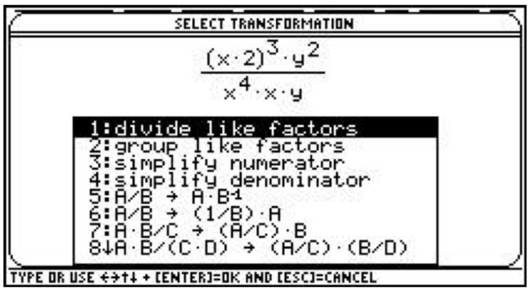


FIGURE 4.10 – Interface *Symbolic Math Guide (SMG)* de la calculatrice TI-92 [Özgün Koca 2002] .

Selon [Artigue 2002, Monaghan 2007], les CAS ne sont pas recommandés comme outils de support à l'apprentissage car ils peuvent faire obstacle au développement du symbolisme algébrique.

4.2 Logiciels spécifiques

Il s'agit des outils destinés spécifiquement aux déficients visuels. Ils permettent l'accès et la facilitation de la compréhension du travail mathématique.

4.2.1 Outils d'accès

Les outils d'accès permettent de produire et de transcrire des contenus mathématiques vers différents formats et codes braille mathématiques, ou bien de produire une sortie auditive.

NAT Braille est un logiciel spécialisé de transcription de documents à partir de sources différentes (OpenOffice, MathML, HTML) vers le braille français intégral ou abrégé. Au lieu d'utiliser un dictionnaire, NAT Braillle utilise une collection de règles et paramètres afin de personnaliser la transcription selon le profil du lecteur [Mascret 2012].

DotsPlus Braille [Gardner 2009] est un logiciel permettant de créer une représentation braille/graphique dans laquelle la structure bidimensionnelle est représentée de façon graphique (barres de fractions, symboles racine, position des exposants et des indices, parenthèses), de même que les opérateurs, alors que les symboles alphanumériques dont transcrits en braille. Il fonctionne avec les embosseuses graphiques ViewPlus©(voir figure 4.11).

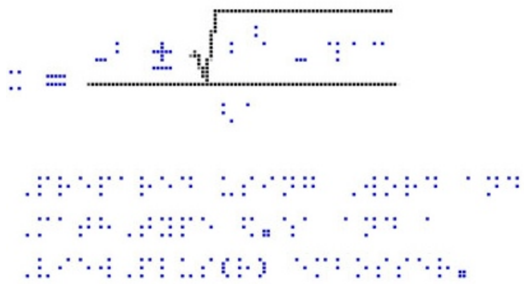


FIGURE 4.11 – Fragment de page embossée depuis le traitement avec DotsPlus.

Pour faciliter l'accès aux études supérieures de mathématiques, quelques projets utilisent une source LaTeX pour la transcription vers le braille ou la représentation auditive. **LaBraDooR** *(LaTeX-to-Braille-Door)* [Miesenberger 1998] permet la transcription vers le code Marburg ; le projet **LaTeX-access** [Irving 2007] permet la transcription vers le code Nemeth.

Word-To-Daisy est une extension qui permet de créer des documents Daisy dans lesquels les contenus mathématiques sont sauvegardées en MathML selon l'extension MathDaisy. De même, l'extension odt2daisy permet la même procedure à partir de OpenOffice [Archambault 2011].

4.2.2 Outils de compréhension

Ces logiciels facilitent la compréhension de la structure d'expressions par la lecture active. La représentation auditive est possible à travers des logiciels lecteurs d'écran tels que *JAWS (Job Access With Speech)* et *NVDA (Non Visual Desktop Access)* sur le système d'exploitation *Windows*, et *VoiceOver* sur *Macintosh*, ou bien par l'intégration de la synthèse vocale dans un logiciel propriétaire. Actuellement, les lecteurs d'écran conventionnels ne sont pas capables de produire une lecture correcte des expressions mathématiques, et dans la plupart de cas il est nécessaire d'utiliser des *scripts*, fragments de code qui modifient la sortie vocale selon les besoins du logiciel. Il tiennent aussi compte du contexte (e.g. mathématique).

ASTER ***(Audio System for Technical Reading)*** est un logiciel qui s'occupe de produire une sortie vocale pour des documents écrits dans les langages de la famille TeX([Raman 1994]). Aster permet la lecture de contenus en différents modalités selon la préférence de l'utilisateur, à travers des règles d'activation tels que : simple, descriptive, abstraite. Il est également possible de mettre des marques sur des éléments afin de retourner à leur position.

Maths Genie [Karshmer 2002] est un prototype de navigation d'expressions qui utilise la synthèse vocale et du braille pour communiquer la structure d'une équation. Il facilite la compréhension d'expressions en permettant aux utilisateurs de parcourir ses termes et d'étendre chaque terme dans les branches qui le composent. Il permet également de marquer les termes via le clavier, ainsi que de la façon vocale *(voicemarks)*. La version actuelle est disponible en Anglais, Français et Espagnol, et la sortie braille est aussi disponible dans le code Nemeth.

AudioMath [Ferreira 2004] est un navigateur auditif en portugais qui fait la conversion à partir du MathML vers une chaîne de texte, pour être lu par un synthétiseur vocal.

Le projet **PSLM** *(Programme Spécialisé de Lecture Mathématique à l'usage des non-voyants)* produit une sortie auditive en Français à partir d'une source LaTeX [Vari 2012]. Pour faciliter la lecture de contenus mathématiques sur le Web, **MathSpeak**[3] rajoute des étiquettes HTML/XML aux contenus afin de les rendre accessibles aux lecteurs d'écran.

4.2.3 Logiciels pour faire des mathématiques

Ils permettent de travailler avec des expression mathématiques en prenant en compte les besoins des personnes non voyantes. Ils permettent l'accès aux contenus, la navigation dans les expressions, la présentation et communication de contenus, et dans quelques cas la facilitation des calculs, qui sont les challenges pour assister les personnes dans leur travail en mathématiques [Miesenberger 2008].

Infty [Suzuki 2004] est un système pour l'accès et l'édition de contenus mathématiques. Infty est composé des logiciels :

InftyReader, un logiciel de reconnaissance optique de caractères *(OCR)* pour des expressions mathématiques.

InftyEditor, un éditeur mathématique qui permet la correction des contenus numérisés et la saisie bidimensionnelle d'expressions au clavier ou par reconnaissance d'écriture manuscrite.

Les logiciels utilisent une sortie auditive, ainsi que des outils de conversion vers LaTeX, MathML, HTML et braille.

LAMBDA ***(Linear Access to Mathematics for Braille Device and Audiosynthesis)*** est un système d'écriture linéaire de mathématiques conçu pour faciliter le travail des élèves non voyants et la communication avec les voyants (figure 4.12). Les expressions peuvent être saisies avec le clavier de l'ordinateur, un menu et une barre d'outils. LAMBDA utilise un code braille propriétaire à 8 points (figure 4.13), qui a été créé pour simplifier la conversion noir/braille, ainsi que la sortie

3. http://www.mathspeak.org/

audio [Schweikhardt 2006]. LAMBDA permet la visualisation linéaire d'expressions par l'utilisation de symboles graphiques, comme une police de caractère, représentant chaque signe Braille. Cette représentation est relativement facile à apprendre, beaucoup plus que le braille lui-même, même si ce n'est pas la forme habituelle pour les voyants et les malvoyants. La visualisation bidimensionnelle est possible de façon asynchrone, pourvue une syntaxe correcte de l'expression afin de permettre la correcte conversion vers MathML ; cette visualisation est statique et ne permet pas d'interaction. La manipulation dans LAMBDA consiste en éditer la notation mathématique propriétaire de façon similaire à l'édition de texte littéraire. De plus, quelques techniques de linéarisation des tableaux sont suggérés pour faciliter la division de polynômes et la résolution d'inéquations [Bernareggi 2010]. Des fonctions de manipulations de chaîne, telles que la suppression des espaces, apportent une aide réelle aux utilisateurs. Le principal défaut de LAMBDA reste l'utilisation d'un code specifique différent des codes brailles mathématiques nationaux, même si un effort a été fourni en utilisant pour chaque langue les mêmes symboles, autant que possible.

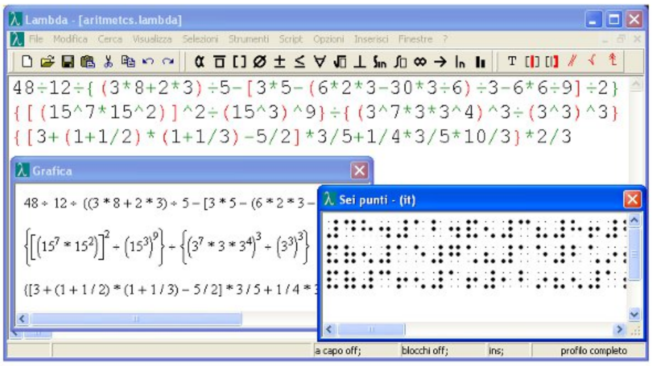


FIGURE 4.12 – Interface LAMBDA (en http://www.lambdaproject.org/).

MaWEn. Le projet MaWEn [Archambault 2007] consiste en un ensemble de prototypes destinés à étudier et validet différentes fonctionalités nécessaires pour le développement d'un environnement pour faciliter l'accès aux contenus mathématiques aux élèves non voyants. Les prototypes qui composent MaWEn permettent aux utilisateurs de parcourir les expressions, d'étendre et de replier ses branches, et de les présenter et de sélectionner d'une façon synchronisée pour les voyants et non-voyants en utilisant des sorties visuelles et braille synchronisées (voir figure 4.14). MaWEn supporte la conversion vers différents codes braille au travers de UMCL *(Universal Maths Conversion Library)* [Archambault 2004, Archambault 2005], une bibliothèque de programmation qui encapsule des modules pour la transcription vers des différents codes braille, afin de faciliter l'échange de documents entre les élèves braillistes de pays différents. UMCL utilise le MathML canonique comme format pivot, et fournit un convertisseur automatique de MathML vers MathML canonique

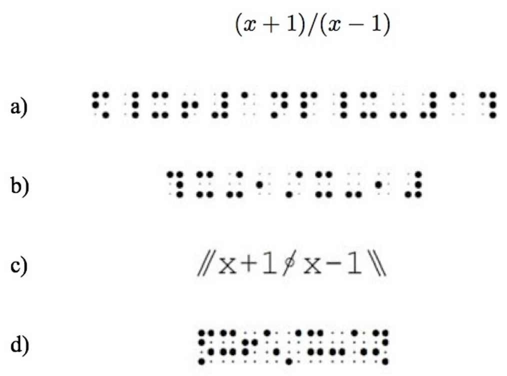


FIGURE 4.13 – Équation 3.1 dans sa forme linéare selon les codes mathématiques : a) Italien, b) Nemeth, c) LAMBDA textuel, et d) LAMBDA en code Italien (en [Bernareggi 2007]).

.

En ce qui concerne le travail avec les expressions au-delà de la lecture, *MaWEn* offre des assistants de manipulation et de simplification (voir figure 4.15) [Stöger 2004, Miesenberger 2008]. Afin de développer une distribution de facteurs de plusieurs termes, l'assistant présent automatiquement à l'élève les termes à multiplier, ce qui peut représenter un problème parce que c'est l'élève qui doit décider comment procéder. La simplification utilise une mémoire temporaire pour garder les termes de référence indiqués par l'utilisateur, puis copier le résultat partiel sur une nouvelle ligne.

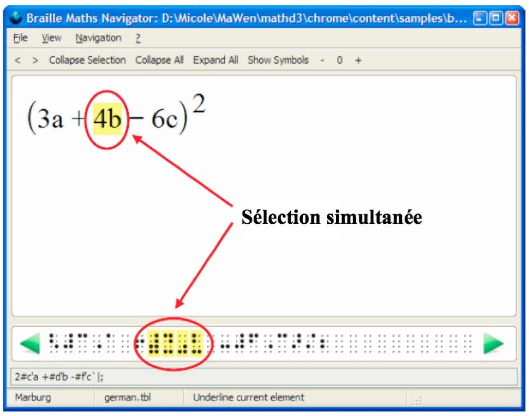


FIGURE 4.14 – Sélection simultanée dans l'interface MaWEn (en [Miesenberger 2008]).

SensoMath [Engelen 2011] est un logiciel développé par la compagnie Sensotec. Il facilite la saisie et la visualisation de contenus en braille vers noir et vice versa.

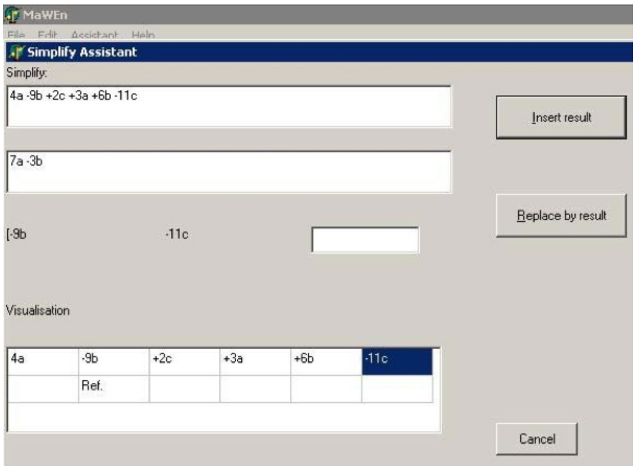


FIGURE 4.15 – Assistant de simplification de MaWEn (en [Miesenberger 2008]).

Le logiciel permet l'écriture braille depuis une plage braille et du clavier, aussi que l'écriture sur l'éditeur d'équations de *Microsoft Word* (voir figure 4.16).

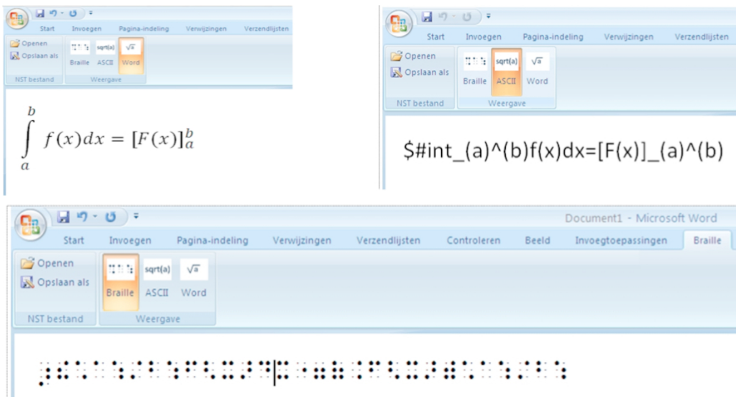


FIGURE 4.16 – Sensomath sur *Microsoft Word* (en [Engelen 2011]).

4.3 Aspects didactiques

Selon [Drijvers 2003], n'est pas un automatiquement un instrument utile. Le processus dans lequel un outil devient un instrument utile se nomme « genèse instrumentale », et il nécessite un investissement en temps et des efforts de l'utilisateur, qui doit identifier les tâches pour lesquelles l'outil est approprié. Dans la réussite d'un tel processus interviennent deux composants : technique et mental. La partie technique concerne les actions qu'une personne exécute sur l'ordinateur afin d'atteindre un objectif. En ce qui concerne l'utilisation d'outils informatiques, la partie mentale comprend les objets mathématiques impliqués, et l'image mentale de la résolution du problème ainsi que des actions disponibles sur l'ordinateur.

[Balacheff 1993] suggère que dans le cas de l'apprentissage assisté par l'ordinateur, les interactions disponibles dans un outil informatique jouent un rôle essentiel dans la construction de sens chez l'élève. Les interactions homme-machine dans les logiciels pour apprendre les mathématiques peuvent affecter positivement ou négativement la compréhension conceptuelle des étudiants [Drijvers 2005]. Selon [Heck 2001], les élèves risquent de construire des apprentissages incorrects à partir de la perception erronée occasionné par le comportement du système.

Depuis les études de [Artigue 2002, Monaghan 2007] ils est suggéré que les CAS peuvent poser des obstacles au développement du symbolisme algébrique des élèves. Dans plusieurs pays, comme la France, l'utilisation des CAS est permise mais n'est pas encouragée [Lagrange 2007].

[Artigue 2002] mentionne les problèmes des élèves pour identifier l'équivalence d'expressions quand elles sont écrites dans un CAS. Par exemple, le CAS originel de la calculatrice TI-92 exprime l'expression $x^3 - x$ comme $x.(x^2 - 1)$, et l'expression $(x^2 - 1)$ comme $(x + 1).(x - 1)$. Parfois le résultat de cette représentation simplifiée peut sembler très différent et il peut être difficile pour l'élève d'identifier les transformations qui ont été effectuées. En fait, le logiciel SMG a été développé depuis l'évidence que les CAS conventionnels exécutent automatiquement trop de pas pour les élèves qui commencent à apprendre l'algèbre [Özgün Koca 2002].

[Lagrange 2007] reporte quelques difficultés dans l'utilisation de CAS par les enseignants. Les problèmes concernent la réduction du temps d'accompagnement, ou les étudiants sont encouragés à réfléchir sur le problème mathématique en question, et le besoin d'utiliser des nouvelles techniques pour aborder les problèmes en face de la résolution automatique d'équations. Cependant, ces difficultés ne semblent pas être un problème d'outil, mais d'exploitation de l'outil chez les enseignants face à la nouveauté que représente son utilisation. En tout cas, l'outil ne devrait pas forcer un comportement chez l'enseignant ; c'est l'enseignant qui doit décider si un outil peut assister son processus d'enseignement-apprentissage et la façon dont il convient de l'utiliser.

Quand on utilise des outils informatiques pour l'enseignement, il est recommandé d'établir une relation entre les interactions dans l'outil, la conception mentale de l'étudiant, et le travail avec du papier et stylo, de telle façon que l'étudiant puisse les associer [Drijvers 2003]. D'un autre côté, [Heck 2001] recommande aux enseignants de s'assurer que les élèves acquièrent des compétences algébriques, et qu'ils comprennent dans quels circonstances les CAS peuvent être utiles.

[Özgün Koca 2010] a reporté les opinions d'enseignants concernant l'utilisation de trois méthodes d'utilisation de CAS : « boîte blanche » (figure 4.17), « boîte noire » (figure 4.18) et SMG (figure 4.10) ; ils concernent le degré de transparence dans la résolution par des CAS. Les méthodes « boîte blanche » et « boîte noire » ont été nommés selon les étapes dans l'apprentissage des mathématiques proposées par [Buchberger 1990]. Dans l'étape « boîte blanche » tous les pas dans la résolution doivent être étudiés en détail, alors que dans l'étape « boîte noire » quelques transformations automatiques peuvent être effectués par des CAS. Les résultats de l'étude de [Özgün Koca 2010] montrent que les enseignants ont préféré l'utilisation des méthodes « boîte blanche » et SMG sur la méthode « boîte noire ». Ils ont conclu que la méthode « boîte noire » peut être utilisée après que les élèves ont maîtrisé l'application des transformations, alors que les méthodes « boîte blanche » et SMG peuvent être utilisés pour l'enseignement de la manipulation symbolique. Ces résultats sont en concordance avec les principes proposés par [Buchberger 1990].

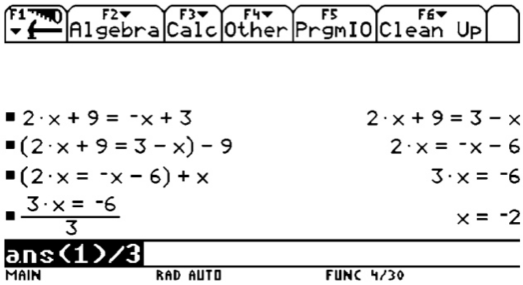


Figure 4.17 – Exemple de la méthode « boîte blanche » dans les CAS (en [Özgün Koca 2010]).

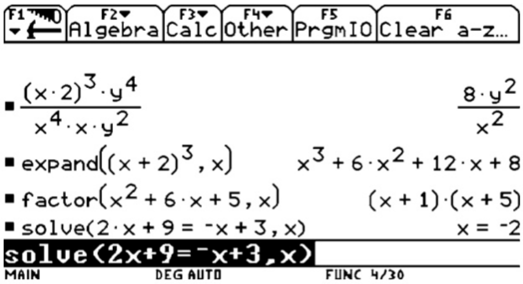


Figure 4.18 – Exemple de la méthode « boîte noire » dans les CAS (en [Özgün Koca 2010]).

Selon [Drijvers 2005] l'intégration des CAS dans l'éducation est plus difficile qu'il n'y paraît. L'idée que nous pouvons séparer les techniques de la compréhension conceptuelle est « *inadéquate et naïve* ». Il propose que les techniques disponibles dans un outil informatique et la compréhension de concepts évoluent de façon simultanée.

D'un autre côté, bien qu'il est considéré que la détection et la correction d'erreurs dans la démarche de résolution est une partie importante du processus d'apprentissage, [Carry 1979], la possibilité de faire des erreurs dans la transformation d'expressions n'est pas prévue dans certains logiciels. Par exemple, sur APLUSIX la sous expression $5x + 2x$ ne peut pas être extraite de l'expression $5x + 2x(x - 3)$, et la transformation $5 + 3x \rightsquigarrow 8x$ n'est pas possible. Par contre, sur PIXIE ces manipulations sont possibles, et par conséquent il est possible de prendre en compte les réussites et les échecs dues au manipulations de l'élève [Balacheff 1993].

4.4 Réflexion sur la problématique

Après avoir passé en revue les outils disponibles, et analysé les aspects didactiques impliqués dans leur utilisation, deux aspects nous paraissent fondamentaux dans le développement de notre travail.

Le premier c'est la pertinence d'un logiciel comme outil de support à l'enseignement-apprentissage. Alors qu'un logiciel de tutelle a pour but spécifique l'accompagnement de l'élève durant les différents étapes d'apprentissage, un CAS normalement sert aux propos scientifiques plus avancés, dont l'accélération des calculs est prioritaire et les algorithmes de résolution sont implémentés dans le système. Les logiciels ont été crées dans des buts différents, qui ne sont pas nécessairement des buts pédagogiques, et le seul fait qu'ils offrent des possibilités pour faire mathématiques ne suffit pas pour justifier leur utilisation dans la salle de cours.

Le deuxième aspect c'est l'accessibilité d'un outil aux utilisateurs concernés dans le processus. Si bien sûr il est important de considérer principalement l'accessibilité des logiciels grand public aux utilisateurs non voyants, nous devons également avoir conscience du fait que la représentation braille en soi n'est pas accessible aux voyants. Dans le cas de l'accessibilité des logiciels grand public aux non voyants, cet aspect ne concerne pas seulement l'accès par le lecteur d'écran, mais la possibilité de représenter, d'explorer et de résoudre de façon non visuelle les équations mathématiques sans impliquer l'utilisation d'une interface différente de celle des utilisateurs voyants. D'un autre côté, alors que les logiciels destinés aux non voyants facilitent la production et la communication de contenus, les aides à la résolution restent limitées.

La considération de ces aspects a motivé ce travail de recherche, qui porte sur l'analyse des modalités de représentation visuelle et non visuelle dans une interface partagée, afin de permettre aux élèves et aux enseignants de travailler avec des contenus mathématiques en utilisant leur modalité préférée de représentation, ainsi que de la façon pertinente de présenter les aides à la résolution, tout en prenant en compte les aspects cognitifs et didactiques d'implémentation.

À ce propos, nous avons développé un prototype d'interface qui nous a permis d'analyser les aspects de représentation et d'interaction visuelle et non visuelle qui pourraient faciliter le travail sur les contenus mathématiques.

Deuxième partie

Développement de l'interface

Chapitre 5

Analyse de besoins

Sommaire

Afin de développer l'interface nous avons suivi les principes de la conception centrée sur l'utilisateur, dans laquelle des élèves et des enseignants de mathématiques voyants, malvoyants et non voyants, autrement dit les utilisateurs potentiels, sont impliqués dans les étapes du développement.

En se basant sur l'analyse de livres scolaires, [Stöger 2006] suggèrent que les tâches les plus indispensables pour faire des mathématiques concernant l'algèbre essentielle sont :

- Multiplication de sommes dans des parenthèses, e.g. $(x-5)(2x+4)$
- Simplification d'une somme, e.g. $3x+7+x+2x-10$
- Résolution d'une équation linéaire, e.g. $x+3=2(x+4)$
- Multiplication et division de polynômes, e.g. $(3x-2)(x^2-5x+2)$
- Manipulation de fractions
- Résolution des systèmes d'équations linéaires
- Opérations avec vecteurs et matrices

Nous avons mené des expériences avec des participants voyants et non voyants en leur proposant des tâches de résolution d'équations linéaires, afin d'observer leurs intentions lors de leur travail. Les résultats nous ont aidé à concevoir le type d'interactions nécessaires dans une interface multimodale d'assistance à l'apprentissage qui facilite la communication et la collaboration entre voyants et non voyants.

Selon les travaux de [Carry 1979], la résolution d'une équation linéaire implique l'exécution des étapes de *Collection, Attraction* et *Isolement*. Bien que les participants des expériences de [Carry 1979] étaient des étudiants voyants, nous supposons que les étudiants non voyants suivent les mêmes étapes, car les transformations des équations dépendent de la tâche à réaliser, et le type et nombre d'opérations à appliquer dépendent de la capacité algébrique des étudiants. Dit autrement, nous n'attendons pas des différences significatives concernant les actions des étudiants voyants et non voyants.

5.1 Expérience

Les expériences ont pour but de découvrir et analyser :

- Les stratégies et les actions que les étudiants essayent de suivre lorsqu'ils résolvent des expressions.
- Les méthodes que les enseignants utilisent pour expliquer comment appliquer les transformations aux expressions.
- Les aspects qui rendent difficile la transformation des équations, et ceux qui peuvent provoquer des erreurs.
- Des éléments permettant de confirmer ou d'infirmer notre hypothèse selon laquelle la manipulation algébrique demande des actions similaires chez les voyants et les non voyants.

5.1.1 Participants

- 14 étudiants, dont 10 voyants et 4 non voyants. Les participants ont tous des notions d'algèbre. Il était important que les participants aient la connaissance de l'algèbre afin qu'ils puissent exécuter une stratégie de résolution à partir de laquelle nous puissions analyser leurs intentions.
- 4 enseignants de mathématiques, afin d'analyser leur explication de la résolution.

5.1.2 Tâches à réaliser

Nous voulons observer le traitement d'expressions concernant des tâches tels que :

1. Simplification de plusieurs termes.
2. Multiplication de monômes, binômes et polynômes.
3. Résolution d'une équation linéaire.

Les tâches impliquent additions, multiplications, divisions, annulation de termes et simplifications.

Les expressions utilisés dans les expériences sont :

$$2x + 3x + 4 + 5x^2 + 6 + x \tag{5.1}$$

$$(x + 5)(2x - 2) \tag{5.2}$$

$$(3a^2 + 2a + 7)(a + 5a - 4) \tag{5.3}$$

$$x + 2(x + 2(x + 2)) = x + 2 \tag{5.4}$$

L'expression 5.4 a été reprise des expériences de [Carry 1979]. Il s'agit d'une équation qui a posé des problèmes et provoqué des erreurs parmi les participants de leur expérience en raison de l'imbrication et de la ressemblance des termes. Une partie importante de notre travail concerne la compréhension de la structure des expressions mathématiques par les non voyants, et il nous a semblé intéressant d'observer les difficultés éventuellement rencontrées par ces derniers sur cette même équation, et de les comparer aux difficultées rapportées par [Carry 1979].

5.1.3 Protocole

L'expérience a été effectuée dans 2 modalités :

Orale. Les participants ont réalisé les tâches de façon non visuelle, aidés par l'observateur, qui a fonctionné comme une interface. L'observateur lisait les expressions de façon similaire à une synthèse vocale et en fonction de la demande du participant. Le participant indiquait les actions et les opérations à effectuer sur les termes, et demandait l'information qu'il considérait nécessaire pour effectuer la démarche. Dans le cas des enseignants, nous leur avons demandé d'exécuter la résolution comme s'il l'expliquaient aux élèves. Les participants étaient encouragés à extérioriser leurs questions et à faire des commentaires. L'avantage de ce protocole c'est que nous pouvons savoir explicitement ce que le participant essaie de faire ; l'inconvénient c'est que leurs indications verbales obstruent l'exécution des actions. Les participants ont effectué les exercices de façon individuelle, et les dialogues ont été enregistrés en audio pour leur transcription et leur analyse.

Écrite. Les étudiants voyants ont réalisé les exercices en utilisant un stylo et du papier. Les étudiants non voyants n'ont pas effectué pour raisons de manque de disponibilité du matériel.

5.1.4 Résultats

Dans la modalité orale, les dialogues des participants ont été examinés afin d'identifier les actions spécifiques qu'ils ont demandé d'exécuter. Dans la modalité écrite nous avons observé la stratégie, afin de trouver des différences possibles par rapport à la résolution dans la modalité non visuelle. Nous avons également cherché les différences possibles entre les intentions des participants voyants et non voyants dans des conditions non visuelles similaires, concernant les aspects de charge de mémoire et les types d'erreurs dans les deux modalités.

Les résultats sont présentés ci-dessous selon la tâche de résolution.

Expression (5.1). $2x + 3x + 4 + 5x^2 + 6 + x$ Cette expression implique la simplification de plusieurs termes de puissances différentes. Depuis la description de [Carry 1979] l'action nécessitée c'est la *collection*. Les actions demandés par les étudiants et les enseignants sont présentées sur les tableaux 5.1 et 5.2 respectivement.

TABLE 5.1 – Résultats de l'expression (5.1) des étudiants.

$2x + 3x + 4 + 5x^2 + 6 + x$	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	NV1	NV2	NV3	NV4
Trouver les termes semblables d'un certain exposant	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Organiser termes selon l'exposant	*	*				*					*			
Trouver les coefficients d'un certain exposant	*													
Combiner les termes d'un certain exposant	*	*		*							*			
Obtenir les termes non traités				*									*	*
Copier termes inchangés à la ligne suivante	*													
Erreurs dans la modalité orale			*							*				
Erreurs dans la modalité écrite			*		*						-	-	-	-

V1...V10 : Étudiants Voyants ; NV1...4 : Étudiants Non Voyants.

Table 5.2 – Résultats de l'expression (5.1) des enseignants.

$2x + 3x + 4 + 5x^2 + 6 + x$	E1	E2	E3	E4
Trouver les termes semblables d'un certain exposant	*	*	*	*
Organiser termes selon l'exposant	*		*	
Trouver les coefficients d'un certain exposant				*
Combiner les termes d'un certain exposant	*	*		*
Obtenir les termes non traités			*	
Obtenir les termes traités			*	
Erreurs dans la modalité orale				

E1... E4 : Enseignants de mathématiques.

Tous les participants ont identifié qu'il y avait des termes semblables dès leur première écoute de l'expression. Certaines d'entre eux ont eu besoin d'écouter l'expression une deuxième fois. Afin de simplifier, tous les participants ont exprimé l'intention de trouver les termes semblables d'un certain exposant. La plupart a opté pour demander les termes semblables, et le reste a demandé d'écouter l'expression plusieurs fois afin de les identifier eux mêmes.

Dans cet exercice, seulement 2 participants, tous deux voyants, ont fait erreur dans la modalité orale. L'un a été une erreur de signe et l'autre une omission d'un terme dans le résultat. Dans la modalité écrite, 2 participants voyants ont omis un terme dans le résultat.

Expression (5.2). $(x + 5)(2x - 2)$ Cette expression implique la multiplication de deux binômes dont l'un a un terme négatif, suivie par la simplification de plusieurs termes d'exposants différents. Les tâches impliqués sont la *distribution* et la *collection*. Les résultats des étudiants et des enseignants sont présentés sur les tableaux 5.3 et 5.4 respectivement.

TABLE 5.3 – Résultats de l'expression (5.2) des étudiants.

$(x+5)(2x-2)$	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	NV1	NV2	NV3	NV4
Distribution														
Obtenir facteur		*	*		*	*	*	*		*		*		
Obtenir un terme dans un facteur	*	*			*				*	*	*	*	*	
Obtenir paire de termes (de chaque facteur)													*	
Multiplier directement sans indiquer la distribution	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
Multiplier de manière abstraite en assignant des lettres aux termes													*	
Collection														
Trouver les termes semblables d'un certain exposant	*	*				*	*			*	*			
Combiner les termes d'un certain exposant											*		*	
Obtenir les termes non traités		*				*								
Copier termes inchangés à la ligne suivante	*	*												
Erreurs dans la modalité orale					*					*				x
Erreurs dans la modalité écrite					*				*		-	-	-	-

V1...V10 : Étudiants Voyants ; NV1...4 : Étudiants Non Voyants ; x : Abandon d'exercice.

Table 5.4 – Résultats de l'expression (5.2) des enseignants.

$(x+5)(2x-2)$	E1	E2	E3	E4
Distribution				
Obtenir facteur	*			*
Obtenir un terme dans un facteur	*			
Obtenir paire de termes (de chaque facteur)		*		
Multiplier directement sans indiquer la distribution		*	*	
Indiquer la distribution *terme*(facteur de plusieurs termes)*				*
Indiquer les produits de chaque distribution	*			*
Obtenir produits indiqués	*			
Collection				
Trouver les termes semblables d'un certain exposant	*	*	*	
Copier termes inchangés à la ligne suivante			*	
Erreurs dans la modalité orale				

E1...E4 : Enseignants de mathématiques.

Comme il s'agit d'une expression plus compliquée que la première, les actions et les préférences d'action commencent à se diversifier.

Afin d'effectuer la distribution, les étudiants ont demandé d'écouter les termes de référence plusieurs fois, soit par terme, soit par facteur, soit par pairs. Alors que la plupart des participants ont décidé de faire la multiplication directe entre les termes de binômes, seulement 2 participants indiquent par avance la distribution par rapport a la somme. En relation à la capacité de mémoire, nous n'avons pas observé des différences importantes entre les participants voyants et non-voyants ; la plupart des participants en général ont demandé plusieurs fois les termes de référence. Le participant NV3 a demandé de faire la multiplication de manière abstraite, en attribuant des lettres aux termes ; ce participant a demandé aussi à l'observateur de faire les calculs à sa place, et n'a pas demandé de vérifier les termes ou le résultat.

Après l'opération de distribution, la plupart des participants a vérifié le résultat partiel avant de procéder avec la simplification.

Lors de la simplification, les participants ont demandé les mêmes actions que dans l'expression 5.1, mais cette fois la plupart des participants a été capable d'identifier et de combiner les termes semblables en écoutant le résultat partiel au lieu de les demander explicitement, peut être parce que le résultat partiel était court. Il semble que le besoin de demander les termes semblables augmente avec le nombre de termes.

Il est intéressant d'observer que quelques participants ont exprimé le besoin d'actions complémentaires pour distinguer les termes traités des termes non traités. Deux participants ont demandé de récupérer les termes non traités, et deux autres ont demandé de copier ou de « passer » les termes non traités sur la ligne de résultat partiel.

Le taux d'erreurs dans la démarche de l'exercice reste faible. Deux participants ont fait erreur dans la modalité orale : l'une était d'arithmétique, et l'autre d'exécution en multipliant un terme qui ne correspondait pas ; le participant n'a pas demandé les termes de référence et il a multiplié $2*2x$ au lieu de $5*2x$. Dans la modalité écrite, il y avait une erreur d'arithmétique et l'autre d'écriture d'un exposant. En lui demandant comment il éviterait des fautes de frappe dans une interface, un des participants non-voyants a commenté que pour lui, la façon la plus sûre de ne pas en faire ce type de fautes c'est de copier-coller l'expression dans une nouvelle ligne, pour y faire les adaptations.

L'un des participants voyants a abandonné l'exercice en disant qu'il ne savait pas comment procéder.

Expression (5.3). $(3a^2 + 2a + 7)(a + 5a - 4)$ Cette expression est similaire à la précédente, sauf qu'il y a plus de termes dans les facteurs. Les termes du deuxième facteur peuvent être simplifiés afin de rendre le calcul plus court ; après la distribution la simplification implique l'élimination des termes quadratiques. Les actions que les étudiants et les enseignants ont demandé sont présentés sur les tableaux 5.5 et 5.6 respectivement.

Table 5.5 – Résultats de l'expression (5.3) des étudiants.

$(3a^2+2a+7)(a+5a-4)$	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	NV1	NV2	NV3	NV4
Distribution														
Obtenir facteur	*	*	*	*			*	*		*				
Obtenir un terme dans un facteur	*	*			*	*	*	*	*		*	*		
Obtenir paire de termes (de chaque facteur)	*	*						*				*		
Multiplier directement sans indiquer la distribution			*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	
Multiplier de manière abstraite en assignant des lettres aux termes													*	
Indiquer distribution *terme*(facteur de plusieurs termes)*	*	*												
Indiquer les produits de la distribution										*				
Obtenir produits indiqués										*				
Collection														
Trouver les termes semblables d'un certain exposant	*	*		*		*	*	*	*	*	*	*		
Organiser termes selon l'exposant											*	*		
Combiner les termes d'un certain exposant											*		*	
Obtenir le nombre de termes d'un facteur			*		*				*					
Obtenir le plus grande exposant de l'expression	*										*			
Trouver les coefficients d'un certain exposant	*								*					
Copier termes inchangés à la ligne suivante			*			*		*	*					
Simplifier le deuxième facteur (modalité orale)						*					*			
Simplifier le deuxième facteur (modalité écrite)						*					-	-	-	
Erreurs dans la modalité orale				*		*		*		x		*		x
Erreurs dans la modalité écrite				*			*			*	-	-	-	-

V1...V10 : Étudiants Voyants ; NV1...4 : Étudiants Non Voyants ; x : Abandon d'exercice.

TABLE 5.6 – Résultats de l'expression (5.3) des enseignants.

$(3a^2+2a+7)(a+5a-4)$	E1	E2	E3	E4
Distribution				
Obtenir facteur	*		*	*
Obtenir un terme dans un facteur		*	*	*
Obtenir paire de termes (de chaque facteur)	*	*		
Multiplier directement sans indiquer la distribution		*	*	
Indiquer la distribution *terme*(facteur de plusieurs termes)*				*
Indiquer les produits de la distribution	*			*
Obtenir produits indiqués	*			
Collection				
Trouver les termes semblables d'un certain exposant	*	*	*	
Obtenir le nombre de termes d'un facteur				*
Obtenir le plus grande exposant de l'expression	*			
Simplifier le deuxième facteur (modalité orale)	*		*	*
Erreurs dans la modalité orale	*		*	

E1...E4 : Enseignants de mathématiques.

Multiplier directement les termes continue a être la première option pour la plupart des participants, mais cette fois à l'oral nous pouvons observer que les demandes d'indiquer la distribution *terme*(facteur)* augmentent légèrement. Par contre, à l'écrit, aucun des étudiants ne l'indique. D'une façon similaire aux participants voyants, les participants non-voyants ont aussi eu besoin de demander plusieurs fois les termes et les facteurs concernant cette opération. Pour certains participants il est important de connaître le nombre des termes dans un facteur, surtout s'ils n'ont pas indiqué les produits.

Dans la modalité orale, seulement deux des étudiants, un voyant et un non voyant, ont remarqué que'il était possible de simplifier le deuxième facteur dès le début. Dans la modalité écrite, parmi les étudiants voyants, seulement celui qui avait fait la simplification à l'oral l'a fait à l'écrit. Concernant les enseignants, 3 sur 4 ont identifié et réalisé la simplification initiale.

L'incidence d'erreurs a augmenté dans cet exercice, dont la plupart ont été commises lors de la distribution. L'un des participants non-voyants à commenté : « *Il s'agit du même principe (que la multiplication de binômes), mais ceci est une équation très longue (...), telle équation est encore plus difficile puisque... c'est vachement difficile de s'assurer de ne pas manquer quelque terme... Le suivi de l'exercice peut représenter un défi* ».

Quatre participants ont fait erreur dans la modalité orale : parmi les voyants, les erreurs ont été d'arithmétique, de signe et d'exécution. Le participant non voyant a omis les termes quadratiques lors de la simplification. À l'écrit, les participants ont fait deux erreurs d'arithmétique et une d'écriture d'exposant. Les erreurs des professeurs à l'oral ont été d'arithmétique : « $-8a+42a=+36a$ », « $2*6=18$ ».

À l'écrit, les erreurs des étudiants sont : erreur de signe, erreur d'exposant, et le même erreur arithmétique qu'un professeur fit à l'oral : $-8a+42a=+36a$.

Dans la modalité orale nous avons remarqué que les participants ont trouvé difficile de repérer les termes de référence lors de la multiplication, ce qui a provoqué les erreurs d'exécution. Ce type d'erreurs n'a pas été fréquent dans la modalité écrite.

Deux participants, dont un voyant et un non voyant, ont abandonné l'exercice.

Expression (5.4). $x+2(x+2(x+2)) = x+2$ L'équation que nous avons considérée la plus compliquée implique la multiplication de facteurs imbriqués, la simplification de termes et l'isolement de x. Il est possible de rendre l'équation plus simple d'abord en annulant x des deux côtés. Les opérations impliqués sont *distribution, attraction, collection* et *isolement*. Les actions des étudiants et des enseignants sont présentées sur les tableaux 5.7 et 5.8 respectivement.

TABLE 5.7 – Résultats de l'expression (5.4) des étudiants.

$x+2(x+2(x+2)) = x+2$	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	NV1	NV2	NV3	NV4
Distribution														
Obtenir facteur						*					*			
Obtenir un terme dans un facteur	*				*	*				*				*
Obtenir paire de termes (de chaque facteur)	*													
Obtenir le nombre de parenthèses dans l'expression	*				*								*	*
Obtenir le terme qui multiplie un facteur	*													
Isoler la sous-expression à distribuer	*						*							
Multiplier directement sans indiquer la distribution	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Attraction														
Passer terme(s) à l'autre membre, en changeant leur signe		*	*	*		*	*		*	*	*			
Additionner/soustraire terme(s) des deux membres	*										*	*	*	
Collection														
Trouver les termes semblables d'un certain exposant	*	*		*		*	*	*	*	*			*	
Combiner les termes d'un certain exposant											*			
Obtenir les termes non traités													*	
Copier termes inchangés à la ligne suivante			*	*										
Isolement														
Diviser terme(s) des deux membres	*										*	*	*	
A annulé des termes de deux membres au début ou passé termes du membre droit vers la gauche											*	*		
Indiqua les deux termes tout au long de l'exercice	*		*						*					
A traité les termes du membre droit	*	*	*	*		*	*		*	*	*	*	*	*
Erreurs dans la modalité orale	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*				*
Erreurs dans la modalité écrite		*	*	*	*	*	*	*	*	*	-	-	-	-

V1...V10 : Étudiants Voyants ; NV1...4 : Étudiants Non Voyants.

Concernant la stratégie de résolution, 12 participants ont traité les termes entre parenthèses avant de procéder au traitement du membre droit, parmi lesquels deux, tous deux non voyants, ont réorganisé les termes du membre droit vers celui à gauche avant de procéder à la distribution ou la simplification. Les résultats sont en accord avec [Carry 1979], dont les étudiants préfèrent traiter les termes entre parenthèses avant de les combiner.

12 sur 14 étudiants et les 4 professeurs ont identifié à la première lecture qu'il y avait des parenthèses imbriquées, mais quelques participants doutaient si l'expression commençait avec une parenthèse ou pas, et d'autres ont voulu s'assurer qu'ils avaient compris la structure : Des commentaires comme « *... alors, il y a trois* $x + 2$ *entre parenthèses* », « *maintenant il ne reste qu'une parenthèse, n'est-ce pas ?* » pourraient suggérer le besoin d'une vue générale, comme proposé par [Stevens 1994, Gillan 2004, Stöger 2004].

Entre les limitations relatives à la mémoire et la perception, nous avons observé que dans la modalité non visuelle certains participants avaient l'impression que trois paires de parenthèses étaient présentes. L'un des enseignants participants s'est rendu compte qu'il y avait une égalité et un membre à droite seulement après la troisième fois qu'il avait écouté l'équation complète. Trois participants, dont un enseignant, ont complètement ignoré ou oublié le membre à droite et par conséquent ils n'ont pas terminé l'exercice correctement.

Le besoin d'information additionnelle inhérent à la modalité non-visuelle était évident pour la résolution de cette expression. Quatre participants, dont 2 voyants et 2 non voyants, ont demandé le nombre de parenthèses dans l'expression originale ou les sous-expressions, et 2 ont voulu isoler l'expression à distribuer. Après avoir obtenu le résultat partiel de la première distribution, quelques-uns ont demandé de le mettre dans des parenthèses et puis ajouter l'autre partie de l'expression ; cette action fut aussi observée à l'écrit.

Seulement trois participants, tous voyants, ont indiqué l'expression complète dans chaque ligne. De façon similaire à la modalité écrite, lors du traitement du membre gauche, quelques participants n'ont pas inclut le membre droit dans les résultats partiels. Ils l'ont écrit seulement lors du traitement de ses membres.

L'un des enseignants a manifesté sa frustration de ne pas pouvoir écrire l'équation sur papier ; il trouvait très difficile de communiquer ses intentions pour indiquer les parenthèses les plus profondes.

Un autre enseignant a réussit tout l'exercice en n'écoutant l'équation qu'une seule fois. Il se rappelait de la localisation des parenthèses, des facteurs, des résultats partiels des deux distributions, et des termes semblables à simplifier durant toute la démarche.

À l'oral, seulement un enseignant a identifié la possibilité d'annuler x avant de commencer à distribuer.

Lors de la phase d'*Attraction*, dans laquelle ils ont réorganisé les termes de gauche et de droite, les participants ont exprimé cette action de deux manières : 1) passer les termes à l'autre membre et changer leur signe, et 2) additionner/soustraire un terme des deux côtés.

TABLE 5.8 – Résultats de l'expression (5.4) des enseignants.

$x + 2(x + 2(x + 2)) = x + 2$	E1	E2	E3	E4
Distribution				
Obtenir un terme dans un facteur	*		*	
Obtenir le nombre de parenthèses dans l'expression	*		*	
Multiplier directement sans indiquer la distribution		*	*	*
Indiquer les produits de la distribution	*			
Obtenir produits indiqués	*			
Attraction				
Passer terme(s) à l'autre membre, en changeant leur signe	*			
Additionner/soustraire/diviser terme(s) des deux membres			*	*
Collection				
Trouver les termes semblables d'un certain exposant	*			
Isolement				
Diviser terme(s) des deux membres			*	*
Annula termes de deux membres au début ou passe termes du membre droit vers la gauche			*	
Indiqua les deux termes tout au long de l'exercice	*		*	
A traité les termes du membre droit	*		*	*
Erreurs dans la modalité orale		*		

E1...E4 : Enseignants de mathématiques.

L'opération de *Collection* a été exécutée de façon similaire à dans les exercices précédents.

Les quatre participants qui ont atteint la phase d'*Isolement* l'ont indiqué par la division de deux côtés par un nombre. Le reste des participants n'ont pas atteint la phase d'isolation parce qu'ils ont fait une erreur de distribution dont le résultat n'était plus linéaire.

Nous avons observé que cette équation, la plus complexe en structure, n'a pas posé des problèmes aux participants non voyants ; en fait, cet exercice a été moins encombrant que le précédent.

Les participants ont commis des nombreuses erreurs dans cet exercice. Tous les étudiants voyants et l'un des non voyants ont fait erreur à l'oral. Neuf des dix étudiants voyants et le non voyant ont traité $x + 2(x + 2)$ comme une multiplication de deux binômes $(x + 2)(x + 2)$ et par conséquent leur résultat partiel contenait des termes quadratiques. Nous avions attendu que les participants se rendraient compte de leur erreur durant la modalité écrite, mais apparemment personne ne s'est aperçue de la différence : 8 participants ont écrit $x + 2(x + 2)$ et 1 a écrit $(x + 2)(x + 2)$, mais ils ont tous effectué la multiplication de deux binômes. Les enseignants ont tous bien effectué les distributions ; ils ont trouvé la valeur de x à l'oral, sauf E2, qui n'a pas arrivé à trouver la valeur de x puisqu'elle oublia l'égalité et le membre à droit.

Lors de la résolution à l'oral de ces quatres expressions à l'oral, nous avons observé que lorsque les participants soupçonnaient qu'ils avaient fait erreur, ils retournait à la ligne précédente pour vérifier ou corriger, mais ils ne retournaient pas plus loin. Ayant finalisé leur démarche, personne n'a vérifié l'exercice du début à la fin. Il est intéressant aussi d'observer que certains types d'erreurs sont faites aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.

5.1.5 Discussion

Les résultats suggèrent que les intentions des participants correspondent à l'application systématique de règles algébriques. Selon les résultats de notre expérience, le travail avec des expressions algébriques implique l'exécution d'une stratégie qui dépend de l'exercice à réaliser et pas de la capacité visuelle.

5.1.5.1 Stratégies de résolution

Les participants ont déroulé leur stratégie de résolution en prenant en compte la tâche indiquée. La nature systématique de résolution des expressions nous a permis d'observer que les participants ont suivi des étapes similaires, bien que parfois pas dans le même ordre.

Lors de la tâche de simplification, les actions les plus demandés furent : trouver des termes semblables d'un certain exposant, et organiser l'expression selon l'exposant. Lors de la multiplication de binômes et de trinômes, la plupart des participants a effectué la distribution en multipliant directement les termes de référence. La simplification initial des termes semblables n'était effectuée que par 5 participants. Nous ne pouvons pas conclure s'il s'agit d'un problème d'identification de termes semblables par rapport l'oral, ou du fait que les participants veulent commencer à multiplier sans vérifier d'abord s'ils peuvent rendre l'expression plus simple.

Nous avons noté que la totalité des participants étaient concentrés sur le déroulement de la méthode de résolution, mais seulement quelques uns d'entre eux étaient conscients du type d'expression qu'ils manipulaient. En faisant la multiplication de trinômes, l'un des participants non voyants a commenté : « *alors on va obtenir un polynôme du troisième degré* » ; un autre voulait vérifier qu'il avait obtenu les termes aux exposants qu'il attendait, et encore un autre réfléchissait sur le type d'expression qu'il allait manipuler. Par contre, un autre des participants non voyants a fait la multiplication en assignant des lettres aux termes pour la résoudre de manière abstraite, et il a demandé à faire les calculs automatiquement ; il n'a plus eu besoin d'entendre les termes de l'expression. Il commente : « *... et voilà le résultat, mais franchement, si j'étais un étudiant, je n'aurais pas appris rien sur les maths, parce que si je ne fais pas les calculs... si je te dis, « $a+c$ » et cetera, ce n'est pas des vraies maths* ». Bien que la façon de résoudre l'expression correspondait à quelqu'un qui possède déjà la maitrise de l'algèbre essentielle, ce commentaire nous ramène aux aspects didactiques concernant l'apprentissage des mathématiques avec l'ordinateur ou des calculatrices, qui a été l'objet de plusieurs discussions : sans un suivi approprié, l'étudiant peut profiter des possibilités de l'outil et réaliser des tâches sans maîtriser les concepts.

Les étudiants peuvent trouver utile la flexibilité dans un outil afin de lui permettre le travail durant les étapes d'apprentissage. Un étudiant non voyant a manifesté : « *les premières équations je les ai traité en détail ; quand j'avais par exemple* $2x+4=10$ *j'écrivait* $2x+4-4=10-4$ *afin de garder la transformation ; ça semble un peu compliqué, mais ça m'a aidé à voir comment les chiffres se comportent, puis après la troisième équation j'avais déjà compris ce qui se passe et je l'ai fait de façon courte* ».

5.1.5.2 Erreurs

L'ensemble des erreurs des participants est présentée sur le tableau 5.9. Nous avons organisé les erreurs selon le classement de [Carry 1979]. De plus, nous avons ajouté des erreurs d'omission et d'évocation erronée. Les erreurs d'évocation erronée sont des erreurs d'arithmétique probablement produits par la manque d'observation directe des termes de référence. Les participants n'ont pas vérifié les termes de référence ou bien ils les ont oublié après la lecture, donc ils ont traité les termes comme ils les ont évoqué.

Depuis l'analyse des erreurs des participants de notre expérience, les plus courantes ont été des omissions de termes et un manque de contrôle de l'ordre des distributions. Même quand l'omission s'est produite aussi dans la modalité écrite, aucune erreur de suivi de l'ordre de distributions n'a été constatée. Des erreurs d'arithmétique ont été constatées dans les deux modalités.

D'un autre côté, le fait que la modalité orale impliquait une interaction indirecte peut influencer la vérification d'erreurs. L'un des participants non voyants a commenté : « *c'est compliqué de te dire quoi faire, mais si je le faisais moi même je l'aurai devant moi et je pourrai voir s'il y a quelque chose qui va pas ... je peux jouer avec l'équation, observer s'il y a des erreurs et essayer quelque chose de différent* ».

5.1.5.3 Limitations de la mémoire

Étant donné que notre expérience ne permettait pas l'utilisation d'un support écrit, les participants étaient obligés à se rappeler des termes de référence, ce qui supposé une charge de mémoire importante. En regardant la capacité de mémoire, nous avons trouvé que les participants voyants et non voyants ont les mêmes difficultés pour retenir plusieurs termes ; nous suggérons que le fait de ne pas avoir à disposition leur mémoire externe, soit papier ou an autre moyen, leur oblige à les demander nombreux fois. Nous avons observé cette difficulté principalement dans la tâche de multiplication de facteurs, durant laquelle la plupart des participants ont demandé les facteurs de référence avant de calculer la distribution. De façon similaire, le suivi de la distribution était difficile à effectuer.

De récentes études, comme celle de [Raz 2007], suggèrent que les aveugles congénitaux ont mieux développé leur mémoire séquentielle que les voyants, afin de compenser la manque de vue. En principe nous ne pouvons pas supposer que ces résultats s'appliquent aux aveugles non congénitaux, car leur situations varient entre eux. D'autre côté, la nature de l'expérience de [Raz 2007] a été de mémorisation

Table 5.9 – Erreurs à l'Oral et à l'Écrit.

Modalité	**Type d'Erreur**	**V/NV/E**
	Erreurs d'Arithmétique	
Orale	$2 * 6 \rightsquigarrow 18$	E
	$-8a + 42a \rightsquigarrow +36a$	E
	$6/6 \rightsquigarrow 0$	V
Écrite	$3a^2 * a \rightsquigarrow 3a^4$	V
	$42a - 8a \rightsquigarrow 36a$	V
	$2 * 4x \rightsquigarrow 4x$	V
	Erreurs d'Applicabilité	
Orale	Exécution de $x + 2(x + 2)$ comme une multiplication de binômes.	V(9), NV(1)
	Combinaison d'un terme indépendant avec un facteur.	NV
Écrite	Écriture de $x + 2(x + 2)$, exécuté comme $(x + 2)(x + 2)$	
	Erreurs d'Exécution : Distribution	
Orale	$(x + 2)(x + 2) \rightsquigarrow x^2 + 8x + 4$	V
	$(x + 2)(x + 2) \rightsquigarrow 4x^2 + 2x + 4$	V
	Obtention de 7 termes à partir de $(x + 2)(4x^2 + 4x + 4)$	V
Écrite	$5 * 2x \rightsquigarrow +4x$	V
	Erreurs d'Exécution : Signe	
Orale	Changement du signe non indiqué.	V
Écrite	$2a(-4) \rightsquigarrow +8$	V
	Erreurs d'Exécution : Écriture	
Orale	*N/A*	
Écrite	Erreur de copie : x^3 au lieu de x^2	V
	Erreurs d'Exécution : Omission	
Orale	Omission des termes quadratiques dans le résultat.	V
	Omission de la simplification des termes linéaires.	NV
	Omission d'un produit dans la distribution.	V
	Omission de « = 0 »	V
	Omission du traitement du membre droit	E
Écrite	Omission d'un terme indépendant lors de la simplification.	V(2)
	Omission du traitement du membre droit (utilisation du signe d'égalité pour écrire le résultat partiel).	V
	Omission de « = 0 »	V
	Erreurs d'Exécution : Évocation Erronée	
Orale	Multiplication de $2 * 2x$ au lieu de $5 * 2x$	V
	$x * 2x \rightsquigarrow 3x$	V
	$3a^2 * 5a \rightsquigarrow 15a^2$	V(2)
	$7 * (-4) \rightsquigarrow +28$	V
	$2 * 4x \rightsquigarrow 8x^2$	V
	$12 - x \rightsquigarrow -11x$	V
Écrite	*N/A*	

V : Étudiants Voyants ; NV : Étudiants Non Voyants ; E : Enseignants.

exclusivement. Nous ne pouvons pas supposer que ces résultats appliquent pour une personne non-voyante en faisant mathématiques, où la tâche a pour but la résolution d'un problème. De plus, [Stöger 2006] montre l'importance de la charge mentale que représente pour les aveugles la résolution des tâches mathématiques simples. D'un autre côté, nous pouvons supposer que les personnes, voyantes ou non voyantes, peuvent développer leur capacité de mémoire par l'entraînement régulier.

En analysant les types d'erreurs que les participants ont commises à l'oral, nous pouvons constater que les plus courantes sont l'omission et le manque de contrôle sur le suivi de la distribution. Étant donné que, dans la plupart des cas, ces erreurs ne concernent pas une exécution incorrecte de la méthode de résolution, mais une limitation de la mémoire et de l'attention, lesdits limitations doivent être prises en compte pour essayer de réduire ce type d'erreurs au sein de l'interface. D'un autre côté, certaines des erreurs commises à l'oral ont été commises aussi à l'écrit, par exemple, l'omission de termes et les erreurs d'arithmétique. Ces erreurs semblent être plutôt des « gaffes » qui ne reflètent pas nécessairement un défaut de la connaissance du sujet ou de l'application des règles de transformation, et qui sont, par contre, très difficiles à éviter.

5.1.5.4 Discours oral des enseignants

En examinant le discours des enseignants lors de la démarche de résolution, il apparaît que ces derniers ont commencé par remarquer le type d'équation à traiter, puis ils ont développé la solution en indiquant les transformations adéquates et les méthodes pour y parvenir. Par exemple :

« *c'est un produit de trinômes, donc on va appliquer l'opération de distribution.* »

« *c'est une somme avec des produits imbriqués, donc d'abord on doit traiter les parenthèses les plus au fond, qui sont plus à l'intérieur.* »

« *il faut multiplier un monôme par un binôme, autrement dit, appliquer la propriété distributive.* »

En général les enseignants ont réussi à expliquer les méthodes de résolution de la façon conventionnelle à l'oral. Dans les distributions ils ont décrit l'ordre dans lequel les termes doivent êtres multipliés, en utilisant comme référence les positions des termes de la même manière qu'ils le font au tableau :

« *multiplier le premier terme du premier facteur par le premier terme du deuxième facteur, puis par le deuxième terme du deuxième facteur ...* »

« $3a^2 * 6a$: *il faut multiplier les constantes, dans ce cas là 3 et 6 ; puis les termes littérales se multiplient en additionnant leurs puissances.* »

Deux enseignants ont remarqué l'importance d'indiquer les produits de la distribution avant de réaliser leur multiplication, pour minimiser les erreurs dans la suivi de la multiplication. De plus, ils ont considéré cette pratique utile pour les débutants, parce qu'elle leur permet de savoir d'où viennent les résultats.

Lors de la simplification, ils ont expliqué qu'il faut les organiser par puissance, normalement de la plus grande à la plus petite.

Ils ont expliqué également des critères de décision lors de la résolution :

« *il faut traiter les parenthèses, parce que les parenthèses dans ce cas là indiquent une multiplication, et la multiplication est prioritaire sur l'addition.* »

« *il faut regarder si on peut pas simplifier avant d'effectuer, ce qu'il y a dans les parenthèses.* »

Parfois les explications ont varié pour des opérations similaires :

« *maintenant on va arranger dans un seul membre tous les termes ayant x, donc on va les passer à droite avec le signe contraire.* »

« *on va ajouter l'élément symétrique des deux côtés.* »

Par rapport à la façon d'expliquer cette transformation, un enseignant à commenté :

> *En fait on dit « on fait passer de l'autre côté et on change de signe » ; le problème ce que de plus en plus, si on n'explique pas au début pourquoi on a fait passer de l'autre côté et on change un signe, ils (...) prennent ça comme une recette, et il faut vraiment voir qu'on ajoute l'opposé à chacun des membres de l'égalité... Après, une fois que les gens se sont habitués, il faut que tout se fasse assez vite, mais la première fois il faut bien voir ce qu'on fait.*

Les commentaires par rapport à l'indication explicite des transformations dans l'étape initiale d'apprentissage mettent en valeur l'importance de donner à l'étudiant le contrôle sur les transformations et les manipulations impliquées.

Les enseignants se sont également confronté aux difficultés de communication des idées sans utiliser un support visuel, ce qui est équivalent à essayer de communiquer avec un non voyant. Tout d'abord certains ont trouvé difficile d'effectuer la résolution sans avoir un support écrit : « *mais j'ai besoin de l'écrire pour l'expliquer !* ». Ils ont également trouvé difficile d'indiquer les parenthèses les plus profondes, car normalement ils les indiquent directement sur le tableau. Dans l'exercice 5.4, celui de l'équation imbriquée, la nécessité d'indiquer sur papier les termes de référence devient plus forte, car en plus d'être imbriqués, les termes qui la composent sont similaires et il n'est pas facile d'établir un terme comme référence.

5.2 Modélisation des actions

Les demandes des participants nous aident à mieux comprendre les stratégies de résolution, en considérant les limitations de mémoire inhérents aux êtres humains. Bien que ces expressions ne contiennent pas toutes les actions possibles que demande l'algèbre essentielle, elles permettent d'explorer de manière pratique l'interaction dans le cadre des tâches que nous avons défini pour cette expérience.

Les actions demandées par les participants de notre expérience peuvent être catégorisées selon les étapes mentionnés par [Carry 1979]. Nous avons ajouté les étapes de *Vérification* et *Distribution* pour encadrer la totalité des actions selon les objectifs des étudiants. Les étapes et les possibles actions pour les réaliser sont :

5.2.1 Vérification

Il s'agit de l'analyse de l'état de l'équation durant toute la démarche de la résolution, soit au début pour comprendre la structure de l'équation et préparer la stratégie de solution, soit après avoir réalisé une des étapes pour vérifier le résultat partiel, ou bien pour obtenir d'autres informations sur l'équation. La vérification peut se réaliser aussi bien sur la ligne courante que sur des lignes précédentes.

5.2.2 Simplification : attraction et collection

L'étape la plus essentielle et fréquente est la simplification. Dans notre contexte, simplifier consiste en organiser et additionner les termes semblables, soit les occurrences de l'inconnue, soit les termes indépendants. Dans le cadre de l'analyse de [Carry 1979], la simplification correspond aux phases d'*Attraction* et de *Collection*. L'étape d'*Attraction* peut être effectuée en réalisant les actions : écrire, appliquer une opération aux deux membres de l'équation (parfois demandé par les participants comme « *ajouter un terme des deux côtés* »), ou bien transposer termes au membre contraire et changer leur signes. La *Collection* se réalise en effectuant des actions parmi lesquelles : additionner les termes semblables, écrire, éliminer.

5.2.3 Distribution

En fonction de la complexité de l'équation, mais toujours dans les exercices de notre expérience, il peut être nécessaire de faire des multiplications entre monômes, binômes et polynômes. Cette étape met en évidence les limitations de la mémoire humaine, car, comme il est difficile de retenir les termes de référence, il est nécessaire de les chercher constamment. En utilisant la vue, cet action est automatique car nous pouvons regarder directement les termes dans l'expression ; sans la vue c'est n'est pas si évident, parce qu'il faut se déplacer entre la ligne initiale pour obtenir les facteurs et la ligne du résultat pour les écrire. Les actions requises pour distribuer sont : obtenir les termes ou facteurs à multiplier, multiplier et écrire. De façon générale, nous pouvons considérer qu'à la suite d'une distribution, l'utilisateur effectuera plus probablement une simplification.

5.2.4 Isolement

L'objectif de cette étape est de se libérer des termes qui entourent l'inconnue, pour arriver à trouver sa valeur. De façon similaire à l'*Attraction*, l'isolement peut être effectué de deux manières : en appliquant une opération aux deux membres de l'équation, ou bien en transposant les termes à l'autre membre et changeant leur signe.

Il faut noter que certaines actions correspondent à plus d'une catégorie, selon la stratégie suivie par l'étudiant. Par exemple, l'action de transposer un terme au membre contraire peut se faire au début dans une phase d'attraction pour organiser et puis simplifier l'équation, ou bien dans une étape finale d'isolement pour déplacer

TABLE 5.10 – Stratégie de Résolution 1.

Équation	**Étapes/Actions**
$x + 2(x + 2(x + 2)) = x + 2$	**Attraction** Transposer $x + 2$ Changer signe
$-x - 2 + x + 2(x + 2(x + 2)) = 0$	**Distribution** Multiplier $2(x + 2)$
$-x - 2 + x + 2(x + 2x + 4) = 0$	**Collection** Additionner termes semblables (en parenthèses)
$-x - 2 + x + 2(3x + 4) = 0$	**Distribution** Multiplier $2(3x + 4)$
$-x - 2 + x + 6x + 8 = 0$	**Vérification** Rechercher termes semblables en x **Collection** Additionner termes semblables
$-2 + 6x + 8 = 0$	**Vérification** Rechercher termes indépendants **Simplification arithmétique** Additionner termes semblables
$6x + 6 = 0$	**Isolement** Transposer 6 Changer signe
$6x = -6$	Diviser par 6
$x = -1$	

les termes qui entourent l'inconnue. Dans tous les cas, ce sont les actions individuelles qui sont prises en compte pour les transformer en interactions dans l'interface.

À partir des expériences, deux stratégies différentes de résolution pour l'équation 5.4 sont présentées sur les tableaux 5.10 et 5.11. Notez que la stratégie de résolution des deux participants est différente, mais les actions sont similaires.

Il faut noter que, du fait de la nature orale de notre expérience, l'étape de *Vérification* n'est pas toujours indiquée explicitement dans la table, mais elle a été effectuée après chaque action sous la forme de vérification du résultat partiel.

La figure 5.1 présente les étapes et les actions impliquées dans la résolution. Afin d'achever ces actions, il est nécessaire de proposer des méthodes pour leur implémentation dans l'interface.

TABLE 5.11 – Stratégie de Résolution 2.

Équation	Étapes/Actions
$x + 2(x + 2(x + 2)) = x + 2$	**Attraction** Ajouter $-x$ aux deux membres
$-x + x + 2(x + 2(x + 2)) = x + 2 - x$	**Collection** Éliminer occurrences d'x
$2(x + 2(x + 2)) = 2$	**Isolement** Diviser par 2
$x + 2(x + 2) = 1$	**Attraction** Transposer x Changer signe
$2(x + 2) = 1 - x$	**Distribution** Multiplier $2(x + 2)$
$2x + 4 = 1 - x$	**Attraction** Ajouter x aux deux membres
$x + 2x + 4 = 1 - x + x$	**Collection** Additionner termes semblables (membre de gauche)
$3x + 4 = 1 - x + x$	Additionner termes semblables (membre de droite)
$3x + 4 = 1$	**Isolement** Ajouter -4 aux deux membres
$-4 + 3x + 4 = 1 - 4$	**Simplification arithmétique** Additionner termes semblables
$3x = -3$	**Isolement** Diviser par 3
$x = -1$	

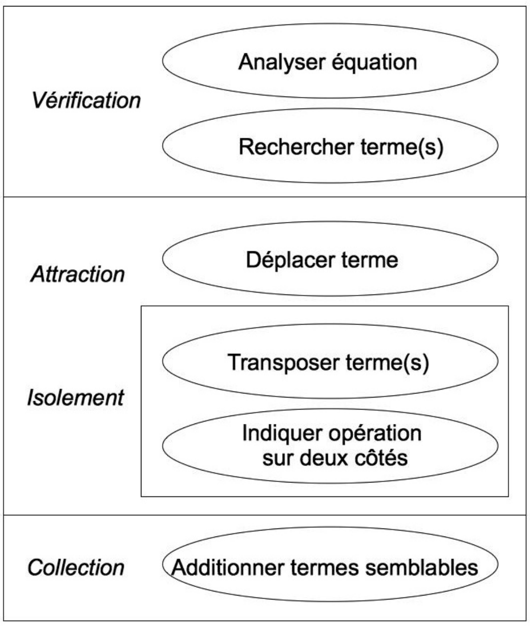


FIGURE 5.1 – Étapes et actions impliqués dans la résolution

Chapitre 6

Modélisation de l'interaction

Sommaire

À partir de l'analyse des actions nécessaires pour la résolution d'équations algébriques par des participants voyants et non voyants, nous avons observé que les étapes sont en accord avec les résultats reportés en [Carry 1979], qui concernait uniquement des participants voyants. Cela nous permet de suggérer que les actions dépendent de la tâche à réaliser selon la méthode de résolution appris, et pas de la capacité visuelle.

Les étapes concernés dans la résolution d'équations linéaires : vérification, distribution, simplification et isolement, sont des objectifs qui peuvent être réalisés par des actions différentes, soit dans la mémoire de l'utilisateur, soit par un support externe comme une feuille de papier ou un outil informatique.

Lorsqu'on s'intéresse au développement d'un outil informatique, on rentre dans le domaine de l'implémentation des interactions qui permettront aux utilisateurs d'effectuer les actions requises. Par exemple, nous pouvons considérer l'implémentation des interactions pour transformer les équations à partir des règles définies. Comme la résolution d'équations peut être représentée par un modèle de traitement de l'information, il est possible de définir des algorithmes de transformation qui mèneront au résultat final. Dans ce type d'implémentation, l'élève pourrait choisir parmi une collection des règles à appliquer, en manipulant l'équation de façon indirecte, comme dans les CAS *(Computer Algebra System)*. Un autre type d'implémentation consiste à transformer les expressions à partir de règles, prenant en compte l'accompagnement de l'élève par un agent ou tuteur, qui vérifie l'application des règles et donne du retour sur la démarche, de façon similaire aux logiciels de tutorat. Dans un autre type d'implémentation, nous pouvons considérer la manipulation directe des équations, celles ci sont transformées de façon manuelle, de façon similaire à un éditeur de texte.

Comme nous l'avons discuté dans la description des outils informatiques (*cf.* p. 49), les interactions dans un outil pour l'apprentissage jouent un rôle critique dans la construction de sens et le développement du symbolisme algébrique chez les élèves [Balacheff 1993, Heck 2001, Artigue 2002, Drijvers 2005, Monaghan 2007] ; c'est pourquoi la conception des interactions doit être vérifie par rapport à la didactique.

Nous avons suivi l'approche d'édition d'expressions, car c'est la façon la plus proche du type de résolution auquel les élèves sont habitués. Les fonctionnalités d'aide à la résolution concernent en particulier la facilitation de l'accès aux termes dans une représentation linéaire.

Une fois que nous avons identifié les étapes impliquées dans la résolution d'équations et la réalisation des tâches qui la composent, il faut s'assurer que des interactions soient prévues pour chaque intention de l'utilisateur.

Quelques interactions souhaitées dans des interfaces multimodales ont été mentionnés dans des travaux précédents :

Navigation

- Offrir une vue générale [Stevens 1994, Gillan 2004, Stöger 2004].
- Étendre et replier des sous expressions. Il s'agit de permettre à l'utilisateur d'accéder à une vue d'une expression dans laquelle une ou plusieurs branches de l'arbre sémantique sont réduites à un symbole, par exemple $(2x^2 + 3x + 1)/(x + 4)$ peut être montrée sous la forme *Entity/Entity* [Karshmer 2002].

Repérage

- Trouver des positions spécifiques [Stöger 2004].
- Permettre de retourner à des positions déterminées par l'utilisateur [Gillan 2004, Smith 2004].

Édition

- Permettre de saisir ou de remplacer des éléments [Archambault 2009].
- Minimiser les erreurs concernant la mémoire et la copie de termes. [Stöger 2004].
- Permettre de marquer des expressions sans parcourir l'équation complète [Stöger 2006].
- Sélectionner des termes de façon linéaire et par sous expression. De plus, avoir une sélection indépendante du curseur, parce que le curseur ne peut pas être utilisé quand il y a une sélection [Stöger 2006].

Communication et collaboration

- Synchroniser l'affichage visuel avec la représentation non visuelle et réciproquement [Archambault 2007, Miesenberger 2008].
- Synchroniser des termes sélectionnés [Archambault 2007].
- Permettre la conversion à partir du braille vers des formats visuels [Stanley 2008].

- Permettre des conversions entre différents codes mathématiques braille [Archambault 2007].

Dans notre expérience, certaines intentions révélées par la modalité orale sont effectuées selon d'autres méthodes dans une modalité écrite, que soit en noir ou en braille. Par exemple, afin de « *Obtenir les termes non traités* » depuis une feuille de papier, normalement on les observe directement après avoir rayé les termes traités. Par contre, une demande du type « *Rayer les termes traités* » n'a pas de sens dans une modalité orale.

Les interactions que nous avons prises en compte et que nous allons implémenter dans notre interface ont pour objectif de faciliter des tâches couramment utilisées pour l'apprentissage de l'algèbre essentielle. Nous avons essayé de maintenir un degré d'automatisation le plus bas possible, afin que l'utilisateur ait à manipuler directement les équations et à produire les résultats lui-même. Par conséquent, les options d'interaction sont exclusivement destinées à faciliter l'accès direct aux termes de l'équation et à minimiser la charge mentale des utilisateurs.

Parmi les aspects importants d'interaction se trouvent : le degré d'accès direct aux termes, l'implémentation des caractéristiques pour minimiser la charge de mémoire et les erreurs provoqués par des limitations de la mémoire, comme par exemple l'évocation incorrecte des termes. Dans l'interface que nous proposons, les étapes d'*Attraction*, de *Collection* et d'*Isolement* peuvent être réalisées par l'édition directe des expressions. L'étape de *Vérification*, requise avant et après toute action, implique l'accès contrôlé par l'utilisateur dans l'équation. Nous proposons également des aides à la compréhension et la résolution.

Les interactions prévues sont les suivantes :

6.1 Contrôle de l'accès

Notre hypothèse est que la communication de la structure d'une expression n'est pas une question de résolution spatiale, mais de syntaxe mathématique. La syntaxe d'une expression peut être communiquée à l'oral par la lecture active, en transférant à l'utilisateur le contrôle de la navigation dans la formule.

Une expression mathématique peut être représentée par un arbre syntaxique dans lequel existent différents niveaux selon la complexité de l'expression. Par exemple, dans une expression telle que $x+2(x+2(x+2)) = x+2$ on trouve plusieurs niveaux de profondeur (Fig. 6.1).

Afin de communiquer les différentes sous expressions et les termes qui les composent, nous proposons l'affichage par bloc structurel et sémantique selon l'arbre syntaxique de l'expression. Pour indiquer des termes complexes, nous proposons l'utilisation de blocs, que nous appelons « sémantiques » parce qu'ils sont nommés selon les éléments qui les composent. Les étiquettes qu'on a considéré pour les blocs sont :

- TERME
- EXPOSANT

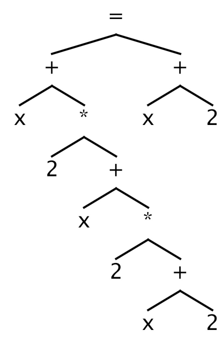


Figure 6.1 – Arbre syntaxique de l'équation $x + 2(x + 2(x + 2)) = x + 2$.

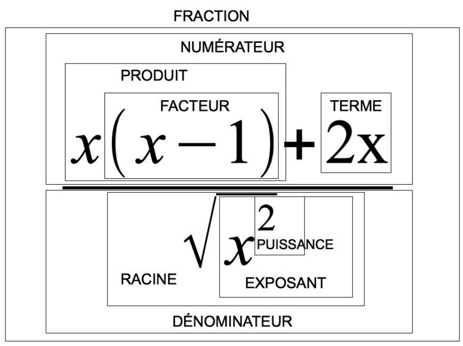


Figure 6.2 – Exemple de blocs dans une expression.

- PRODUIT
- FACTEUR
- FRACTION
- NUMÉRATEUR
- DÉNOMINATEUR
- RACINE
- MEMBRE

Un exemple de l'assignation de ces étiquettes est présenté sur la figure 6.2.

La proposition d'utiliser des blocs sémantiques a pour but de faciliter la lecture active et la visualisation générale d'une équation. Bien que cette proposition ne soit pas aussi effective que l'accès par la vue, elle peut permettre à l'utilisateur de contrôler la quantité d'information qu'il veut visualiser et manipuler à un moment donné. En utilisant des touches de fonction l'utilisateur peut accéder aux niveaux supérieurs et inférieurs selon la stratégie de lecture ou de résolution. Les méthodes d'accès aux différents niveaux sont présentés dans le tableau 6.1.

TABLE 6.1 – Affichage contrôlé par l'utilisateur.

Commande	**Description**	**Affichage**
Étendre tout	Afficher tous les éléments de l'équation.	$EQUATION \rightsquigarrow \frac{x(x-1)+2x}{\sqrt{x^2}} = 0$
Replier tout	Masquer tous les éléments de l'équation.	$\frac{x(x-1)+2x}{\sqrt{x^2}} = 0 \rightsquigarrow EQUATION$
Étendre un niveau	Afficher les termes du niveau suivant de l'arbre du terme actif.	$FRACTION \rightsquigarrow NUMERATEUR/DENOMINATEUR$
Étendre complètement le niveau	Afficher tous les éléments du niveau actif.	$FRACTION \rightsquigarrow \frac{x(x-1)+2x}{\sqrt{x^2}}$
Plier un niveau	Masquer les éléments contigus de l'élément actif de l'arbre.	$(x-1) \rightsquigarrow FACTEUR$

Ces étiquettes donnent plus d'information que la notation conventionnelle que l'élève est censé interpréter. Par exemple, informer à l'utilisateur que la sous expression $x(x-1)$ est un $PRODUIT$ (voir la figure figure 6.2, page 82).

Suivant le principe de non interprétation qu'on trouve dans la littérature, nous avons prévu aussi un affichage par bloc dont tous les blocs sont denominés par l'étiquette $BLOC$, de façon similaire à la notion d'*Entity* de [Karshmer 2002], de telle façon que l'affichage du niveau suivant de l'équation $BLOC$ donne $BLOC = BLOC$.

La navigation entre les termes et les blocs sémantiques nécessite les flèches droite et gauche. Uniquement les termes affichés sont pris en compte, de telle façon que la navigation de gauche à droite dans l'expression $FACTEUR + 2x$ donne : « $FACTEUR$ », « $+$ », « 2 », « x ». Il n'est pas possible de naviguer dans les termes contenus dans $FACTEUR$, tant que ceux-ci ne sont pas affichés, c'est-à-dire tant que $FACTEUR$ n'est pas étendu.

La navigation est toujours linéaire, même pour les termes bidimensionnels, en effet la bidimensionnalité d'une expression est utile surtout à la vue, et le sens d'une expression ne change pas quand on le représente de façon linéaire. Par exemple $1/2$ et $\frac{1}{2}$. Par contre, cette façon de naviguer dans les fractions pourrait déconcerter un utilisateur voyant, car ce dernier pourrait essayer d'aller « en haut » ou « en bas ». Pour offrir une fonction équivalente nous avons prévu une commande permettant d'alterner la position du curseur entre le numérateur et le dénominateur, activable depuis n'importe quel terme de la fraction.

Afin de se repérer dans les éléments d'une fraction, nous avons proposé d'ajouter des sons et des indices lexicaux à la lecture de termes : un son aigu pour les termes du numérateur, et un son plus grave pour ceux du dénominateur, complémentés par des indices lexicaux tels que « Début Numérateur », « Fin Dénominateur ». Afin de faciliter la navigation d'une ligne à l'autre, nous proposons de mémoriser la position du curseur dans le dernier terme visité dans chaque ligne, de telle façon qu'en revenant, on retourne à la position antérieure.

6.2 Édition : saisie et sélection

Concernant l'édition, nous proposons les actions suivantes :

- Saisir, modifier, insérer et éliminer des expressions.
- Copier, coller et éliminer des éléments simples ou complexes.
- Annuler la frappe, le collage ou l'élimination de termes.

Les utilisateurs peuvent saisir, éliminer et modifier les termes via le clavier. En addition des chiffres, lettres, opérateurs et éléments de groupement tels que les parenthèses, les crochets et les accolades, nous avons prévu l'utilisation des raccourcis clavier afin de mettre les structures telles que les puissances, les fractions et les racines dans leur forme bidimensionnelle. La frappe de chaque caractère aura une sortie visuelle et audio synchronisée.

Table 6.2 – Saisie d'expressions bidimensionnelles au clavier.

Expression	Protocole de saisie
x^3	Saisir « x », presser « *Ctrl* ↑ », saisir « 3 », appuyer « *Ctrl* ↓ »
$\frac{x^2+4}{2}$	Saisir « $x^2 + 4/2$ », sélectionner les termes, appuyer « *Ctrl* / »
$\sqrt{x^2+25}$	Saisir « $x^2 + 25$ », sélectionner les termes, appuyer « *Ctrl r* »

Les symboles non valides en mathématiques comme les accents sur les lettres et sur d'autres caractères non valides n'ont pas de sortie visuelle ; par contre un signal sonore (*beep*) est émis pour indiquer une erreur.

Le tableau 6.2 présente la manière de saisir quelques exemples d'expressions sous leur forme bidimensionnelle. Pour saisir des puissances nous utilisons les raccourcis *Ctrl* ↑ et *Ctrl* ↓ pour indiquer respectivement le début et la fin d'une puissance. Afin de définir des structures comme les fractions et les racines, l'utilisateur doit sélectionner les termes, qui auront été saisis au préalable, puis utiliser le raccourci correspondant à la structure souhaitée. Pour saisir des fractions, il faut d'abord sélectionner les termes qui vont la composer, saisis au préalable, et dans lequel on aura inséré un « / » entre le numérateur et le dénominateur, puis appliquer le raccourci *Ctrl /*. Afin d'obtenir une fraction dans sa forme bidimensionnelle, il est nécessaire de sélectionner un numérateur, un symbole de division et un dénominateur. S'il manque un de ces éléments dans la sélection, l'interface doit informer l'utilisateur que l'opération n'est pas possible.

Les racines nécessitent également la sélection préalable des termes, puis le raccourci *Ctrl r*. Les structures des fractions, ainsi que des racines, peuvent être annulés en utilisant les même raccourcis que pour les créer.

L'édition permet également d'éliminer, de copier et de coller des termes simples et complexes, ayant été sélectionnés au préalable. La sélection peut se faire de façon linéaire comme dans les éditeurs de texte conventionnels, ou bien par niveaux. Par exemple, dans l'expression $\frac{2x+4}{2} = 0$, une sélection par niveau ayant x comme terme actif produira la sélection de $2x$, suivie par celle de $2x + 4$, puis $\frac{2x+4}{2}$ et finalement $\frac{2x+4}{2} = 0$. Une sélection par niveau à partir du 0 produira uniquement $\frac{2x+4}{2} = 0$.

6.3 Aide à la résolution

Il s'agit de fonctionnalités auxiliaires destinées à minimiser le nombre de frappes au clavier nécessaires à la réalisation d'une action, offrant la possibilité d'accélérer la démarche sans changer la nature de la tâche. D'autre part, ces fonctionnalités ont pour but additionel de minimiser la charge de mémoire.

Les fonctionnalités auxiliaires que nous proposons sont les suivantes :

- **Placement de marques sur les termes.** Nous proposons le placement manuel de marques pour faciliter la manipulation et le suivi des tâches, ainsi que le repérage dans l'expression. L'utilisateur peut naviguer entre les termes marqués en passant directement de l'un à l'autre avec un raccourci clavier. Cette caractéristique peut aider à trouver des positions spécifiques dans une expression. Les termes marqués dans la ligne active peuvent être lus ou copiés directement, minimisant ainsi la charge de mémoire et par conséquent les erreurs de copie des termes.

Nous plaçons des marques afin d'avoir présent les termes de référence en optimisant la navigation dans l'expression. Par exemple, dans la tâche de distribution de $(3a^2+2a+7)(6a-4)$, l'utilisateur marque les termes du deuxième facteur, puis place le curseur sur le premier terme du premier facteur :

$$(\boxed{3a^2}+2a+7)(\underline{6a}-\underline{4}) \tag{6.1}$$

Une fois ces opérations effectuées, on peut écouter à tout moment le terme actif $3a^2$, ainsi que les termes marqués $6a-4$ sans bouger le curseur. En passant de la ligne de l'expression à la ligne de résultat partiel on peut saisir les produits à multiplier, ou bien saisir directement les résultats de la multiplication par le premier terme. On peut alors revenir à la ligne de l'expression pour vérifier les termes marqués sans perdre la position du curseur sur $3a^2$, ou bien pour passer au terme suivant $2a$.

Le placement et la suppression de marques peuvent être utilisées comme un outil pour indiquer les termes qui ont déjà été traités, ce qui correspond à l'action de barrer le terme avec un crayon sur le papier. Par exemple, pour simplifier les termes de la distribution précédente $18a^3-12a^2+12a^2-8a+42a-28$ on peut successivement saisir ou copier $18a^3$ dans la ligne suivante, le marquer comme traité, marquer les termes quadratiques qui s'annulent, et enfin combiner les termes linéaires et ainsi de suite. Dans ce cas, les marques peuvent aider à suivre la simplification de façon organisée.

Les termes marqués peuvent également être copiés de façon simultanée en utilisant un raccourci. Comme les termes marqués sont déjà différenciés de ceux qui ne le sont pas, il n'est pas nécessaire de les sélectionner avant la copie. Au contraire de la sélection, le placement de marques permet de copier des termes non contigus. Les marques ainsi placées sont persistantes et indépendantes de la position du curseur, tant que celles-ci ne sont pas explicitement éliminées.

- **Recherche de termes.** Bien que dans l'utilisation d'une modalité écrite il soit possible de trouver facilement des termes donnés, les utilisateurs voyants normalement peuvent trouver rapidement les termes souhaités, les non voyants normalement mettent plus de temps à les identifier dans une expression longue. Nous proposons des fonctionalités de recherche, afin d'accélérer la tâche. Deux types de recherches sont ainsi proposés :
  – *Recherche libre.* Il s'agit de rechercher des éléments ou des fragments d'expression.

  - *Recherche de termes semblables.* Il s'agit cette fois ci de rechercher des termes d'une puissance indiquée par l'utilisateur. Le critère de recherche doit être un exposant (avec ou sans le symbole puissance) ; la recherche renvoie comme résultat l'ensemble des termes semblables à cet exposant dans l'expression active, y compris ceux qui se trouvent entre parenthèses, dans une fraction, ou bien dans un autre membre. La recherche de termes semblables n'est pas sémantique, mais purement lexicale. Par exemple, la recherche de termes en x^2 ne produira pas « $x * x$ » ni le terme x dans « $(x + 2)^2$ » comme résultats. La recherche s'effectuera seulement dans les termes à cet instant affichés.

    Les résultats de la recherche sont identifiés par le placement automatique de marques, et l'utilisateur peut naviguer entre eux en passant directement de l'un à l'autre via un raccourci. Il faut noter que cette commande implique des allées et venues entre la ligne précédent et la ligne de résultats, où des éléments peuvent être saisis. Néanmoins, lorsqu'un revient sur la ligne de résultat, le curseur se place aussi sur la position antérieure, comme on l'a indiqué dans la navigation.

- **Transposition de terme(s).** La commande *Transposer*, précédée par la sélection des termes à transposer. Prenons par exemple l'expressions $2x-4 = 0$; afin de passer le terme -4 au membre droite, on doit le sélectionner, puis appuyer la touche de la commande de transposition, pour obtenir $2x = 0 - 4$.
- **Réalisation d'une opération des deux côtés.** Les commandes *Additionner/Diviser des terme(s) dans deux côtés*, dont le paramètre est le terme ou les termes à ajouter ou à diviser.
- **Addition de termes semblables.** La commande *Additionner coefficients*, précédée de la sélection des termes. Par exemple, afin d'additionner les termes indépendants de l'expression $2x+4-6$, il est nécessaire de sélectionner $+4-6$ puis appuyer la touche de la commande d'addition.

Toutes les commandes seront exécutées via une combinaison de touches (raccourci clavier), ou bien en les choisissant depuis un menu.

La simplification dans une équation à plusieurs termes peut être accélérée considérablement en facilitant la recherche et la sélection des termes semblables par des options auxiliaires. Il en va de même en ce qui concerne la localisation des termes spécifiques, qui peut être accélérée si l'utilisateur n'a pas à parcourir l'equation dans son entier. Bien que les utilisateurs voyants n'ont pas besoin de parcourir l'équation pour réaliser certaines actions comme rechercher des termes semblables, ils peuvent également utiliser les interactions auxiliaires pour accélérer la sélection de termes à additionner ou copier ultérieurement.

L'indication des marques et les deux types de recherche qui ont été décrits peuvent être utilisés pour faciliter l'accès direct et le repérage dans les termes d'une expression.

Un certain nombre de ces fonctions pourrait être utile aussi aux utilisateurs voyants. Par exemple, le placement de marques pour indiquer les termes traités, la visualisation simultanée de termes trouvés après une recherche, la sélection de termes par niveau dans l'arbre syntaxique, la sélection persistante, et la sélection et copie de termes non contigus. Ces fonctions permettent la minimisation de frappes de clavier et des erreurs de copie, et facilitent le repérage des termes.

6.4 Modalités de représentation

Afin de permettre la communication entre des utilisateurs voyants et non voyants, nous proposons d'utiliser deux sorties, visuelle et audio, synchronisées. Lorsqu'un caractère est saisi, celui-ci s'affiche sur l'écran en même temps que son équivalent audio est diffusé sur le haut parleur. Les lettres et les chiffres sont lus individuellement. Quand plusieurs chiffres composant un nombre font partie d'une sélection, ce nombre est lu globalement (45 $\rightsquigarrow$ « quarante-cinq »). Les parenthèses, crochets et accolades individuels sont précédés des mots « Début » et « Fin ». Quand un terme est sélectionné, celui-ci est surligné sur l'écran, et lu en audio immédiatement.

Nous proposons deux modes de lecture : passive et active. La lecture passive consiste en l'énonciation séquentielle des éléments de l'expression. De son côté la lecture passive de termes sélectionnés fonctionne comme une forme de vérification qui n'implique pas de mouvement du curseur. D'autre part ce type de lecture peut être utilisée comme une forme d'inspection d'un bloc actif ne nécessitant pas d'étendre ses éléments.

La lecture active est une sortie audio obtenue à partir de la navigation libre de l'utilisateur dans l'expression selon les niveaux de granularité spécifiés. Dans la lecture active, nous utilisons les descriptions audio suivantes, qui sont ajoutées au contenu de l'expression à proprement parler.

- « Début », pour indiquer le positionnement au début de la ligne active.
- « Fin », pour indiquer le positionnement à la fin de la ligne active.
- « Première ligne », lorsque l'utilisateur appuie sur $\uparrow$ alors qu'il est sur la première ligne.
- « Dernière ligne », lorsque l'utilisateur appuie sur $\downarrow$ alors qu'il est sur la dernière ligne.
- « Sélectionné », pour accompagner la sélection d'un terme.
- « Puissance », quand une puissance est active. Par exemple : $x^{\boxed{2}}$ produit « Puissance 2 »
- « Base », pour spécifier la fin d'une puissance quand la lecture continue. Par exemple : $\boxed{x^2y}$ produit « x puissance 2, base y »
- « Début/ Fin », ajouté aux parenthèses, crochets et accolades. Par exemple : « Parenthèse début », « Crochet fin »
- « Début/ Fin numérateur »
- « Début/ Fin dénominateur »

Table 6.3 – Exemples de lecture.

Affichage	**Lecture**	**Audio**
$\boxed{2}4$	A	« *Deux* »
$\boxed{24}$	A,P	« $Vingt - quatre$ »
$\boxed{x}(x-1)+2x$	A	« x »
	P	« x, parenthèse début, x moins 1, parenthèse fin, plus $2x$ »
$\boxed{PRODUIT}+2x$	A	« Produit »
	PS	« x, parenthèse début, x moins 1, parenthèse fin »
	P	« x, parenthèse début, x moins 1, parenthèse fin, plus $2x$ »
$\boxed{3}x^2+x+\underline{x^2}$	AM	« *blip* 3 »
$\underline{3\boxed{x}^2}+x+\underline{x^2}$	AM	« *blip* x »
$\underline{3x^{\boxed{2}}}+x+\underline{x^2}$	AM	« *blip* puissance 2 »
	PM	« $3x$ puissance 2, base, x puissance 2, base »

A : Lecture active ; P : Lecture passive ; PS : Lecture passive de la sélection ; AM : Lecture active de termes marqués ; PM : Lecture passive de termes marqués.

On utilise également des *earcons* pour indiquer :

- La frappe d'un caractère non valide.
- Les termes marqués, durant la lecture active.
- Les termes du numérateur, durant la lecture active.
- Les termes du dénominateur, durant la lecture active.

Les caractères non valides sont identifiés par un son similaire au *buzz* utilisé classiquement dans les systèmes d'exploitation, les marques par un son similaire à un *blip*, et les termes dans le numérateur et le dénominateur par des sons respectivement aigu et grave.

Le tableau 6.3 présente plusieurs exemples de lecture audio selon les modalités passive, active, des termes sélectionnés et des termes marqués. Dans ce tableau les termes actifs ont été encadrés, et les termes marqués ont été soulignés.

La visualisation en noir est disponible en deux modalités simultanées : une vue normale où les termes se présentent toujours in extenso, mais où les blocs sémantiques repliés par l'utilisateur sont identifiés par un encadré, et une vue alternative où ces blocs sémantiques sont représentés par leur etiquette.

De cette façon, l'utilisateur voyant peut visualiser les expressions de façon conventionnelle, tout en ayant connaissance des blocs sémantiques repliés par l'utilisateur non voyant, et en même temps il a accès à tout moment à une représentation similaire à ce que l'utilisateur non voyant est en train de visualiser. La figure 6.4 présente un exemple de visualisation synchronisée.

FIGURE 6.3 – Vues synchronisées complète et par blocs.

Vue complète	**Vue par blocs**
$\boxed{x(x-1)} + 2x$	$\boxed{PRODUIT} + 2x$

TABLE 6.4 – Équivalence entre les représentations visuelle et non visuelle.

Élément	**Visuelle**	**Non visuelle**
Terme ou élément actif	Encadré	Lecture active, lecture de termes sélectionnés.
Termes marqués	Souligné	*Earcons* dans la lecture active, commande pour lire les termes marqués.
Blocs sémantiques	Vue normale, vue par blocs	Lecture active par élément individuel ou par blocs.
Commandes	Menu et raccourcis	Menu, raccourcis, sonorisation des commandes.

Le tableau 6.4 présente l'équivalence entre les représentations visuelle et non visuelle du prototype. Nous avons également considéré des options pour augmenter et réduire la taille du texte.

Finalement, les contenus peuvent s'enregistrer en fichier MathML dans leur forme étendue, soit pour les imprimer, les traduire ou les modifier dans d'autres outils.

6.5 Prise en compte des aspects didactiques

Au sein de la salle de classe, les élèves malvoyants ou les non voyants doivent se trouver dans une situation équivalente aux voyants par rapport à la facilité d'exécution des calculs. Afin d'améliorer la performance des élèves ayant une déficience visuelle, nous avons proposé des commandes comme la recherche des termes semblables d'une expression, à utiliser par exemple lors d'une simplification. Bien que cette option pourrait donner un avantage à l'utilisateur malvoyant ou au non voyant par rapport à l'utilisateur voyant qui n'utilise pas le logiciel, il est nécessaire de garantir le fait que c'est à l'utilisateur de choisir entre les termes qui sont susceptibles d'être simplifies et ceux qui ne le sont pas. En fait, bien que il s'agisse probablement d'un avantage qui ne représente pas nécessairement un obstacle pour l'apprentissage, c'est un point à discuter avec les enseignants.

L'utilisation des commandes permettant d'effectuer la transposition automatique d'un terme d'un membre à l'autre et d'ajouter des termes des deux côtés ont été considérés initialement, mais la décision de les implémenter dépendait des opinions des enseignants. Nous avons décidé de ne pas implémenter ces commandes puisqu'elles ne présentent aucun avantage par rapport à l'édition directe de termes que l'élève est censé faire lui même.

Table 6.5 – Besoins identifiés et interactions proposées

Besoin	**Interaction**
Édition	Saisie directe au clavier commun.
Compréhension	Lecture active, granularité adaptable de navigation, affichage par bloc structurel et sémantique, sortie auditive sur demande.
Vue générale de l'expression	Affichage par bloc structurel et sémantique.
Manipulation et suivi	Sélection et suppression par bloc, placement et suppression de marques.
Accès direct et repérage	Recherche libre, recherche de termes, placement et suppression de marques, navigation entre les résultats des recherches et des termes marqués, conservation de la position du curseur par ligne.
Minimisation de la charge de mémoire	Placement et suppression de marques, granularité adaptable de navigation.
Communication et coopération	Affichage, soulignement et sortie audio synchronisés, enregistrement du document dans un fichier.

La pertinence d'utilisation des blocs sémantiques et structurels sera discutée aussi avec les enseignants, ainsi que la façon de verbaliser les caractères sur la sortie audio.

On considère qu'il est important de permettre l'erreur inhérente à l'apprentissage, donc il est prévu que les utilisateurs puissent commettre des erreurs d'opérateur et d'applicabilité, qui pourraient indiquer des défauts dans la compréhension, et qui doivent continuer à être travaillés. D'un autre côté, on essaiera de minimiser les erreurs de copie de termes, et de contrôle des distributions, qui ne sont pas liés à la connaissance correcte ou incorrecte des règles. Dans un premier temps nous avons considérée la notification d'erreurs de syntaxe comme une façon de minimiser les possibles erreurs de saisie.

Les interactions proposées sont présentées sur le tableau 6.5.

La figure 6.4 présente le fonctionnement de l'interface.

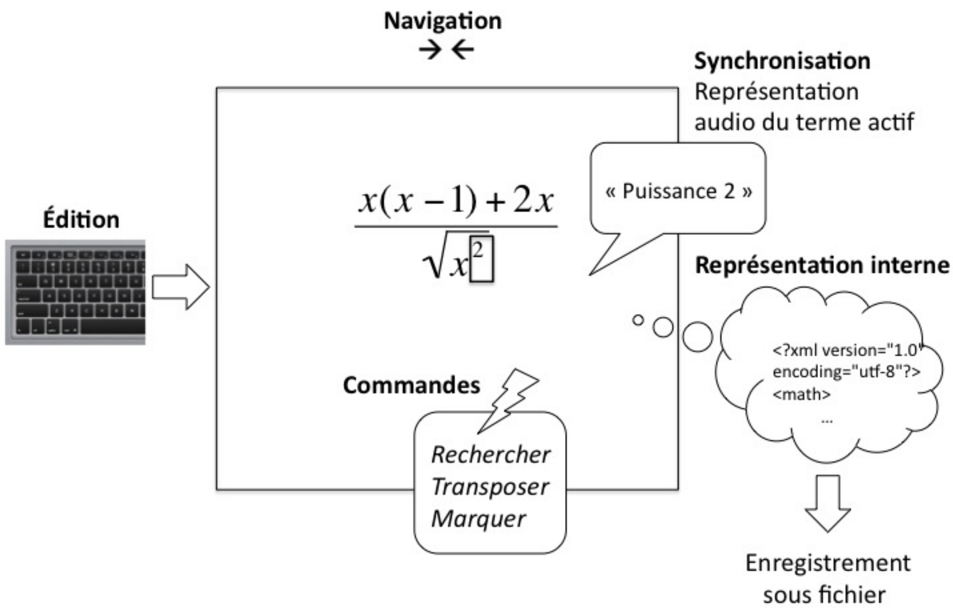


FIGURE 6.4 – Diagramme de fonctionnement de l'interface.

Chapitre 7

Premier prototype

Sommaire

Nous avons développé un premier prototype qui permet l'édition d'expressions, la sélection et la navigation proposées dans le chapitre précédent. Ce premier prototype a pour but d'évaluer les interactions par des élèves et des enseignants dans une interface fonctionnelle, afin de prendre en compte leurs observations et recommandations.

7.1 Implémentation

7.1.1 Outils de développement

Le prototype d'interface a été développé sur la plateforme Mozilla (*Mozilla Application Framework*), une collection de techniques pour le développement d'interfaces multiplateformes. Nous avons utilisé les composant suivants :

- XUL : le langage XML de description d'interfaces graphiques.
- XPCOM *(Cross-Platform Component Object Model)* : une bibliothèque logicielle de composants dont l'utilisation est possible dans différents langages de programmation.

  C++ est le langage de base, mais il existe des *bindings* pour d'autres langages, tels que JavaScript, Java et Python. Nous avons choisi Python pour la communication avec les composants XPCOM, et comme langage de script.

Les expressions sont représentées en MathML de Présentation. Grâce à Gecko, le moteur de rendu de Mozilla, il est possible de visualiser les expressions en noir sous leur forme graphique classique. La représentation interne d'une expression est donc un arbre syntaxique, mais elle est présentée sur l'écran telle qu'on la connaît.

L'interface est composée de 3 composants :

Content. Contient les fichiers math.xul et math.py, qui décrivent respectivement l'interface graphique et le code Python respectivement.

Locale. Contient la définition de chaînes du texte utilisés dans l'application, tels que les étiquettes du menu et les messages. L'application est disponible en français, espagnol et anglais. Les différents langages sont définis par des dossiers qui contiennent les fichiers correspondants selon la langue :
- *fr-FR*
- *es-ES*
- *en-US*

Skin. Les feuilles de style CSS dans lesquelles sont définies caractéristiques graphiques des éléments.

De manière à pouvoir installer facilement l'application, sans installations complémentaires à effectuer, nous avons inclus le module XulRunner.

7.1.2 Architecture logicielle

La conception du système est basée sur l'architecture Modèle-Vue-Contrôleur (MVC), selon laquelle modèle, affichage (vues) et contrôle sont séparés. Nous avons 2 vues : l'une pour l'affichage (vue complète et vue par blocs), l'autre utilisant des modalités non visuelles. Le contrôleur contient des fonctions pour gérer les vues et les modifications sur le modèle et les vues. Cette structure permet de développer et d'entretenir les modules de façon indépendante. Le diagramme d'interaction MVC est présenté dans la figure 7.1.

Nous avons implémenté l'architecture MVC de la façon suivante :

Modèle. Contient les classes qui représentent les contenus et la logique de navigation :

MathDocument permet de lire un document MathML existant et de l'adapter pour l'utiliser dans notre interface.

Expression encapsule le contenu et les propriétés des expressions en MathML qui permet de contrôler leur navigation et affichage. Nous utilisons les attributs suivants pour chacune des branches composant l'arbre.

id : string Les branches, représentés par des étiquettes MathML, ont un identificateur unique.

fold : boolean Indique si une branche est pliée (valeur *True*) ou étendue (valeur *False*).

mark : boolean Indique si un terme est marqué ou non.

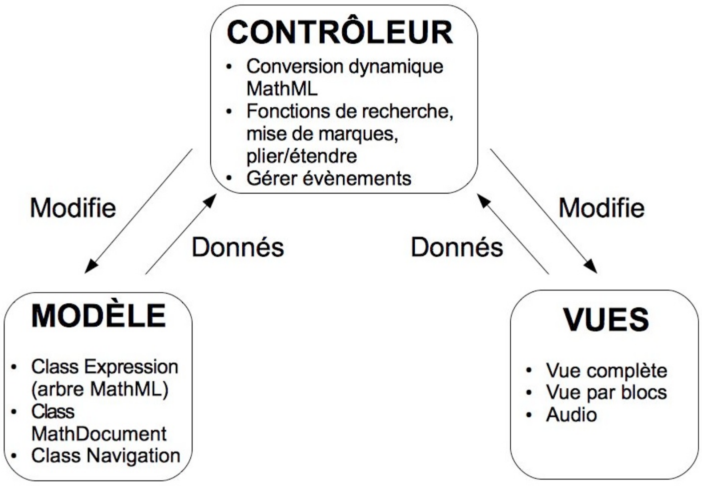


FIGURE 7.1 – Modèle-Vue-Contrôleur (MVC).

Navigation contient la logique de navigation dans l'expression selon les paramètres indiqués par l'utilisateur.

Vue. Contient les classes qui concernent l'affichage dans les différents modalités visuelles et non visuelles supportées : l'affichage en noir dans les modalités complète et en blocs sémantiques, la sortie audio, et d'autres vues comme la sortie braille. Ce module contient aussi les informations graphiques et audio pour indiquer le terme actif, la sélection et les termes marqués.

La sortie visuelle est assuré par Gecko, le moteur de rendu de Mozilla. La sortie audio est implémentée par la construction dynamique d'une chaîne de caractères qui est passé au lecteur d'écran de l'utilisateur.

Le terme actif est indiqué visuellement par la position du curseur, et en audio par la lecture dudit terme ou bloc. Les termes marqués sont indiqués visuellement en rouge, et auditivement par un *earcon*.

Les *earcons* assignés aux erreurs de frappe, aux termes marqués et aux termes du numérateur et du dénominateur utilisent différents tons plus ou moins aigus ou graves.

Contrôleur. Contient les classes et les fonctions qui permettent d'assurer la fonctionnalité des interactions prévues, de gérer les appels aux modules Modèle et Vue, et de modifier leurs contenus. Les fonctions incluent la synchronisation de la sortie visuelle et non visuelle, l'édition d'expressions par la conversion dynamique des saisies de clavier en code MathML, la recherche et la mise de marques sur les termes.

La conversion vers MathML utilise les principes du MathML canonique introduit par [Archambault 2006] (*cf.* p. 36) dans lequel nous organisons les éléments en structures. Par exemple, dans une expression $(x + y)$, les éléments $x, +, y$ sont contenus dans une élément *<mrow>*, qui fait partie du group (, *<mrow>* ,). Dans

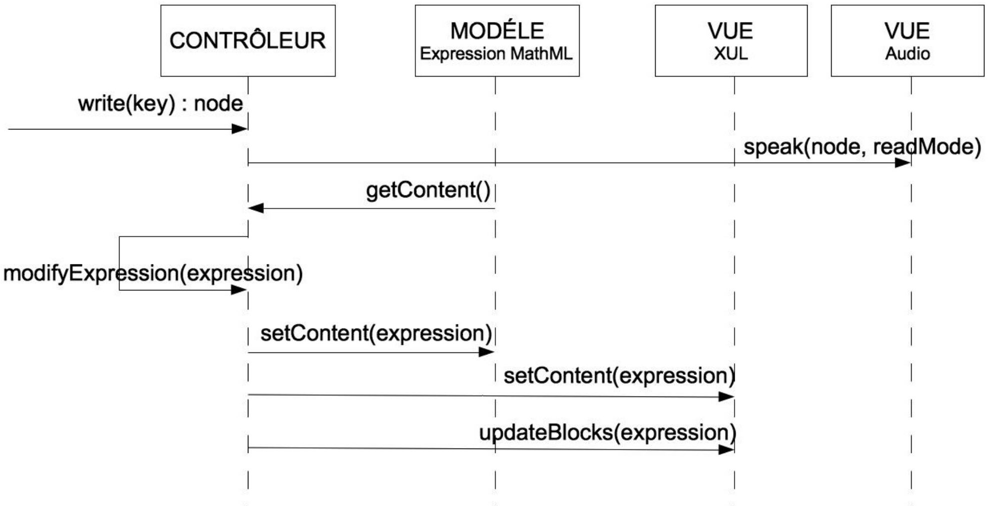


FIGURE 7.2 – Diagramme de séquence pour la saisie d'un caractère valide.

une fraction, nous assurons l'existence d'un groupe spécifique pour le numérateur et l'un pour le dénominateur afin d'éviter des problèmes de syntaxe non valide en MathML.

Un exemple d'exécution des modules MVC est présenté dans le diagramme de séquence de la figure 7.2, qui concerne la saisie d'un caractère valide.

7.1.3 Limitations d'implémentation

Grâce à la plateforme Mozilla, l'interface est multiplateforme et par conséquent elle peut s'exécuter sur les systèmes d'exploitation Windows, Macintosh et Linux. Néanmoins, les logiciels de lecture d'écran dépendent du système d'exploitation et leurs comportements diffèrent en ce qui concerne la lecture d'éléments, entre logiciels, voire entre versions du même logiciel. Afin d'obtenir la sortie auditive souhaitée nous avons implémenté une fonction de composition de chaînes de caractères représentant le contenu mathématique à lire par la synthèse vocale. Pour chaque logiciel de lecture d'écran, il est nécessaire de développer un script pour adapter le comportement de ce logiciel à nos besoins, et notamment de permettre la lecture de ces chaînes.

Pour nos expérimentations, il nous était nécessaire de pouvoir travailler dans l'environnement Windows. Nous avons choisi d'utiliser NVDA *(Non Visual Desktop Access)* car il est gratuit et OPenSOurce, et par conséquent nous pouvons adapter le code en fonction de nos bésoins. Nous avons donc implémenté le script, en Python, permettant d'adapter NVDA à notre application.

7.1.4 Interface graphique

L'interface graphique est divisé en 5 zones (figure 7.3) :

1. Menus.

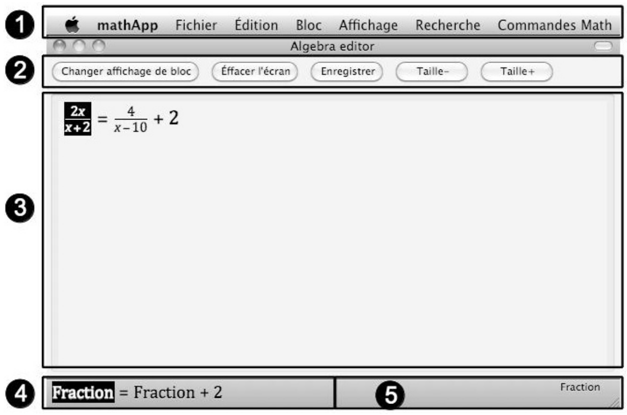


FIGURE 7.3 – Sections de l'interface graphique.

2. Barre d'outils.
3. Vue complète.
4. Vue par blocs sémantiques.
5. Chaîne de caractères pour la sortie audio.

Dans l'équation que nous utilisons en exemple dans la figure 7.3 nous pouvons observer que les fractions des deux membres sont pliées. La vue complète occupe l'espace principal de l'interface graphique. Dans cette vue, nous pouvons regarder tous les termes de l'expression. cette vue, tous les termes de l'expression sont visibles, et le terme actif, ici un bloc de fraction, apparaît en inversion vidéo.

La vue alternative par blocs, en bas de l'interface, montre l'expression avec les fractions pliées : $\boxed{FRACTION} = FRACTION{+}2$, , ainsi que la selection du terme actif. Le texte de la sortie audio du terme actif, « *Fraction* », peut être visualisé en bas à droite.

7.2 Études pilote

Nous avons mené des études pilote avec des élèves et des étudiants déficients visuels, ainsi que des enseignants de mathématiques, afin d'évaluer les interactions proposées pour l'édition, la navigation et la lecture audio de termes implémentées dans le premier prototype. Nous avons également discuté la pertinence des fonctions auxiliaires avec les enseignants, avant de poursuivre le développement.

7.2.1 Aspects évalués

Édition d'expressions

- Facilité de saisie des exposants et des fractions.
- Perception et récupération d'erreurs de frappe de caractères non valides.
- Prévention des erreurs : notification des erreurs de syntaxe.

Lecture et compréhension

- Lecture d'exposants et des fractions.
- Compréhension de la structure des fractions.
- Pertinence d'utilisation des *earcons* et des indices lexicaux.
- Éfficacité de la navigation et de la lecture par blocs sémantiques.

Commandes Discussion avec les enseignants sur la pertinence des commandes pour la recherche de termes, la transposition et l'application d'une opération des deux côtés d'une équation, à considérer pour la décision de leur implémentation.

7.2.2 Participants

- 5 enseignants de mathématiques, dont seulement un a travaillé avec des élèves non voyants.
- 3 élèves de lycée, dont 1 malvoyant (16 ans) et 2 non voyants (15 et 17 ans). L'élève malvoyant n'a pas besoin du lecteur d'écran et il ne connait pas le braille mathématique. Les 2 élèves non voyants sont en train d'apprendre le braille mathématique ; ils utilisent un ordinateur et une plage braille pour faire des mathématiques.
- 3 non voyants, dont 2 étudiants (30 ans) et un diplômé (30 ans). Tous trois ayant des connaissances d'algèbre. Un des étudiants et le participant diplômé utilisent LaTeX, et l'autre étudiant utilise Word pour faire des mathématiques. Ils utilisent un ordinateur et une plage braille.

7.2.3 Protocole

Les tests pilote ont été réalisés en plusieurs séances, au cours desquelles nous avons proposé aux élèves et aux étudiants différents exercices, selon leur disponibilité.

7.2.3.1 Exercices pratiques

Nous avons demandé aux élèves et aux étudiants de réaliser des tâches d'édition et de compréhension d'expressions, afin d'observer l'efficacité des interactions proposés et les éventuelles difficultés. Les tâches ont été réalisées de façon individuelle ; les participants, élèves et étudiants, ont utilisé l'interface à tout moment. Nous avons encouragé les participants à exprimer les difficultés perçues, et nous avons discuté avec eux des alternatives de solution.

Las tâches impliquent l'édition, la navigation et la lecture audio de termes. Les exercices ont été organisés en 3 étapes :

Entraînement Durant cette étape les participants apprennent à saisir des exposants et des fractions de façon pratique, depuis les instructions de l'observateur. Nous leur indiquons les raccourcis pour les exposants et la sélection de termes pour la mise en forme des fractions.

Exercices :

1. Saisir x^2
2. Saisir $2x + x^2 - 5y^3$
3. Saisir $\frac{1}{2}$, puis annuler la fraction.
4. Saisir $\frac{x}{y}$

Écriture Saisir les expressions ci-dessous.

1. x^2y^3
2. $(x-5)^2$
3. $\frac{x}{2}(4+8) = 5(\frac{x}{4}+3)$

Lecture et compréhension

1. Trouver les termes en x dans l'expression $2(x^3 + y^2 + 5x + 2y - 2x)$.
2. Démonstration des fonctions pour étendre et plier les termes complexes de l'expression.
3. Analyser, puis décrire à l'oral la structure des fractions suivantes :
   (a) $\dfrac{x+1}{x-1}$
   (b) $\dfrac{a+\frac{b}{c}}{d+e}$
   (c) $\dfrac{\frac{a+b}{c+d}}{x-y}$

Les tests ont été réalisés sur un ordinateur PC avec le système d'exploitation Windows NT, et le lecteur d'écran NVDA.

7.2.3.2 Interviews avec les enseignants

Nous avons discuté avec les enseignants les aspects suivants :

Compréhension. Afin de savoir comment nous pouvons vérifier si les élèves ont compris une expression, pour le prendre en compte dans nos tests.

Lecture. Suite à la démonstration individuelle de l'interface aux enseignants, nous avons discuté la vocalisation proposée des blocs sémantiques, ainsi que la lecture de termes en général. Nous avons demandé aux enseignants de faire la dictée des expressions qui pourraient être ambiguës à l'oral, tels que $\frac{x+1}{x-1}$, $x+\frac{x+1}{x-1}$, et $x+\frac{1}{x}-1$, afin de trouver des indices pour désambiguïser la lecture.

Commandes. Nous avons discuté la pertinence didactique de la recherche de termes, la transposition et l'application d'une opération des deux côtés, afin de prendre des décisions sur leur implémentation.

7.2.4 Résultats

7.2.4.1 Édition

Facilité de saisie d'exposants et des fractions. L'élève malvoyant a eu peu de problèmes pour la saisie d'exposants et la mise en forme de fractions. Il a appris les raccourcis très vite.

Démarche du participant malvoyant dans la saisie de $\frac{x}{y}$ durant l'entraînement :
- Saisie de « xy » (il ne spécifie pas le symbole de division).
- Sélection des termes.
- Raccourci *Ctrl /* $\rightsquigarrow$ Message « *Opération impossible* ».
- L'observateur indique qu'il manque le signe de division.
- Saisie du symbole de division.
- Sélection de termes à nouveau.
- Raccourci *Ctrl /* $\rightsquigarrow$ Obtention de $\frac{x}{y}$

Après l'entraînement, l'élève non voyant, un bon brailliste, a commenté qu'il n'est pas habitué à saisir les puissances par des raccourcis, mais il pourrait apprendre facilement. Comme il est habitué en général à l'utilisation de marques de blocs pour définir le début et la fin de puissances, fractions et racines, il préférerait de mettre le symbole d'exposant, et utiliser des blocs quand nécessaire. Bien qu'il ait réussi à saisir des fractions en utilisant les interactions proposés, nous avons observé que la mise d'une fraction dans sa structure bidimensionnelle par cette méthode n'a pas beaucoup de sens pour les utilisateurs non voyants, car en utilisant cette méthode le résultat est visuel mais l'utilisateur non voyant n'arrive pas à trouver le rapport avec l'écriture conventionnelle de la fraction.

Les étudiants ont eu une opinion unanime sur l'utilité de la sélection par niveau.

Perception et récupération d'erreurs de frappe. Les élèves ont facilement perçu les erreurs de frappe grâce au *earcon* d'erreur qui accompagné la lecture du caractère non valide ; par exemple : « *buzz, e accent aigu* », mais dans tout les cas ils s'attendaient à ce qu'un caractère soit produit, en effet ils ont immédiatement appuyé sur la touche *backspace* pour essayer de l'effacer, ce qui aboutissait à l'élimination du dernier caractère valide. Par conséquent, il est nécessaire d'avoir une sortie visuelle même pour les caractères non valides, même s'ils ne s'associent pas sémantiquement à l'arbre de l'expression.

Notification d'erreurs de syntaxe. La notification d'erreurs de syntaxe ne convient pas dans l'édition dynamique parce qu'à un moment donné l'expression sera syntaxiquement incomplète, par exemple avant de spécifier la fermeture d'un bloc de parenthèses, ou dans la résolution d'une addition de fractions, pour laquelle on commence par saisir le dénominateur commun, puis on traite le numérateur. Par conséquent, nous avons décidé de n'éffectuer qu'une validation d'erreurs de syntaxe du code MathML, qui causent des erreurs d'affichage par le moteur de rendu, et de ne pas traiter les erreurs de syntaxe de l'utilisateur.

7.2.4.2 Lecture et compréhension

Les participants ont mentionné que la lecture audio d'exposants est compréhensible. Le début et la fin des puissances est perçue de façon claire. La granularité d'affichage et la navigation a été plus apprécié par les étudiants que par les élèves.

L'un des élèves non voyant a trouvé les termes en x en utilisant la lecture passive de l'expression complète. Il n'a pas utilisé les flèches pour naviguer dans l'expression.

La lecture audio de fractions par audio est possible mais cela nécessite plusieurs répétitions. Les élèves non voyants ont décrit correctement la structure des fractions d'exemple, de la plus simple a la plus complexe, mais il a fallu qu'ils lisent la fraction plusieurs fois. Afin de comprendre la structure, l'un des élèves non voyants a utilisé l'affichage granulaire, en particulier niveau par niveau.

Voici un exemple de description de la fraction $\frac{a+\frac{b}{c}}{d+e}$ par un élève non voyant : « *le premier numérateur : a + encore une autre fraction,* $\frac{b}{c}$*, fin de la première fraction, le tout sur* $d+e$*, dénominateur.* »

Lors de la lecture des fractions emboîtés, un participant non voyant a manifesté que c'est un peu compliqué de comprendre les fractions emboîtés par l'audio. Il a eu besoin d'écouter plusieurs fois ; de plus, il a trouvé difficile de distinguer entre les 2 dénominateurs.

Concernant la navigation dans la fraction, un élève a exprimé : « *c'est très compliqué ; en fait le problème c'est quand il faut sortir du dénominateur ... je considère tout comme un caractère mais ici je ne vois pas de caractère* ». En lui demandant une lecture alternative de la fraction d'exemple 3c , il a proposé : « *ouverture de bloc, ouverture de bloc,* $a+b$ *fermeture de bloc, sur, ouverture de bloc,* $c+d$ *fermeture de bloc, fermeture de bloc, sur, ouverture de bloc,* $x-y$*, fermeture de bloc* ».

Un autre élève non voyant a aussi manifesté que c'est difficile de savoir quand il a « quitté » une fraction, parce que, bien que nous utilisons des *earcons* pour les éléments du numérateur et dénominateur, dans la forme visuelle d'une fraction il n'y a pas de délimiteurs pour indiquer le début et la fin. Il trouve que l'indication de début et fin de fraction est utile, mais le début de dénominateur est redondant. Les *earcons* pour indiquer les termes dans le numérateur et le dénominateur sont également redondants et ils peuvent fatiguer au lecteur. Il faut plutôt améliorer la prosodie dans la lecture des fractions.

Lors de la lecture séquentielle de plusieurs termes, la prosodie est très importante pour indiquer le groupement de termes ou de sous expressions. D'un autre côté, nous avons détecté des difficultés pour comprendre des mots nasales tels que « *moins* » et « *fin* ».

Les élèves non voyants s'accordent pour dire qu'en général il est difficile d'imaginer des choses en utilisant juste l'audio, et que l'utilisation du braille rendrait la lecture beaucoup plus facile. L'un des étudiants a exprimé le fait qu'il utilise l'audio uniquement en combinaison avec le braille. Il trouve très difficile de se concentrer s'il n'y a que l'audio : « *L'audio seul n'est pas parfait, la plage braille seule n'est pas parfaite. J'utilise les deux.* »

7.2.4.3 Vérifier la compréhension d'expressions

Concernant la vérification de la compréhension d'expressions par les élèves, les enseignants ont mentionné que, à la base, comprendre une expression implique de reconnaître les symboles, de comprendre leur organisation dans la formule, et de savoir la résoudre.

L'enseignant qui a de l'expérience dans le travail avec des élèves non voyants a commenté : « *Je peux lui demander de re-lire l'énoncé dans l'intonation pour savoir s'il comprend bien les blocs dans un calcul, puis après je regarde comme il démarre, c'est là qu'on voit s'il a compris l'énoncé, c'est comme il démarre la réponse* ». Un enseignant a commenté que quand il faut expliquer quelque chose aux élèves, tout n'est pas censé être expliqué sur la feuille ou sur l'outil, mais les étudiants utilisent leurs connaissances précédentes pour comprendre le type d'équation avec laquelle ils travaillent.

Un enseignant qui a commencé récemment à travailler avec des élèves non voyants a commenté : « *Je suis assez surpris souvent, de voir qu'ils peuvent y avoir des difficultés de nature mathématique, mais pas plus que leurs camarades voyants ... ils bloquent sur des choses sur lesquelles les voyantes bloquent aussi, parce que, interpréter une écriture mathématique c'est une difficulté en soi, qu'on soit voyant où qu'on ne le soit pas.* »

7.2.4.4 Sur la lecture littérale et sémantique

Nous avons montré aux enseignants la façon dont l'interface lit les caractères individuels et les blocs sémantiques. Ils étaient d'accord sur la nécessité de lire les blocs par leur étiquette sémantique, plutôt que de lire seulement « BLOC ». Par exemple, dans le cas des fractions la structure est aperçue immédiatement de façon visuelle, donc si on veut communiquer immédiatement à l'oral qu'il s'agit d'une fraction, il faut le dire.

Parfois la lecture d'expressions, soit dans une dictée ou lors de l'explication d'un exercice, dépend du domaine mathématique. Un exemple c'est la lecture de parenthèses et crochets. Les parenthèses peuvent indiquer la présence d'un facteur comme $4(x)$, ou bien décrire une fonction $f(x) = ...$ Les crochets sont utilisés souvent pour indiquer une deuxième niveau d'imbrication d'une expression, par exemple $4[x + y(x + y)]$, pour indiquer des intervalles $[a; b]$ ou définir des matrices : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Parfois même la lecture d'un symbole dans un même domaine peut se lire de façon différente. Par exemple le symbole [peut signifier « *intervalle ouvert* » ou « *intervalle fermé* » selon la position dans l'expression : Dans $]a; b[$ le crochet fermé signifie un intervalle ouvert, et dans $[a; b]$ signifie un intervalle fermé. Un enseignant explique :

> *Si je dis « crochet ouvert », souvent ça ne veut rien dire, on parle plutôt d'intervalle ouvert, donc il y a « intervalle ouvert à gauche », « intervalle ouvert à droite », « intervalle fermé », là ça commence à prendre du*

> *sens. D'expérience un crochet ouvert ça n'a pas le même sens pour tous, suivant qu'on l'envisage dans un début d'intervalle ou un fin d'intervalle. Bien souvent, il y a des incompréhensions dues a des mots qui prennent une définition différente selon le placement des éléments mathématiques. Pour les élèves qui arrivent en seconde, un crochet ouvert c'est un crochet qui bien souvent est tourné vers leur gauche ... et en fait, du coup dans le cas d'un intervalle fermé, quand ils arrivent au deuxième crochet de l'intervalle, ils ne comprennent plus pourquoi on appelle ça crochet fermé ; c'est un crochet ouvert– enfin, tourné vers la gauche mais qu'on appelle « fermé ».*

Un enseignant a commenté que passer par l'audio pour des formules de mathématiques c'est très intéressant, mais assez limité parce que les mots « *s'envolent* ». Il a mentionné que sous les doigts la lecture braille permet de prendre connaissance des formules sans doute, sans erreur : « *Par exemple, la présence des blocs en braille mathématique ; si on veut obtenir la même chose a l'oral il va falloir déjà déployer beaucoup de réflexion pour être sûr de formuler les choses de façon précise, sans rien oublier, en anticipant bien des erreurs possibles, et ça va être très fastidieux ; parce qu'on va devoir utiliser parfois plusieurs mots supplémentaires de façon à préciser les choses.* »

En général les fractions sont compliquées à décrire à l'oral, mais dans la façon de dicter des enseignants nous avons observé qu'il utilisent des indices lexicaux tels que « *le tout sur* », mais surtout ils utilisent des pauses afin de communiquer la séparation de blocs. Par exemple : « *À l'oral moi je dirai pas de la même façon « $x+1$, sur, $x-1$ », que « $x+$, 1 sur x, -1 », j'aurais tendance à ne pas mettre la pause au même endroit.* » Un autre enseignant a commenté : « *je vais dire « $x+$ ... », alors parfois je note un arrêt , je vais parfois dire « $x+ ...x+1$, sur, $x-1$ », mais là aussi, suivant la façon dont je vais le dire, ça peut porter une ambiguïté ; ce n'est pas aussi clair que l'utilisation des blocs à l'écrit* ». Les exemples précédents confirment l'importance de la prosodie dans la lecture orale.

Un enseignant a réfléchi sur son discours oral lorsqu'il écrit des exercices ou les explique sur le tableau. Il a décrit la dictée des fractions à un élève non voyant de la façon suivante : « *je dis « on tire une barre de fraction, je te dicte le numérateur, je te dicte le dénominateur », lui il ne tire pas la barre de fraction, j'imagine* ».

L'enseignant qui a de l'expérience avec des élèves non voyants a recommandé que la lecture suive le principe de blocs, de façon similaire au braille :

> *Quand on réfléchit à une synthèse vocale qui énoncera des formules mathématiques, il me semble que le mieux serait de trouver une formule spécifique à l'ouverture des blocs et à la fermeture des blocs : « bloc ouvert, $x+1$, bloc fermé, symbole de fraction, bloc ouvert, symbole de racine carrée, bloc ouvert, $x+1$, bloc fermé, -6 bloc fermé ».*

Il est clair que le braille mathématique écrit permet une meilleure validation qu'à l'oral, parce que l'oral comporte des ambiguïtés quant à la signification.

7.2.4.5 Pertinence des commandes

Nous avions considéré la recherche comme un outil pour accélérer la simplification des termes en facilitant le repérage de termes semblables, suivi par la commande *Additionner coefficients* comme une action complémentaire à la recherche. Les enseignants considèrent utile l'implémentation de la recherche de termes, mais surtout pour faciliter le repérage de termes ou bien pour des aspects informatifs, par exemple pour savoir combien de termes en x sont présents. Voici quelques exemples.

$\underline{4x} + 7 + \underline{3x}$	Dans cet exemple les résultats de la recherche peuvent être additionnés.
$\underline{4x} - (\underline{-3x} + 7)$	Dans un tel scénario la simplification de termes n'est pas possible, car les résultats de la recherche indiquent qu'il existe un terme en x dans des parenthèses, et que ces parenthèses n'ont pas été traitées. Néanmoins, la recherche a servi au repérage des termes en x.

Un enseignant a recommandé de présenter les résultats de la recherche de façon séquentielle afin que l'utilisateur puisse décider quoi faire de ces résultats.

Les actions de transposer des termes et d'ajouter des termes des deux côtés d'une équation peuvent être facilement effectuées par l'édition directe, donc leur implémentation n'est pas nécessaire. D'un autre côté, les enseignants ont confirmé le besoin de pouvoir marquer des termes.

7.2.5 Améliorations et décisions d'implémentation

Les résultats d'observation, ainsi que les retours des utilisateurs –élèves, étudiants et enseignants–, nous ont permis, d'une part, de valider un certain nombre de fonctionnalités de notre prototype, par exemple la lecture littérale des caractères et des étiquettes de blocs sémantiques. D'autre part ils ont fait émerger un certain nombre de fonctions qui nous semblent importantes pour améliorer notre application, et que nous avons souhaité implémenter dans la seconde version du prototype. En voici les principales :

- Édition : Produire une sortie visuelle lors de la frappe de caractères non valides.
- Modifier la méthode de saisie des fractions, en prenant compte la façon habituelle d'écrire des élèves non voyants. Nous proposons une saisie linéaire en utilisant des délimiteurs de début et de fin de bloc présents comme caractères éditables et sur lesquels on pourra naviguer.
- Améliorer la prosodie dans la lecture par la révision des pauses.
- Éliminer les *earcons* de la lecture des fractions. Le début et la fin de fraction seront indiqués par les délimiteurs de bloc.
- Implémentation de la saisie et de la sortie braille. Depuis les commentaires d'élèves, d'étudiants et d'enseignants, le braille rend la lecture et le travail avec des mathématiques beaucoup plus facile.

En revanche, la discution avec les enseignants nous a conduit à ne permettre aucune transformation automatique. Ainsi nous avons décidé de ne pas implémenter les commandes de type « transposer », « ajouter des termes » car elles ne sont pas souhaitables dans une utilisation didactique. L'utilisateur, élève ou enseignant, doit réaliser les transformations de façon manuelle, de la même façon qu'ils sont habitués à le faire sur le papier ou sur la ligne braille. Les fonctions additionnelles de support ne doivent servir qu'à faciliter l'accès aux termes et le repérage.

Chapitre 8

Deuxième prototype

Sommaire

8.1 Implémentation

Dans cette seconde étape nous avons implémenté une nouvelle version du prototype, en tenant compte des résultats de l'étude pilote : les amélioration mentionnées à la fin du chapitre précédent, de nouvelles commandes d'aide à la résolution et la sortie braille.

8.1.1 Modifications à l'édition

Nous avons modifié la méthode de saisie des fractions et des racines afin d'implémenter une saisie qui corresponde mieux au modèle mental de l'utilisateur. Pour cela nous utilisons des délimiteurs de début et de fin. Il s'agit de caractères éditables et navigables qui sont visibles dans toutes les vues, aussi bien les non visuelles que la vue graphique bidimensionnelle. D'autre part, dans la représentation des fractions en MathML la barre de fraction, entre numérateur et dénominateur, n'est pas explicitement présente comme un élément fils de l'élément `<mfrac>`, qui représente la fraction (voir figure 8.1.1). Néanmoins il nous paraît nécessaire de l'inclure dans les affichages, de la même façon que les délimiteurs de début et de fin, c'est à dire sous

Fraction $\frac{1}{2}$		**Racine $\sqrt{x+1}$**	
`<mfrac>`	Étiquette de fraction	`<msqrt>`	Étiquette de racine
`<mn> 1 </mn>`	Numérateur	`<mi> x </mi>`	Contenus
`<mn> 2 </mn>`	Dénominateur	`<mo> + </mo>`	...
`</mfrac>`		`<mn> 1 </mn>`	
		`</msqrt>`	

FIGURE 8.1 – Représentation MathML des fractions et des racines

Fraction $\frac{1}{2}$	**Racine $\sqrt{x+1}$**
$\frac{\langle 1/}{2\rangle}$	$\sqrt{\langle x+1\rangle}$

FIGURE 8.2 – Affichage graphique bidimensionnel des fractions et racines

la forme d'un caractère – le caractère de division « / »– éditable et navigable. Il sera de même aussi visible sur l'affichage graphique bi-dimensionnel.

De façon similaire, le symbole de racine qui encadre les contenus n'est pas un élément fils de l'élément <msqrt>, qui représente une racine carrée (voir aussi la figure 8.1.1). Dans ce prototype, le début et la fin de la racine sont indiqués par les caractères de début et de fin de racine.

Dans notre version 2 du prototype, la saisie des fractions et des racines carrées peut s'effectuer de 3 façons différentes (voir tableau 8.1) :

- Par la saisie de raccourcis claviers qui insèrent les délimiteurs sémantiques de structure puis l'utilisateur va remplir les contenus.
- Par la saisie séquentielle, en utilisant des délimiteurs sémantiques, ceux-ci seront saisis en même temps que le contenu.
- Par la saisie séquentielle, en utilisant des symboles de début et de fin de blocs, qui seront de même saisis en même temps que le contenu. Ces symboles ne contiennent pas d'information sémantique. Contrairement aux deux précédentes méthodes qui produisent un affichage bidimensionnel, celle-ci produit, sur la vue complète, un affichage linéaire, similaire au braille.

La sortie audio des délimiteurs nécessite des indices lexicaux : « *Frac début* », « *Fin frac* », « *Racine début* », « *Fin racine* ». La sortie audio des délimiteurs non sémantiques est : « *Bloc début* », « *Bloc fin* ». La lecture active est aussi améliorée car les délimiteurs de début et de fin sont navigables, c'est à dire que, comme pour tout autre symbole de l'expression, on peut y placer le curseur, les sélectionner, les copier.

Les délimiteurs visuels sémantiques de début et de fin de bloc sont affichés pour garder une correspondance visuelle avec le braille et l'audio.

Les frappes non valides sont indiquées par le caractère « ? » accompagné par l'*earcon* prévu, afin que l'utilisateur puisse le reconnaître comme un erreur.

TABLE 8.1 – Protocoles de saisie des fractions et des racines.

Saisie de $\frac{x+4}{2}$:

- Saisie en utilisant des raccourcis :
  - « Ctrl / » $\rightsquigarrow \frac{\boxed{\langle}/}{\rangle}$, le curseur est au début du numérateur.
    Suivant l'insertion, il faut indiquer que le curseur est sur la fraction et pas à la fin.En plaçant le curseur sur le symbole de début de fraction, la synthèse vocal produit la lecture « Frac début ». Nous avons choisi cette option sur le plaçement du curseur sur le symbole de division, parce que dans ce cas là, la sortie audio produite c'est « sur », ce qui donne l'idée que le curseur est au milieu de la fraction.
  - Déplacer le curseur avec les touches fléchées jusqu'au symbole suivant « / » $\rightsquigarrow \frac{\langle\boxed{/}}{\rangle}$
  - Saisir $x+4 \rightsquigarrow \frac{\langle x+4\boxed{/}}{\rangle}$
  - déplacer le curseur avec les touches fléchées jusqu'au symbole suivant $\rightsquigarrow \frac{\langle x+4/}{\boxed{\rangle}}$
  - Saisir $2 \rightsquigarrow \frac{\langle x+4/}{2\boxed{\rangle}}$
- Saisie séquentielle en utilisant les délimiteurs sémantiques :
  - Sélectionner dans le menu : Insertion>Fraction>Début $\rightsquigarrow \langle\boxed{}$
  - Saisir $x+4/2 \rightsquigarrow \langle x+4/2\boxed{}$
  - Sélectionner dans le menu : Insertion>Fraction>Fin $\rightsquigarrow \frac{\langle x+4/}{2\rangle}\boxed{}$
- Saisie séquentielle en utilisant les délimiteurs non sémantiques :
  - Sélectionner dans le menu : Insertion>Symbole>Bloc début, ou taper le début de bloc en braille (seulement possible sur le clavier d'un afficheur Braille)$\rightsquigarrow \langle\boxed{}$
  - Saisir $x+4 \rightsquigarrow \langle x+4\boxed{}$
  - Sélectionner dans le menu : Insertion>Symbole>Bloc fin, ou taper la fin de bloc en braille $\rightsquigarrow \langle x+4\rangle\boxed{}$
  - Saisir $2 \rightsquigarrow \langle x+4\rangle/2\boxed{}$

Les délimiteurs sémantiques « $\langle$ » et « $\rangle$ » représentent respectivement les symboles « Frac début » et « Fin Frac ».

Saisie de $\sqrt{x+1}$:

- Saisie en utilisant des raccourcis :
  - « Ctrl r » $\rightsquigarrow \sqrt{\boxed{\langle}\rangle}$, le curseur est au début de la racine , bouger avec les flèches au symbole suivant « $\rangle$ » $\rightsquigarrow \sqrt{\langle\boxed{\rangle}}$
  - Saisir $x+1 \rightsquigarrow \sqrt{\langle x+1\boxed{\rangle}}$
- Saisie séquentielle en utilisant les délimiteurs sémantiques :
  - Sélectionner dans le menu : Insertion>Racine>Début $\rightsquigarrow \langle\boxed{}$
  - Saisir $x+1 \rightsquigarrow \langle x+1\boxed{}$
  - Sélectionner dans le menu : Insertion>Racine>Fin $\rightsquigarrow \sqrt{\langle x+1\rangle}\boxed{}$
- Saisie séquentielle en utilisant les délimiteurs non sémantiques :
  - Sélectionner dans le menu : Insertion>Symbole>Racine, ou taper le symbole de racine en braille $\rightsquigarrow \surd\boxed{}$
  - Sélectionner dans le menu : Insertion>Symbole>Bloc début, ou taper le début de bloc en braille $\rightsquigarrow \surd\langle\boxed{}$
  - Saisir $x+1 \rightsquigarrow \surd\langle x+1\boxed{}$
  - Sélectionner dans le menu : Insertion>Racine>Fin $\rightsquigarrow \surd\langle x+1\rangle\boxed{}$

Les délimiteurs sémantiques « $\langle$ » et « $\rangle$ » représentent respectivement les symboles « Racine début » et « Fin Racine ».

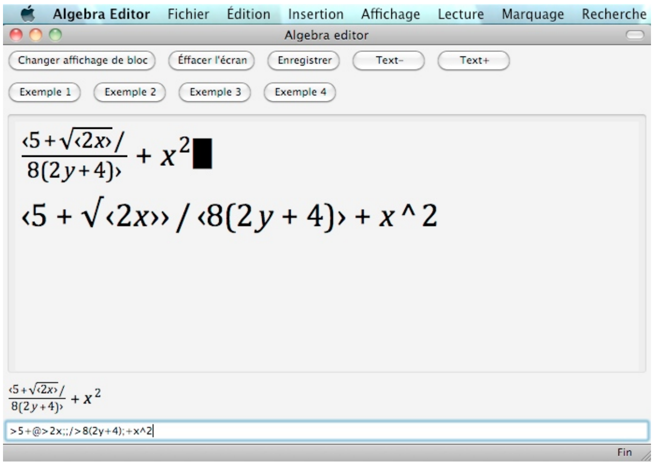


FIGURE 8.3 – Saisies bidimensionnelle et linéaire, et leur correspondant représentation braille.

8.1.2 Édition et affichage braille

Nous avons donc implémenté la saisie et la sortie braille, comme une vue supplémentaire dans notre architecture MVC. Cette implémentation est basée sur un tableau de conversion des symboles en noir vers les symboles du code braille mathématique.

Les équations saisies au clavier peuvent être visualisées en braille. Il est possible également d'effectuer la saisie en utilisant le clavier braille de la plage braille (sur les terminaux braille munis de clavier). Au présent, la conversion bidimensionnelle automatique des contenus saisis via le clavier braille n'est pas implémentée.

L'implémentation braille est très basique : la lecture et la saisie sont possibles mais les possibilités d'interaction par la plage ne peuvent pas se comparer à celles du clavier d'ordinateur, tels que la sélection par braille avec le soulignage correspondante dans la vue graphique.

La figure 8.3 [1] présente un exemple d'expression dans les modalités bidimensionnelle et linéaire, y compris la sortie braille, dont les caractères ASCII qui sont passés à l'appareil braille sont présentés en bas. La représentation braille de la première et de la deuxième ligne sont identiques.

8.1.3 Implémentation des commandes

Les commandes d'aide à la résolution sont des fonctions destinées à fournir une aide aux utilisateurs, pour compenser l'impossibilité d'utiliser des graffitis ou d'utiliser le papier comme mémoire temporaire. Selon la tâche à réaliser, l'utilisateur les utilisera s'il le souhaite, et de la façon qui l'aide le plus. Il ne s'agit pas de fonctions de résolution automatique.

1. Les copies d'écran de l'interface présentée ici ont été faites sur le système Mac OS X Snow Leopard.

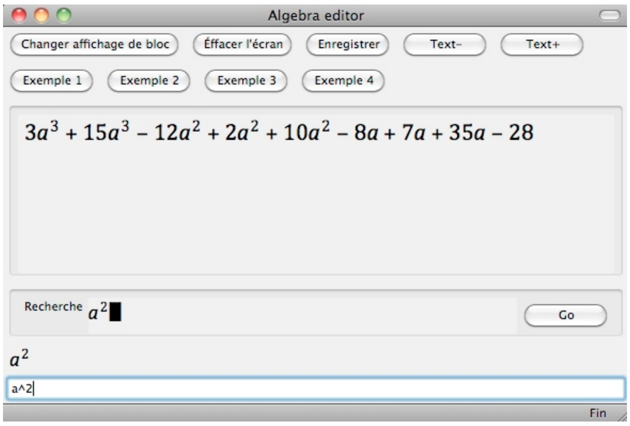


FIGURE 8.4 – Recherche libre de termes.

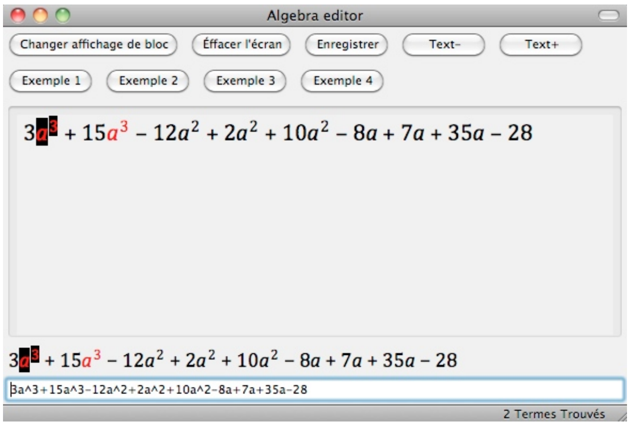


FIGURE 8.5 – Recherche de termes semblables.

Nous avons implémenté 2 fonctionnalités de recherche de termes complémentaires, une recherche libre et une recherche de termes semblables, ainsi que le placement de marques sur les termes.

La recherche libre s'effectue dans une boîte de dialogue où l'utilisateur doit spécifier le terme ou le fragment d'expression à rechercher (voir figure 8.4).

La recherche de termes semblables, quand à elle, s'effectue sur la ligne de l'expression. L'utilisateur sélectionne l'exposant à partir duquel les termes semblables seront recherchés. Un raccourci clavier permet alors de déclencher la recherche des termes semblables à celui sélectionné. Le nombre de résultats est énoncé en audio et il apparait dans la barre de statut, tandis que le curseur est placé sur le premier de ces résultats. (voir figure 8.5).

Dans les deux types de recherche, les résultats sont automatiquement marqués. Les résultats des recherches, ainsi que les termes marqués manuellement, sont visualisés graphiquement par un souligné rouge, et auditivement par l'*earcon* qui accompagne la lecture du terme marqué. Des raccourcis clavier sont implémentés pour naviguer entre ces résultats.

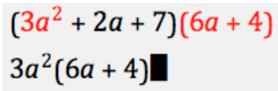


FIGURE 8.6 – Placement de marques utilisés dans une distribution.

Le placement manuel de marques nécessité d'avoir préalablement sélectionné les termes à marquer. La suppression des marques peut s'effectuer individuellement de façon manuelle, ou bien globalement pour tous les termes de la ligne. La lecture et la copie de termes marqués est possible par des raccourcis clavier, indépendamment de la position du curseur. Le placement de marques fonctionne comme une sélection persistante de termes, et la sélection multiple de termes non contigus est également possible. Dans l'exemple de la figure 8.6, le placement de marques sur des éléments non contigus est utilisé pour indiquer les produits terme-facteur dans une distribution. Les termes $3a^2$ et $(6a+4)$ sont marqués sur la première ligne, puis copiés d'un seule geste avec le raccourci de copie des termes marqués, et finalement collés dans la deuxième ligne.

Pour permettre leur affichage graphique correct dans la vue complète, les symboles utilisés comme délimiteurs de blocs, barre de fraction et caractère racine sont insérés explicitement dans le DOM correspondant au code MathML de l'expression, comme des éléments fils des éléments `<mfrac>` et `<msqrt>`. Lorsque les expressions sont enregistrées, dans un fichier, ces symboles sont supprimés, afin de respecter le standard de représentation de MathML. De même, les attributs *fold, mark* sont aussi supprimés, seul l'attribut « id », qui est valide dans le format MathML, est conservé. Ces fichiers peuvent être utilisés dans autres logiciels utilisant ce format, par exemple ils peuvent être importés dans un fichier OpenOffice pour des modifications ultérieures, ou bien comme fichier source de transcription sur NAT Braille.

Finalement, nous avons réorganisé les options du menu afin de prendre en compte les nouvelles fonctionalités implémentées.

8.1.4 Interopérabilité

Le prototype a été testé sur Windows NT, XP, Vista, 7 et 8, et sur Mac OS X Snow Leopard et Mountain Lion (avec fonctionnalité audio limitée). Les tests utilisateurs ont quand à eux été réalisés sous Windows NT, Windows 7 et Macintosh OS X Mountain Lion.

8.2 Évaluation pratique

La seconde version du prototype a été évaluée avec des élèves et des enseignants de mathématiques. En particulier nous avons focalisé les tests sur la facilité de saisie, la lecture et résolution, et la communication entre l'élève et l'enseignant. Nous avons ainsi évalué les améliorations apportées, ainsi que les nouvelles fonctionnalités implémentées, telles la sortie braille et la possibilité d'exécution de stratégies de solutions par les élèves utilisant les marquages et les recherches.

8.2.1 Participants

- 4 enseignants de mathématiques, dont 1 malvoyant et 3 sans déficience visuelle.
- 6 élèves, dont :
  - 2 élèves de lycée, tous 2 non voyants (15 et 17 ans).
  - 4 élèves de collège, dont 3 non voyants (15, 15 et 17 ans) et 1 malvoyant (14 ans).

8.2.2 Protocole

L'évaluation s'est déroulée en 4 étapes :

1. **Entraînement lecture/saisie.** Les participants ont saisi des expressions au clavier de l'ordinateur ou de la plage braille, après une démonstration pratique de la saisie des puissances, des fractions et des racines selon les méthodes de saisie utilisant les délimiteurs de bloc sémantique et linéaire.

$$3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) \tag{8.1}$$

$$\frac{1}{2} \tag{8.2}$$

$$\frac{2x}{x+2} = \frac{4}{x-10} \tag{8.3}$$

$$\sqrt{x+4} \tag{8.4}$$

2. **Compréhension.** Les élèves analysent les expressions suivantes, en utilisant la fonction de lecture active, puis on leur demande de décrire à l'oral la structure des fractions imbriquées.

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{d+e} \tag{8.5}$$

$$\frac{\frac{a+b}{c+d}}{x-y} \tag{8.6}$$

$$\frac{\frac{x+1}{8+y}}{\frac{x-1}{9+z}} \tag{8.7}$$

3. **Communication.** L'enseignant dicte à l'élève une expression complexe, puis vérifie l'expression saisie et fait des corrections si nécessaire.

$$\frac{5+\sqrt{2x}}{8(2y+4)} \tag{8.8}$$

Table 8.2 – Tâches effectués par des enseignants.

	E1	E2	E3	E4(M)
Saisie	*	*	*	*
Lecture	*	*	*	*
Communication	*	*	*	-

E1...E4 : Enseignant ; (M) : Malvoyant.

4. **Résolution.** Après une démonstration du fonctionnement des recherches et du placement de marques, l'élève effectue la résolution de 3 équations qui impliquent le traitement de fractions, la distribution de facteurs et la simplification des termes. La résolution est effectué en utilisant la sortie audio.

$$7 - \frac{x+3}{x} = 5 \tag{8.9}$$

$$x + 2(x + 2(x + 2)) = x + 2 \tag{8.10}$$

$$(3a^2 + 2a + 7)(a + 5a - 4) \tag{8.11}$$

Les tests ont été réalisés dans deux écoles en France. Les participants ont fait les exercices de façon individuelle ; ils ont été encouragés à exprimer leurs pensées lors de la démarche des exercices. Par raisons de disponibilité, les enseignants n'étaient pas présents lors de toutes les séances, sauf pour l'étape de communication, pour laquelle l'interaction élève-enseignant était nécessaire.

Les tests ont été réalisés sur des ordinateurs PC avec les systèmes d'exploitation Windows NT et Windows 7. Nous avons utilisé NVDA comme lecteur d'écran, et une plage braille Papenmeier Braillex Trio. L'enseignant malvoyant a utilisé un ordinateur Macintosh OS X avec le système d'exploitation Mountain Lion.

8.2.3 Résultats

Les tableaux 8.2 et 8.3 présentent les tâches effectués par les participants. Les résultats sont affichés par étape d'évaluation.

8.2.3.1 Lecture/saisie

Les élèves ont des niveaux différents de connaissance du clavier d'ordinateur, de la plage braille et du code braille mathématique ; par conséquent, ils ont différentes capacités et préférences de saisie. Les élèves du lycée peuvent se servir du clavier d'ordinateur ainsi que de la plage braille. Ils connaissent le braille mathématique français qui correspond à leur niveau d'études de mathématiques. Parmi les participants du collège, l'élève malvoyant a utilisé le zoom du système, et en même temps il s'est servi de la synthèse vocale. Il connait le clavier d'ordinateur assez bien pour saisir les chiffres et les raccourcis ; il seulement commence à apprendre le braille, et

Table 8.3 – Tâches effectués par des élèves ayant une déficience visuelle.

	NL1	NL2	C1	C2	C3	C4(M)
Saisie	Clavier	Clavier	Clavier	Clavier	Braille	Clavier
Lecture	Audio	Audio	Audio/ Braille	Audio/ Braille	Braille	Voix
Communication	*	*	*	*	*	*
Compréhension	*	*	-	-	-	-
Résolution	*	*	-	-	*	-

NL : Élève non voyant du lycée ; C1...C3 : Élève non voyant du collège ; C(M) : Élève malvoyant du collège.

donc ne peut pas se servir de la plage Braille. Deux élèves ont utilisé le clavier pour saisir des éléments, et l'audio et le braille pour vérifier la saisie. L'un des élèves ne maitrise pas la dactylographie, et ne peux donc utiliser la clavier. Par conséquent elle a utilisé la plage braille pour la saisie ainsi que pour la lecture.

La saisie des puissances, des fractions et des racines carrés depuis le clavier d'ordinateur n'a pas posé des difficultés importantes, mais les participants ont eu besoin d'un peu de pratique pour s'habituer à utiliser les raccourcis clavier et les options du menu. Les participants se sont habitués rapidement à détecter et corriger les erreurs de frappe.

Les élèves ont exprimé que la sortie audio, bien que compréhensible, peut rapidement fatiguer s'il s'utilise comme seul moyen de sortie.

Nous avons fait l'observation suivante lors de la saisie des fractions et des racines par le raccourci clavier. Après avoir appuyé sur les touches de raccourci, nous obtenons la structure $\frac{\boxed{\langle}/}{\rangle}$, dont l'utilisateur va entendre l'élément actif en audio, ici le délimiteur de début de fraction « *Frac début* ». En entendant qu'ils se trouvent au début de la fraction, les utilisateurs commencent à faire la saisie à partir de la position actuelle, et par conséquent les éléments s'insèrent avant le début de la fraction. Par exemple, au lieu de saisir $\frac{\langle x+4/}{2\rangle}$, ils saisissent $x+4\frac{\langle/}{2\rangle}$. Cette erreur n'arrive pas dans les modes séquentiels, lorsque l'utilisateur saisit d'abord le délimiteur de début de fraction, puis les contenus, et finalement le délimiteur de fin de fraction.

Concernant les protocoles de saisie, l'élève malvoyant a utilisé les raccourcis pour la saisie des fractions et des racines. C2 connait très bien le clavier et la plage braille ; il maîtrise également le braille mathématique de son niveau. Avant le début des exercices dans l'interface, il a vérifié la saisie via le clavier d'ordinateur et la plage braille sur un éditeur de texte conventionnel. Il a préférée la façon séquentielle de saisie des fractions, par conséquent il n'a pas commis d'erreur de saisie des fractions ou des racines. Il a effectué la saisie via le clavier d'ordinateur, puis il a vérifiée sur la plage braille. Cet élève est très performant ; il a finalisé les exercices rapidement. Il a manifesté de l'intérêt pour utiliser ce logiciel.

Les élèves qui ont préféré d'utiliser la plage braille pour les saisies ont été capables de saisir des fractions et des racines en utilisant les blocs. La sortie visuelle des expressions est linéaire, mais cela permet aux personnes voyantes de visualiser en noir ce qui est saisi.

Chez les enseignants la saisie s'est déroulée avec peu de difficultés. Ils ont juste eu besoin d'un rappel des raccourcis. L'enseignant malvoyant a réalisé les exercices de saisie et de lecture en utilisant le zoom du système. Il s'est avéré que les raccourcis qui impliquent l'utilisation de la touche de *Ctrl* en combinaison avec les flèches sont assignés à d'autres fonctions dans le système d'exploitation *Mountain Lion*, raison pour laquelle nous avons eu besoin d'assigner des nouvelles touches dans l'interface.

8.2.3.2 Compréhension

D'après les enseignants, la compréhension d'une expression mathématique implique de reconnaître les symboles, de saisir l'organisation des termes, et de savoir comment démarrer la résolution. Nous avons vérifié la compréhension de l'expression par rapport à la structure des fractions imbriquées, afin de tester l'efficacité de la lecture active des structures complexes.

Les élèves ont réussi à reproduire la structure des 3 fractions imbriquées d'exemple. La nouvelle implémentation des délimiteurs dans la lecture et la saisie des fractions a résolu les problèmes de repérage de début et de fin de structure. Dans la plupart des cas, les participants ont préféré lire la version étendue des fractions, même s'il a fallu qu'ils écoutent l'expression 2 ou 3 fois. Nous avons observé que les participants sont plus susceptibles d'utiliser l'affichage par bloc quand les fractions deviennent plus compliquées. D'un autre côté, les participants ont exprimé que la compréhension continue à être plus difficile lorsqu'on a pas accès à la sortie braille.

8.2.3.3 Communication

La communication directe élève-enseignant lors de la dictée a été jugée très efficace dans tous les cas. L'enseignant a fait la dictée de la façon qu'il a considérée comme appropriée. Certains enseignants considèrent que la dictée doit être spécifique pour les élèves non voyants, alors que d'autres considèrent que la dictée doit se faire de façon similaire pour les élèves voyants et non voyants. L'élève a saisi l'expression, et l'enseignant a corrigé ou validé la saisie. Les élèves ont bien saisi l'expression d'exemple ; comme ils avaient déjà eu à pratiquer la saisie lors de l'étape précédente, ils n'ont pas commis d'erreurs importantes. Les enseignants ont bien apprécié la visualisation immédiate de l'expression.

8.2.3.4 Résolution

Les élèves du collège ont fait les exercices de saisie, de lecture et la dictée, mais ils n'ont pas eu le niveau de connaissances nécessaire pour résoudre les exercices proposés. Seulement l'un des élèves du collège a exécuté la résolution d'une équation linéaire proposée par son enseignant.

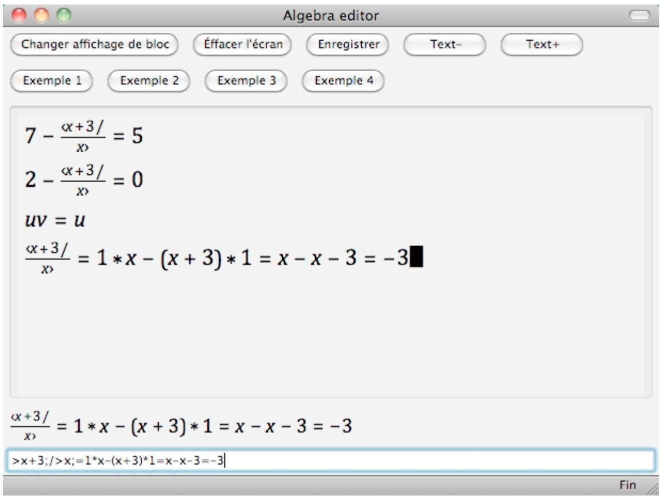


FIGURE 8.7 – Démarche de l'exercice 1 par NL1.

Les élèves du lycée ont expliqué leur méthode habituelle de travail en mathématiques. NL1 a expliqué qu'il travaille sur la plage braille. Afin de développer la résolution d'une équation il copie manuellement les termes d'une ligne à l'autre et il les modifie. L'enseignant ne peut pas visualiser la résolution immédiatement. NL2 utilise Word pour travailler toutes les matières, y compris les mathématiques : « *J'ai essayé les logiciels normaux avec la synthèse vocale, mais il y a des interférences et c'est pas compatible, donc je ne peux pas les utiliser ; de plus, les logiciels mathématiques, ça servirait pas à grand chose parce que la synthèse vocale, elle lit pas la plupart des symboles* ». Il a fait des mathématiques avec la plage braille avant, mais il a dit qu'il ne connaît pas très bien le braille mathématique.

Les deux élèves du lycée ont fait les exercices proposés de résolution. Le détail des démarches que les élèves ont suivi pour résoudre ces exercices est présenté dans l'Annexe A.

Équation $7 - \frac{x+3}{x} = 5$ L'équation a été présentée complètement masquée, dans la forme *EQUATION*.

NL1 a utilisé la fonction permettant d'écouter l'expression complète. Après un moment de réflexion il a utilisé les fonctions pour étendre et plier par niveau. Il a exprimé à l'oral la structure de la fraction, puis il a commencé à la résoudre. Il a utilisé les raccourcis clavier pour saisir la fraction et il a fait l'erreur de saisie $x+3\frac{\langle /}{x\rangle}$. Après avoir corrigé l'erreur, il a continué la résolution. En essayant d'indiquer une règle de transformation dans laquelle il avait saisi un caractère non valide, il a obtenu un message d'erreur, indiqué par un *earcon*. La démarche de résolution est présentée dans la figure 8.7.

NL2 utilise les fonctions pour copier et coller la fraction. Il a fini rapidement et sans erreurs.

L'élève du collège C3 a effectué la résolution de l'équation linéaire $5a + 3 = 13$

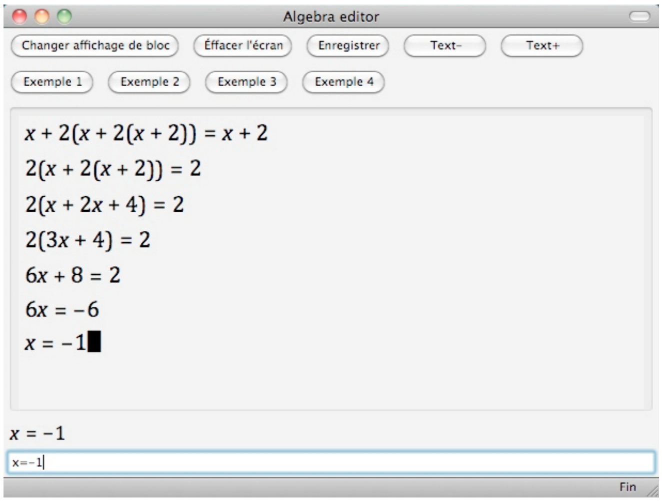


FIGURE 8.8 – Démarche de l'exercice 2 par NL2.

proposé par son enseignant, en utilisant la plage braille. Voici la démarche qu'il a suivi.

$$5a + 3 = 13$$
$$5a = 13 - 3$$
$$5a = 10$$
$$a = 10/5 = 2$$

Équation $x{+}2(x{+}2(x{+}2)) = x{+}2$ Les participants n'ont pas eu de problème pour comprendre la structure de l'expression. Ils n'ont pas exprimé de découragement ou de frustration après avoir saisi la complexité de l'équation. Les deux élèves ont réussi à résoudre l'équation correctement.

Après chaque ligne, NL1 a vérifié ce qu'il avait saisi, en utilisant les flèches, la lecture par niveau et la lecture de l'expression complète.

NL2 a identifié et exécuté la simplification initiale, puis il a procédé au traitement des parenthèses. Il a utilisé les fonctions de copier/coller pour reproduire les sous expressions, et la saisie directe pour développer les multiplications. La démarche de résolution est présentée dans la figure 8.8.

Équation $(3a^2 + 2a + 7)(a + 5a - 4)$ Les fonctions de recherche et de placement de marques ont été montrées aux élèves, afin qu'ils puissent les utiliser s'ils le souhaitent. Un élève a commenté que afin d'aider au repérage audio des résultats de la recherche ou de termes marqués manuellement, on pourrait utiliser le *earcon* de marque durant la lecture passive, un son par terme, pour écouter rapidement le nombre de termes d'une puissance déterminée. L'élève considère que le placement de marques peut être utile, mais il ne l'a pas utilisé dans les exercices.

Lors de l'exploration de l'expression, NL1 a utilisé les fonctions permettant d'étendre par niveau de la façon suivante :

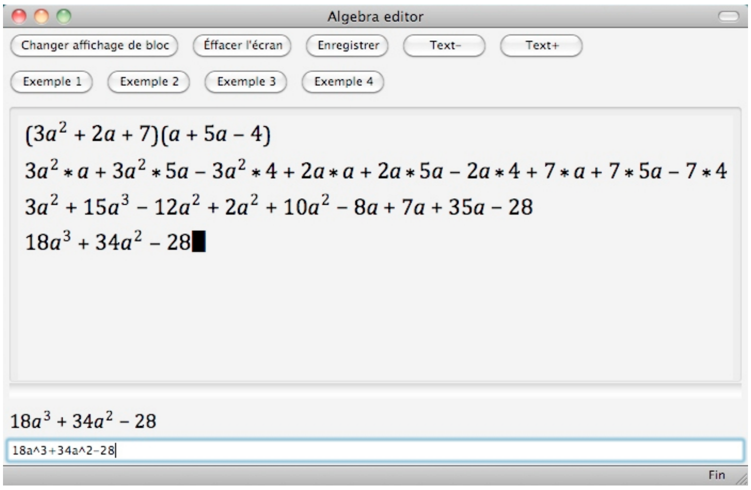


FIGURE 8.9 – Démarche de l'exercice 3 par NL1.

$$
\begin{aligned}
& \boxed{PRODUIT} \\
\rightsquigarrow\ & \boxed{FACTEUR}FACTEUR \\
\rightsquigarrow\ & (3a^2 + 2a + 7)\boxed{FACTEUR} \\
\rightsquigarrow\ & (3a^2 + 2a + 7)(a + 5a - 4)
\end{aligned}
$$

Il a indiqué les produits de la multiplication $3a^2 * a + 3a^2 * 5a$... avant de saisir les résultats partiels. Lors de la simplification, il est retourné à la ligne précédente, puis il a saisi les résultats partiels de la combinaison de termes par puissance. Il a vérifié la simplification, puis corrigé le terme en a^3. Il a utilisé la recherche de termes semblables après la simplification des termes quadratiques, afin de vérifier qu'il les avait considéré tous dans l'opération de collection. Il a fini l'exercice sans erreur. La démarche de résolution est présentée dans la figure 8.9.

Depuis la première lecture de l'expression, NL2 a détecté qu'il était possible de simplifier le deuxième facteur. Il a copié l'expression complète dans une nouvelle ligne et il a changé $a + 5a$ par $6a$. Pour développer la distribution, il est passé de la ligne de résultat partiel à la ligne précédente ; il a parcouru la ligne de la distribution puis il a saisi des éléments sur la ligne de résultat. Il a fait deux erreurs arithmétiques lors d'une multiplication : $3a^2 * 6a \rightsquigarrow 18a^4$, et $3a^2 * -4 \rightsquigarrow -12a^3$. La voix du lecteur d'écran lui a semblé très fatigante. Il considère qu'il y a beaucoup de raccourcis à mémoriser.

NL1 a recommandé de changer la touche *Ctrl* par *Alt* dans les raccourcis, parce que c'est plus à portée de main. De plus sur son propre clavier se trouvent 2 touches *Alt* et une seule touche *Ctrl*, donc il est possible de l'atteindre depuis la droite ou la gauche, permettant en même temps d'utiliser une seule main et libérer l'autre pour lire la plage braille.

Les interactions utilisés pour les participants dans la résolution sont présentées sur le tableau 8.4.

TABLE 8.4 – Interactions utilisés dans la résolution.

Besoins par étape	**Interactions utilisés**
Vérification	
Exploration de l'équation initiale, vérification de résultats partiels.	Lecture passive ou lecture active : navigation par élément, affichage et navigation granulaire. Commande de recherche de termes.
Correction	Édition
Attraction	
Déplacer ou transposer terme(s)	Éditer, fonctions pour couper et coller.
Collection	
Trouver les termes semblables, obtenir les termes non traités.	Lecture active.
Additionner termes semblables.	Calcul mental.
Isolement	
Transposer terme(s)	Éditer, fonctions pour couper et coller.
Distribution	
Obtenir facteurs.	Lecture active.
Multiplier termes.	Calcul mental.
Indiquer les distributions partiels.	Édition.

Nous avons observé que la possibilité de revenir à la dernière position active de chaque ligne a été très utile, en particulier lors de la distribution, car cela il permettait de garder la position sur le terme de référence.

Les élèves ne sont pas très habitués à faire des recherches. Ils ont effectué la simplification en suivant leur méthode de recherche manuelle d'exposants de façon organisée. Seulement un des élèves a effectué une recherche pour vérifier s'il avait considéré tous les termes dans une simplification.

Les élèves ont essayé d'utiliser des raccourcis courants dans d'autres éditeurs ; par exemple : *Ctrl a* pour sélectionner tout, *Ctrl c*, *Ctrl x* et *Ctrl v* pour copier, couper et coller respectivement. Ils ont également essayé d'utiliser les raccourcis du lecteur d'écran qu'ils connaissent, comme JAWS et NVDA, cette fois sans le résultat attendu. Néanmoins, nous pouvons envisager la personnalisation de raccourcis par l'utilisateur.

Il semble que pour la plupart des tâches, les élèves ont reproduit sur l'interface leur méthode de travail habituelle, c'est à dire la méthode qu'ils ont l'habitude d'employer dans leur outil habituel. Ils n'ont pas utilisé très souvent la navigation granulaire par blocs, et ils n'ont pas utilisé du tout la commande pour marquer les termes. La raison peut être la récente introduction de ces fonctions et la charge de mémoire impliquée par l'apprentissage de toutes les caractéristiques et de tous les raccourcis clavier en même temps. La pratique de telles fonctions dans des exercices réels pourrait nous aider à discerner s'il s'agit d'un manque de familiarisation avec ces fonctions parce qu'elles ne sont pas disponibles sur leurs outils de travail habituels, ou bien s'il s'agit des fonctions inadéquates comme assistants à la résolution.

8.3 Évaluation par des enseignants de mathématiques

Dans cette évaluation nous avons discuté les caractéristiques du prototype avec des spécialistes de l'enseignement des mathématiques aux élèves avec déficience visuelle. Nous avons suivi un protocole d'évaluation dont le but était de vérifier la pertinence de l'interface comme outil d'assistance dans le processus d'enseignement-apprentissage de l'algèbre, du point de vue des spécialistes de l'enseignement des mathématiques aux élèves avec déficience visuelle. Les enseignants sont également des utilisateurs potentiels.

8.3.1 Participants

Quatre enseignants ont participé à cette vérification :

- Trois enseignants, parmi lesquelles un non voyant brailliste et deux sans déficience visuelle mais qui connaissent le braille mathématique, ont participé à une séance. Ils avaient participé à l'évaluation de LAMBDA, et ils ont une certaine expérience dans l'utilisation de LAMBDA avec leurs élèves.
- Un enseignant, malvoyant et brailliste, à participé dans une deuxième séance. Il travaille avec des élèves malvoyants et non voyants. Il utilise LaTeX pour son travail individuel.

Cette organisation a été déterminée à partir de la disponibilité des enseignants.

8.3.2 Protocole

La vérification a été effectuée en trois étapes :

- **Édition et représentation de contenus.** Nous avons montré la saisie d'exposants, de fractions et de racines dans les deux modalités, bidimensionnelle et linéaire, en utilisant le clavier d'ordinateur et la plage braille. Les enseignants ont vérifié les différentes modalités de sortie et la pertinence des délimiteurs visuels de bloc sémantique.

  Nous avons également montré la validité du fichier exporté par notre prototype et son importation dans OpenOffice.
- **Visualisation granulaire.** Nous avons discuté de la possibilité d'utiliser la visualisation par blocs correspondant aux niveaux de l'arbre syntaxique pour donner une vue générale de l'expression, et pour aider à la visualisation granulaire de l'expression à la demande de l'utilisateur. Ce type de visualisation n'est pas courant dans les éditeurs de texte conventionnels, et l'utilisateur peut avoir besoin d'un peu de pratique pour s'habituer.
- **Aides à la résolution.** Dans l'analyse de besoins avec des élèves et des enseignants, nous avons trouvé que l'accès directe aux termes de l'expression est très important dans les tâches de résolution par les non voyants, et c'est à partir de cela que nous avons proposé et implémenté les recherches et le placement de marques. Nous avions un intérêt particulier à connaître l'opinion des enseignants par rapport à la recherche de termes semblables, car il semble contredire le principe de l'interface de ne pas faire des tâches à la place de l'élève. Néanmoins, nous avons conçu ce type de recherche afin de faciliter la visualisation et l'accès aux termes.

  Nous avons montré également les techniques planifiées d'utilisation des recherches dans la simplification, et le placement de marques dans la distribution et comme aide à l'indication des termes traités.

Chaque démonstration a été suivie par une discussion des avantages et des inconvénients de chaque aspect pour supporter l'enseignement, et des recommandations pour son amélioration. La guide de l'évaluation se trouve dans l'Annexe B. La discussion a été enregistrée sur fichier audio.

Nous avons utilisé un ordinateur PC avec le système d'exploitation Windows XP, NVDA comme lecteur d'écran, et une plage braille Papenmeier Braillex Trio. Nous avons utilisé la version en espagnol de l'interface et la configuration correspondante sur NVDA. Avec l'enseignant malvoyant nous avons utilisé un ordinateur Macintosh OS X Snow Leopard et le zoom du système, et la version en français de l'interface.

8.3.3 Résultats

Les résultats de la vérification de cette évaluation ont été très positifs. Nous les présentons ci-après selon les étapes de vérification.

8.3.3.1 Édition et représentation de contenus

Les enseignants ont apprécié la représentation de contenus dans les différents modalités, parce qu'elle facilite la communication de contenus entre les voyants et les non voyants sans la présence d'un intermédiaire. Un enseignant explique : « *Pour moi il faut vraiment qu'il y ait le lien direct entre l'enseignant et l'élève. Le problème avec les assistants qui viennent dans la salle de classe c'est que l'enseignant ne parle plus à l'élève mais à l'intermédiaire, et l'intermédiaire bien souvent n'est pas formé aux sciences. Pour moi, la présence d'assistants ne marche que pour certains handicaps* ». Il s'agit des AVS – Auxiliaires de Vie Scolaire –, que les enseignants dénomment souvent « assistants ».

L'enseignant non voyant a indiqué que dans la salle de cours l'élève aveugle utilise surtout la plage braille, parce que, même s'il existe une sortie audio optimisée, il ne peut utiliser les écouteurs qu'occasionnellement parce qu'il doit écouter l'enseignant et ses camarades de classe. Néanmoins, comme nous l'avons évoqué auparavant, le braille et l'audio sont complémentaires. Rappelons-nous que les élèves ont des contextes différents, et il faut répondre individuellement à leurs attentes. Un enseignant a commenté : « *ça me parait vraiment bien d'avoir les deux, l'audio et l'écrit, en plus j'imagine que dans un certain temps on peut apprendre tous les raccourcis clavier pour insérer des formules, des fractions, de racines carrés, donc j'imagine qu'en plus ils ont la possibilité de le taper en braille, s'ils connaissent déjà le braille, c'est bien d'avoir les deux, et l'enseignant peut vraiment le voir directement* ».

La sortie auditive a été jugée convenable parce qu'elle est rigoureuse et ne donne pas lieu à interprétation. Les enseignants ont également recommandé d'avoir différents niveaux de verbosité, pour que les élèves puissent personnaliser la façon de lire selon leur niveau et leurs préférences.

La lecture et la saisie des exposants, des fractions et des racines est compréhensible. Ils ont trouvé que le prototype permet de lire facilement ce qu'ils ont saisi, et de le réutiliser, le recopier et l'analyser rapidement. L'utilisation du clavier pour saisir des expressions dans la forme bidimensionnelle constitue un avantage sur les modalités qui utilisent la souris. Un enseignant a exprimé : « *Ça ressemble a MathType, sauf que dans MathType on clique ; c'est ça le problème, les élèves [non voyants] ils n'y arrivent pas parce qu'il faut cliquer, il faut aller chercher les symboles* ». L'insertion automatique des blocs de fraction et de racine par des raccourcis clavier a été considérée comme adéquate, et ne représentant une aide automatique. Néanmoins, comme l'enseignant non voyant l'a remarqué, il est plus naturel pour l'utilisateur non voyant d'utiliser la saisie séquentielle.

Les commandes pour Copier et Coller aident à prévenir les problèmes de recopie manuelle, très fréquents dans le travail en braille. Par exemple dans une distribution de facteurs de plusieurs termes : « *On est quasiment certain qu'ils vont se tromper, parce qu'ils vont avoir beaucoup de calculs à faire déjà, et deuxième chose, ils vont avoir beaucoup de recopie à faire ; avec le copier-coller au moins on est sûr qu'on a copié la même chose* ».

Voici les améliorations proposées qui concernent l'édition et la représentation :

- Les enseignants considèrent qu'il serait recommandable de permettre la saisie d'espaces. Les espaces peuvent être utiles dans les cas suivants :
  - Pour organiser visuellement les expressions.
  - Comme une façon d'indiquer les termes supprimés dans une expression lors des simplifications.
  - Pour indiquer un stage intérmediaire lors de la saisie d'une fraction sans numérateur, ou bien lors de la division de polynômes ou d'une factorisation.
  - Pour mettre les variables en colonnes lors de la résolution d'une système d'équations par la méthode de réduction.
- Les caractères délimiteurs de bloc, bien que présents comme éléments graphiques dans la représentation bidimensionnelle, peuvent être perçus par un utilisateur voyant comme génants. Un paramètre de configuration de l'application permettrai de les rendre invisibles pour ne pas encombrer l'affichage visuel.
- L'un des enseignants a remarqué que la représentation linéaire à partir de la saisie braille permet de manipuler les expressions en utilisant la syntaxe du code mathématique habituel pour les élèves. D'un autre côté, il a suggéré que la conversion des expressions linéaires vers une vue bidimensionnelle serait très utile, même s'il se fait pas de façon synchrone.

Concernant la possibilité d'utiliser un fichier enregistré dans notre logiciel et l'importer dans OpenOffice, les enseignants ont trouvé que c'est utile parce qu'ils peuvent le réutiliser et le modifier ailleurs, mais il faut que cela fonctionne aussi dans l'autre sens. « *C'est important parce que les gens vont accepter de prendre quelque chose de nouveau parce que c'est compatible avec quelque chose d'ancien. Pour eux c'est important, parce qu'ils pourront réutiliser tout ce qui est d'avant* ». L'importation de fichiers MathML produits par d'autres logiciels vers notre prototype est envisagée mais pas implémentée à présent. La difficulté réside en la mise d'expressions dans leur forme canonique, afin de rajouter les délimiteurs de bloc et les attributs qui permettront leur manipulation par l'utilisateur.

Ils ont remarqué l'importance de maintenir une représentation standard pour visualiser et partager les documents de façon interopérable, de telle façon que chacun puisse travailler sur son système habituel, avec ses outils préférés. Ils valorisent également une représentation interne correcte, qui respecte le standard MathML pour assurer la visualisation correcte des contenus dans d'autres dispositifs et navigateurs.

8.3.3.2 Visualisation granulaire

Les enseignants ont apprécié l'affichage par blocs pour donner une vue générale de l'expression. Ils considèrent que les noms « *Fraction* » et « *Racine* » sont utiles pour représenter la présence de ces éléments par blocs. Ils ont proposé d'ajouter une fonction alternative pour indiquer avec des espaces la longueur de ces structures. LAMBDA utilise des espaces en braille pour communiquer la longueur des sous expressions, mais cette fonction est appliquée niveau par niveau sur toute l'expression et pas sur les sous expressions individuelles. L'utilisation d'espaces pour communiquer la longueur pourrait faciliter en grande mesure la stratégie de lecture d'un expression complexe. Par exemple, un bloc « *Numérateur* » pourrait contenir l'expression $8(2y + 4) - 3y + 6$, ou bien une expression simple comme $x + y$. Montrer des espaces au lieu des contenus du bloc permet de reconnaître facilement au toucher que le numérateur «   » est plus longue et peut être plus complexe que le numérateur «   ». Le fait de reconnaître par simple inspection la longueur d'un numérateur ou un dénominateur peut influencer la stratégie de résolution. Dans le prototype nous avons implémenté la lecture orale des contenus d'un bloc sans étendre ses termes, mais dans le cas des longs blocs, complexes, lire la lecture complète du bloc prend beaucoup de temps. La proposition de représentation de la longueur par espaces peut être immédiatement reconnue au toucher dans la sortie braille.

Il semble que pour les élèves aveugles il est plus utile d'indiquer la longueur d'une structure plutôt que sa complexité. Selon un enseignant : « *Si tu me dictes une expression à l'oral et tu me dis qu'il y a une fraction qui suit, peut être tu vas essayer de me dire si la fraction est longue, par exemple : le numérateur est* $2x$ *et puis il y a un long dénominateur ; c'est de l'information additionnelle qui pourrait être utile, parce que si on voit que le dénominateur est court, on peut penser que c'est très probable qu'il n'y aie pas grand chose là dedans, mais si c'est long, on peut soupçonner qu'il y a des choses complexes et on peut décider si on veut afficher le niveau suivant* ».

De plus, la complexité d'une expression est très difficile à déterminer pour celui qui doit l'annoncer, et demande un effort de réflexion pour celui qui doit l'interpréter. Comme l'explique l'un des enseignants, « *Si on me dit qu'à l'intérieur du numérateur il y a trois termes du niveau de complexité 2 et deux termes simples, ça va me donner beaucoup à réfléchir : niveau 2 ? ça pourrait être une fraction, une racine ou peut être une autre chose ?. Par contre, si je peux savoir tout simplement la longueur, j'ai déjà de l'information utile et explicite sans faire trop d'effort* ».

8.3.3.3 Aides à la résolution

Les enseignants ont trouvé que les deux modalités de recherche peuvent être utiles pour faciliter la résolution. Il faut noter que l'utilité du logiciel est lié à la façon de faire les mathématiques. La recherche de termes semblables peut être utile dans la simplification de termes après une distribution, pour savoir où se trouvent les coefficients par exemple de x^2. La recherche peut être plus utile lors d'une distribution longue, parce que les termes qui résultent seront nombreux. D'un autre côté, les enseignants ont manifesté que ce n'est pas la même chose de faciliter les tâches pour les élèves que les faire à leur place. Par exemple, c'est utile de faciliter la recherche de termes au cube, mais ce ne serait pas bien de sélectionner et de copier les résultats automatiquement. En tout cas, c'est l'élève qui décide quels termes peuvent être simplifiés à partir des résultats de la recherche. La recherche ne résout rien, elle facilite la localisation de termes dont l'élève a besoin.

Ils ont mentionné que ce serait également utile d'implémenter une recherche de dénominateurs : « *la première chose qu'on fait dans une équation avec dénominateurs est de les traiter, donc ça serait utile si je peux aller directement au premier dénominateur, puis passer au deuxième sans faire des allers-retours, et sans tout lire* ». De la même façon, quand il y a des fractions à additionner, avant de s'occuper de ce qu'il y a dans le numérateur, ils ont besoin de savoir ce qu'il y a dans le dénominateur. Si le logiciel pouvait détecter et souligner les dénominateurs cela pourrait faciliter la résolution.

La recherche de puissances a été également mentionnée comme utile pour connaître le degré d'une équation. Le fait de pouvoir parcourir les résultats de la recherche a été fortement apprécié, mais par contre, l'indication des termes marqués par audio seulement ne présente pas un avantage réel pour les aveugles. De plus, l'audio ne donne pas l'avantage de visualiser les termes qui entourent les termes trouvés de façon immédiate. L'accès en braille pourrait être amélioré si nous indiquons sur le braille les résultats de la recherche, de telle façon que les termes puissent être trouvés rapidement au toucher.

Alors que l'interface offre des possibilités de saisie et de sortie braille, il est nécessaire d'élargir les interactions depuis la plage braille, afin de permettre la sélection de termes par braille et la sélection par niveaux de bloc avec le soulignage visuel correspondant, ainsi que la visualisation en braille des résultats des recherches et des termes marqués. D'un autre côté, l'utilisabilité de l'interface peut être améliorée en permettant la configuration de raccourcis et des niveaux de verbosité de la synthèse vocale selon les préférences de l'utilisateur. De plus, la possibilité de personnaliser les touches de raccourci présente d'autres avantages : prévenir des conflits avec les raccourcis d'autres systèmes d'exploitation ou d'autres lecteurs d'écran, ou bien utiliser les touches auxquels les utilisateurs sont déjà habitués.

Les enseignants ont également remarqué qu'il est très important de permettre à l'élève de prendre les notes qu'il considère nécessaires.

Finalement, les enseignants ont confirmé que la résolution d'équations dépend du niveau de compréhension des élèves, et pas de leur capacité visuelle.

Troisième partie

Discussion

Chapitre 9

Discussion

Sommaire

Dans le travail que nous présentons ici, nous avons porté notre attention tout particulièrement sur les aspects de saisie, de compréhension, de communication entre modalités visuelles et non visuelles, et de facilitation des calculs, qui sont en conformité avec les challenges actuels pour assister des non voyants dans leur travail en mathématiques [Miesenberger 2008]. Les utilisateurs, élèves et enseignants, ont été impliqués des premières aux dernières étapes du développement, selon les principes du développement centré sur l'utilisateur.

Les résultats des évaluations de notre prototype suggèrent qu'une telle interface peut être utilisée dans une salle de classe intégrée comme support dans le processus d'enseignement-apprentissage de l'algèbre. Les retours des élèves et des enseignants nous ont permis d'identifier des interactions susceptibles de faciliter leur travail, et de concevoir les améliorations nécessaires.

9.1 Saisie et visualisation

Selon les retours des participants, la saisie et la visualisation de contenus sont efficaces. La saisie des puissances, des fractions et des racines carrés depuis le clavier n'a pas posé des difficultés importantes. L'intégration de délimiteurs de bloc permettent de saisir plus facilement la structure des expressions complexes. D'autre part, la saisie braille permet d'utiliser la syntaxe du code mathématique habituel pour les élèves non voyants, mais l'implémentation dans notre prototype reste très basique et par conséquent les manipulations sont limitées. La représentation bidimensionnelle permet aux utilisateurs voyants la visualisation des contenus dans la forme habituelle pour eux. La saisie et la représentation braille sont nécessaires afin de faciliter le travail en mathématiques. La lecture audio, bien que compréhensible, n'est pas suffisante car elle peut être fatigante et en même temps elle interfère le travail des élèves non voyants dans une salle de classe où ils ont besoin de suivre le discours oral de l'enseignant.

Les documents générés dans notre prototype respectent le standard du format MathML, ce que nous avons vérifié par l'importation correcte en OpenOffice.

Les améliorations proposées sont :

- Permettre la saisie d'espaces.
- Intégrer différents niveaux de verbosité de lecture.
- Permettre à l'utilisateur de configurer les raccourcis, la visualisation de délimiteurs sémantiques et la verbosité de lecture.
- Intégrer des intéractions à partir du clavier braille.
- Intégrer la conversion des expressions linéaires vers une vue bidimensionnelle.
- Permettre l'importation de documents générés dans autres logiciels.

9.2 Compréhension

Les enseignants ont précisé que la compréhension d'une expression mathématique implique reconnaître les symboles, assimiler l'organisation structurelle, et savoir comment démarrer la résolution. Cette précision est en accord avec le modèle décrit par [Ernest 1987].

À partir de nos tests nous pouvons constater que la lecture active, en conjugaison avec l'affichage granulaire d'éléments ou sous expressions, facilite la compréhension d'une expression en permettant l'accès contrôlé par l'utilisateur, de la façon de lire. Dans les exercices pratiques, les élèves ont reproduit correctement la structure d'expressions imbriquées en utilisant la lecture active et la visualisation granulaire ; de même, ils ont bien assimilé la structure des exercices de résolution, ce que nous pouvons constater par le démarrage correcte. Nous suggérons que ces interactions sont plus utiles quand les expressions sont complexes. D'autre part, la compréhension continue à être plus difficile lorsqu'on n'a pas accès à la sortie braille.

La lecture littérale que nous avons implémenté a été considérée comme adéquate et rigoureuse par les enseignants spécialistes des élèves ayant une déficience visuelle. D'autre part, nos avons observé que l'intégration des pauses dans la lecture passive est cruciale pour la correcte compréhension de la structure d'une expression.

Concernant la provision d'une vue générale afin de communiquer la complexité et la longueur d'une expression, les spécialistes de l'enseignement d'élèves non voyants ont trouvé que l'affichage des blocs sémantiques au lieu des expressions entières est utile mais il ne permet pas d'assimiler rapidement la structure. Les commentaires des spécialistes sont d'une partie en conformité avec [Stevens 1994], qui propose qu'une vue générale doit être rapide. D'autre côté, [Stevens 1994] suggère que cette vue rapide doit en même temps indiquer la longueur et la complexité. Nous avons observé à partir de la de la discussion avec les spécialistes, qu'il est plus utile de communiquer la longueur d'une expression, par rapport à sa complexité.

Comme amélioration, les spécialistes ont proposé l'utilisation d'espaces pour communiquer la longueur des contenus des blocs, ce qui peut accélérer l'assimilation de la structure.

9.3 Communication

L'importance de la communication directe élève-enseignant, ainsi que élève-élève dans la salle de cours a été remarquée par des enseignants. La participation des intermédiaires dans la salle de cours n'est pas toujours perçue comme un avantage, selon les spécialistes qui ont été dans cette situation comme élèves eux mêmes.

Dans notre prototype, la communication est possible par la synchronisation de la visualisation de contenus lors de la saisie, ainsi que des interactions effectuées sur l'interface par le moyen préféré des utilisateurs. Nous considérons que la représentation bidimensionnelle est plus appropriée que la linéaire pour les voyants, surtout au niveau lycée, car elle est la façon dans laquelle les élèves sont habitués à lire.

Depuis les évaluations de cette interface, les enseignants ont beaucoup apprécié la visualisation immédiate des contenus saisis par l'élève lors de la dictée. Ils ont corrigé ou fait des remarques quand nécessaire, et ils ont finalement constaté que l'élève a bien saisi l'expression dictée.

D'un autre côté, l'interopérabilité des documents se trouve parmi les soucis les plus remarqués par les enseignants. Il est important de pouvoir utiliser les contenus produits dans d'autres éditeurs et vice versa. Les enseignants ont valorisé les possibilités offertes par notre prototype, et ils ont fait des recommandations pour son amélioration.

9.4 Facilitation des calculs

La facilitation des calculs est peut être l'aspect le plus complexe parmi les challenges actuels. Il faut permettre le développement d'une stratégie de résolution sans influencer négativement la compréhension des concepts algébriques. Dans notre prototype nous ne faisons pas de transformation automatique au lieu de l'élève. Les fonctions d'aide à la résolution qui nous avons implémenté ont pour objectif la facilitation de l'accès et le repérage. Les enseignants ont précisé que ce n'est pas la même chose de faciliter les tâches pour les élèves que les faire à leur place. Ils ont manifesté que l'interface répond à cette attente.

Les élèves qui ont réalisé les exercices proposés ont réussi à effectuer la résolution selon leur stratégie. L'interface n'a pas posé de contrainte lors de la démarche des exercices. Nous avons observé que les élèves ont suivi des démarches différentes pour les exercices proposés. Lors de la démarche, les élèves ont commis des erreurs, dont ils ont corrigé la plupart depuis la vérification des actions. Dans le résultat final nous avons trouvé seulement des erreurs arithmétiques.

Les fonctionalités d'aide à la résolution implémentées dans ce prototype ont été analysées par les enseignants de mathématique spécialistes des élèves ayant une déficience visuelle, mais elles ont été utilisées seulement de façon partielle par les élèves du lycée, car le protocole que nous avons suivi ne les obligeait pas à les utiliser. Nous avons pu observer que la recherche de termes a été utilisée pour des propos de vérification dans une simplification. La recherche peut être plus utile lors de la simplification de termes nombreux.

La recherche de termes et le placement de marques disponibles dans l'interface ont reçu un très bon retour parmi les spécialistes en enseignement aux élèves ayant une déficience visuelle. Ils considèrent que les deux modalités de recherche peuvent être utiles pour faciliter la résolution. Ils trouvent que les recherches ne résolvent rien, elles facilitent la localisation de termes dont l'élève a besoin.

Les améliorations proposées sont :

- Intégrer la récherche de dénominateurs et de puissances.
- Indiquer sur la sortie braille les résultats de la recherche.
- Permettre la saisie du texte.
- Utiliser l'*earcon* des termes marqués lors de la lecture passive pour aider au réperage audio.

9.5 Comparaison avec l'existant

Bien que le but de ce travail n'est pas de développer un logiciel complet, mais d'étudier la façon de faire des maths et les fonctionnalités qui peuvent assister les non voyants dans leur travail en mathématiques, il est convenable de faire le point sur les similarités et les différences entre les caractéristiques de représentation et d'interaction des logiciels similaires actuels. Cette analyse est nécessaire afin d'observer les contributions et les perspectives du travail.

9.5.1 Comparaison avec LAMBDA

Une des différences principales consiste en la représentation braille. LAMBDA utilise un code propriétaire, dans le but de simplifier la conversion noir/braille vers les différentes codes braille, en préservant les dictionnaires de symboles des codes nationaux. Néanmoins, il s'agit d'un nouveau code et, bien que les symboles soient similaires aux codes nationaux habituels, il nécessite un nouvel apprentissage, notamment parce que sa structure est différente. D'autre part, le code LAMBDA est uniquement reconnu par le logiciel LAMBDA, ce qui rend l'investissement d'apprentissage très limité.

Sur le prototype ici proposé, l'utilisateur peut utiliser le code mathématique à 6 points. Il utilise un tableau national à 6 points auquel il est familier. La conversion s'effectue à partir du MathML dont nous assurons la mise en forme correcte. Le problème de conversion en braille est bien positionné dans le domaine de l'implémentation informatique et non sur l'utilisateur. La bibliothèque UMCL pourra être utilisée pour obtenir une version multilingue, supportant différents codes brailles mathématiques nationaux.

Une autre différence essentielle réside dans la représentation visuelle. LAMBDA permet la visualisation linéaire d'expressions par l'utilisation de symboles graphiques, comme une police de caractère. Bien que la visualisation en noir des caractères du code LAMBDA rend possible l'accès pour les voyants, la représentation linéaire n'est pas la représentation avec laquelle ils sont familiers. La visualisation d'expressions sur notre prototype ne demande pas d'effort visuel en même temps qu'il conserve l'accès et représentation braille linéaire. Cette représentation visuelle est très importante pour les utilisateurs malvoyants, qui n'ont pas à « reconstruire » la structure bidimensionnelle à partir d'une représentation linéaire.

Le tableau 9.1 décrit les similarités et les différences entre LAMBDA et le prototype développé dans ce travail.

9.5.2 Comparaison avec ChattyInfty

L'éditeur de texte et des contenus mathématiques ChattyInfty n'est pas un outil pour l'enseignement *per se*, mais il peut être utilisé à ce propos.

Le logiciel permet la saisie d'expressions au clavier, avec une sortie simultanée visuelle et audio. L'affichage visuel est bidimensionnel, et la sortie audio est possible par le lecteur d'écran de l'utilisateur. Il est également possible de visualiser en braille la représentation LaTeX des contenus. Parmi ces caractéristiques, la différence principale avec notre prototype est la visualisation en braille des contenus, qui dans notre cas consiste en la présentation directe dans le code braille mathématique. Notre interface permet aussi, même si c'est de façon limitée dans la version actuelle, la saisie au clavier braille.

ChattyInfty utilise le format propriétaire d'InftyEditor (.iml), mais il permet l'exportation vers MathML, Latex et PDF.

La navigation sur ChattyInfty s'effectue à travers les touches fléchées selon la structure bidimensionnelle des expressions. Notre prototype, par contre, permet une navigation linéaire dans la représentation bidimensionnelle de l'expression.

La résolution d'équations sur ChattyInfty consiste en une édition de texte, et il offre des possibilités de type recherche/remplace de type textuel.

9.6 Limitations et perspectives d'amélioration

Le prototype d'interface que nous avons développé et évalué porte sur la facilitation du travail mathématique des non voyants dans un environnement scolaire intégré. À présent, notre prototype permet des interactions complètes en utilisant le clavier d'ordinateur. L'implémentation des même commandes sur les touches des afficheurs braille n'a pas été implémentée dans les prototypes utilisés pour les tests, et seule la saisie est possible. Dans une application d'assistance destinée à être utilisée en production ce sera important de le faire.

TABLE 9.1 – Fonctionnalité de LAMBDA et du prototype.

LAMBDA	PROTOTYPE
Propos	
Logiciel complet d'édition de mathématiques pour des élèves du collège et du lycée, ainsi que d'étudiants d'université.	Prototype expérimental avec fonctionnalité limité, destiné à l'étude de l'algèbre dans le cadre des niveaux d'enseignement secondaire (collège et lycée).
Écriture	
Saisie d'éléments au clavier et depuis un menu. La saisie braille est possible depuis la plage braille. La saisie utilise exclusivement le code LAMBDA à 8 points.	Saisie d'éléments au clavier, à travers de raccourcis clavier et depuis un menu. Utilise le braille à 6 points.
Visualisation	
Sortie visuelle linéaire, sortie braille par le code LAMBDA. √⫽(x+1)^2⫽̸(x+1)*(x−1)⑊+⫽x^2⫽̸x−1⑊⤸ La visualisation bidimensionnelle est possible de façon asynchrone, pourvue une syntaxe correcte de l'expression. Par exemple, la visualisation d'une expression telle que $\frac{x^2-4}{2} + \frac{4x+4}{4} = \frac{}{4}$ n'est pas possible, car la conversion vers MathML produit une erreur. La visualisation bidimensionnelle est statique, donc la navigation sur l'expression graphique n'est pas possible. Autres options : Afficher et masquer les éléments de l'expression par niveau général : l'affichage s'applique à toute l'expression, et les sous expressions masqués sont représentes par des espaces.	Sortie visuelle bidimensionnelle synchronisée avec la saisie. $\sqrt{\langle \frac{\langle (x+1)^2 /}{(x+1)*(x-1)\rangle} + \frac{\langle x^2 /}{x-1\rangle}\rangle}$ La représentation MathML est transformée en même temps que les éléments sont saisis. La validation des structures est faite de façon dynamique, par conséquente la saisie ne produit pas d'erreurs de syntaxe dans le code MathML. Sortie braille à 6 points. La navigation sur l'expression bidimensionnelle est linéaire de la même façon que sur la visualisation linéaire. Autres options : Étendre et de réplier la structure par sous expression ndividuelle. Les sous expressions repliées sont représentés par leur nom de contenu : PRODUIT, FRACTION, et cetera. Écouter les contenus des blocs. Visualisation simultanée de l'expression complète et par blocs, pour que l'utilisateur voyant sache ce que l'utilisateur non voyant est en train de visualiser. Raccourci clavier pour changer la position du curseur entre le numérateur et le dénominateur d'une fraction.
Sélection	
LAMBDA offre une la possibilité d'élargir la sélection par niveau, mais il produit quelques sélections erronées. Par exemple, la sélection élargie de : $$\frac{x^2-4}{2} + \boxed{\frac{4x+4}{4}} = \frac{2x^2-8+4x+4}{4}$$ résulte en : $$\boxed{\frac{x^2-4}{2} + \frac{4x+4}{4} = \frac{2x^2-8+4x+4}{4}}$$ Option de sélection persistante, qui permet le mouvement du curseur sans désélectionner les termes. La sélection de nouveaux termes résulte en la désélection des termes précédents.	La sélection peut s'élargir par niveau à partir d'un terme sélectionné. Le placement de marques peut s'utiliser comme une forme de sélection persistante, car les fonctions de lecture et de copie des termes marqués sont indépendantes du curseur. De plus, en comparaison à la sélection persistante de LAMBDA, le placement des nouvelles marques sur les expressions n'implique pas la perte des marques précédentes. De cette façon, la sélection d'éléments non contigus est possible.
Aides à la résolution	
Passer au dénominateur suivant ou précédent de façon séquentielle. Il est également possible d'inverser le numérateur et le numérateur d'une fraction. Recherche textuelle : Les résultats sont visualisés un par un.	Recherche textuel : Nous considérons la recherche de fragments de l'expression. Recherche de termes semblables. Les deux types de recherche s'effectuent dans l'arbre de l'expression, de façon similaire à une recherche textuelle, mais prenant en compte la structure bidimensionnelle. Les résultats sont visuellement présentés en rouge de façon simultanée, et auditivement par un *earcon*. La navigation entre résultats est possible à travers une touche clavier. Placement de marques : Le placement de marques sur les termes est possible. Il peut s'utiliser comme une sélection persistante, mais également pour indiquer les termes traités. La navigation entre termes marqués est possible, ainsi que la copie de termes marqués d'un seul geste.
Audio	
Par le lecteur d'écran de l'utilisateur. Offre verbalisation courte et longue. Utilise pauses afin d'indiquer la structure.	Par le lecteur d'écran de l'utilisateur. Lecture passive, lecture active. Lecture de sélection et des termes marqués. Utilise des pauses afin d'indiquer la structure. Un seul niveau de verbosité.
Sauvegarde en fichier	
L'exportation vers MathML de présentation, de contenu et XHTML est possible. De façon similaire que la visualisation, l'exportation est possible uniquement quand l'expression est syntaxiquement correcte.	L'exportation vers MathML de présentation est possible. Le processus ne nécessite pas de conversion, car le modèle de données utilisé en interne est déjà un DOM MathML correct.

À partir de l'analyse de résultats, nous présentons ci-dessous quelques possibilités d'affichage de résultats des recherches sur la plage braille.

La plus simple des possibilités est d'utiliser la navigation via le clavier de l'ordinateur, que nous avons implémenté, pour passer directement entre les résultats de la recherche, et de positionner le curseur braille sur le terme correspondant. D'ailleurs, cette méthode est celle utilisée dans LAMBDA. L'inconvénient de cette proposition est que suivant la recherche, l'utilisateur doit utiliser le clavier pour parcourir les résultats de façon séquentielle. Une modalité alternative qui dépend des possibilités d'implémentation, consiste à utiliser les points 7 et 8 pour indiquer le soulignage d'un terme, de telle façon que tous les résultats puissent être trouvés par inspection de la plage braille d'un seule geste. Cela pourrait poser un problème avec certains codes brailles mathématiques dans lesquels les points 7 et 8 sont utilisés, en causant un risque de confusion. Néanmoins la plupart des codes braille mathématiques sont des codes utilisant les 6 points classiques du braille standard.

Une autre modalité de visualisation des termes trouvés, peut être la plus pertinente, serait de les afficher sur la plage braille dans leur position actuelle, en remplaçant le reste de termes par des espaces. L'utilisateur pourrait établir le contexte d'affichage de tel façon que les termes s'affichent dans la sous expression souhaitée. Par exemple, dans l'équation ci-dessous, afin d'effectuer l'opération de soustraction des trois fractions, nous pouvons décider de commencer par identifier le dénominateur commun, ce qui est fait par simple inspection par la vue dans l'affichage bidimensionnel :

$$\frac{64x^2 - 32x + 36x - 18}{36} - \frac{16x^2 + 24x + 9}{9} - \frac{x - 1}{9} = 1$$

Dans la représentation linéaire, équivalente au braille, nous devons parcourir l'équation afin de trouver les dénominateurs :

$$\boxed{\langle 64x^2 - 32x + 36x - 18\rangle/36 - \langle 16x^2 + 24x + 9\rangle/9 - \langle x - 1\rangle/9} = 1$$

Une recherche de dénominateurs suivie par la visualisation exclusive des termes trouvés, rendrait le résultat suivante dans la sortie braille :

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 36 \qquad\qquad\qquad\qquad 9 \qquad\quad 9}$$

De façon similaire, nous pourrions utiliser la visualisation exclusive des numérateurs ou des puissances selon les intentions de l'utilisateur. Par exemple, dans l'exemple précédent nous pouvons observer qu'il y a deux fractions avec le même dénominateur. Une action suivante possible pourrait être la visualisation des numérateurs :

$$\boxed{64x^2 - 32x + 36x - 18 \qquad\quad 16x^2 + 24x + 9 \qquad\quad x - 1 \qquad}$$

Afin de minimiser la complexité de l'interface, pour obtenir les résultats souhaités, nous pourrions définir des raccourcis clavier ou des touches de fonction. La personnalisation de la configuration permettrait aux utilisateurs de choisir les gestes préférés. De cette façon, on pourrait visualiser les termes du numérateurs puis de dénominateurs en appuyant *Touche1* et *Touche2* respectivement.

Dans la distribution de l'exercice d'évaluation, le placement de marques sur les termes de l'exemple :

$$(\underline{3a^2} + 2a + 7)\underline{(6a + 4)}$$

rendrait l'affichage braille suivante :

$$3a^2 \qquad\qquad (6a + 4)$$

Cette représentation résumée sert à visualiser uniquement les termes de référence, ce qui facilite leur localisation en réduisant les allers et retours dans l'expression, et en même temps facilite le suivi des multiplications car l'utilisateur peut déterminer à tout moment les termes actifs.

Bien sûr, ces propositions nécessitent une analyse plus détaillée, ainsi que la considération des spécialistes, avant de les implémenter.

9.7 Perspectives d'application

Bien que pour l'instant nous travaillons sur un prototype de type logiciel *standalone*, il faut évaluer encore les options de présentation dans lequelle ces interactions puissent être exploités convenablement. Nous discutons aussi les perspectives d'intégration dans d'autres applications logicielles.

Afin de permettre la prise de notes intégrée de texte et d'expressions mathématiques, il nous semble pertinent et intéressant d'implémenter cette interface comme un *plugin* dans un éditeur de texte tel que OpenOffice, de façon que nous puissons insérer des expressions mathématiques sous la forme d'objets dynamiques dans un environnement complètement fonctionnel d'édition de documents.

D'un autre côté, les caractéristiques d'affichage et de navigation linéaire synchronisées dans une vue bidimensionnelle et linéaire comme le braille, peuvent être adaptées pour leur implémentation pour d'autres vues linéaires comme le code LaTeX.

Prenons l'équation suivante :

$$\left(\frac{4x}{3} + \frac{3}{4}\right) * \left(\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{4x}{3} + 1\right)^2 - \frac{x-1}{9} = 1$$

Voici la représentation LaTeX de l'expression :

```
(\frac{4x}{3}+\frac{3}{4})*(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3})-(\frac{4x}{3}
+1)^2-\frac{x-1}{9}=1
```

Une telle expression occupe trois lignes dans une plage braille de 40 caractères. Dans une vue alternative, en utilisant l'affichage granulaire, nous pourrions visualiser l'équation de la façon suivante :

```
FACTEUR*FACTEUR-FACTEUR^2-FRAC=1
(FRAC+FRAC)*(FRACx-FRAC)-(FRAC+1)^2-FRAC=1
```

Table 9.2 – Représentations mathématiques.

Notation en noir	$\sqrt{\frac{(x+1)^2}{(x+1)*(x-1)}+\frac{x^2}{x-1}}$
Notre prototype	$\sqrt{\langle\frac{\langle(x+1)^2/}{(x+1)*(x-1)\rangle}+\frac{\langle x^2/}{x-1\rangle}\rangle}$
LAMBDA	`√⫽(x+1)^2⫻(x+1)*(x-1)⑊+⫽x^2⫻x-1⑊⟩`
Code LaTeX	`\sqrt{\frac{(x+1)^2}{(x+1)*(x-1)}+\frac{x^2}{x-1}}`

```
(FRAC+FRAC)*(FRACx-FRAC)-(\frac{4x}{3}+1)^2-FRAC=1
(FRAC+FRAC)*(FRACx-FRAC)-(               +1)^2-FRAC=1
```

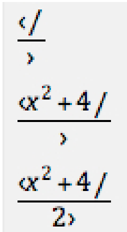
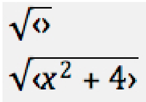
La proposition d'affichage exclusif de dénominateurs, numérateurs et puissances pourrait être implémenté aussi sur LaTeX, afin d'obtenir ces éléments sur la plage braille.

L'analyse et l'implémentation des interactions présentés dans ce travail permettent d'imaginer des méthodes optimisées de traitement d'expressions mathématiques sur le code LaTeX, rendant le travail plus facile à gérer pour les étudiants. La possibilité de travailler les mathématiques avec du LaTeX permet aux étudiants non voyants l'accès aux études supérieures des sciences en général. Actuellement, LAMBDA permet de travailler avec des contenus mathématiques plus avancés que l'algèbre, mais il a les limitations dues à son code spécifique. Dans l'exemple du tableau 9.2 nous pouvons observer les différents représentations d'une même expression.

Parmi ces représentations, LAMBDA et LaTeX utilisent une syntaxe spécifique. La principale différence de syntaxe entre LAMBDA et LaTeX est la verbosité, mais à la base il s'agit d'une représentation linéaire qui nécessite l'utilisation de marques de blocs. Bien que nécessitant des efforts, l'apprentissage du LaTeX semble être une option pertinente pour les élèves non voyants qui veulent continuer leurs études de mathématiques, car il reste le standard pour l'élaboration de documents mathématiques complexes. De plus, les élèves auront la possibilité d'utiliser le braille auquel ils sont habitués.

L'un des enseignants de mathématiques spécialistes des élèves ayant une déficience visuelle a précisé que l'apprentissage du LaTeX est recommandé pour les élèves qui connaissent déjà le braille mathématique, et qui veulent poursuivre leurs études dans ce domaine. Il affirme que cela n'est pas difficile aux bons braillistes, parce que l'expression est déjà linéarisée, ils ont déjà l'habitude d'utiliser des blocs, donc ils ont qu'à apprendre la syntaxe. Selon lui, il est nécessaire d'enseigner le code LaTeX,

TABLE 9.3 – Vue LaTeX.

	Fractions
	`\frac{}{}`
	`\frac{x^2+4}{}`
	`\frac{x^2+4}{2}`
	Racines
	`\sqrt{}`
	`\sqrt{x^2+4}`

mais pas au détriment du braille mathématique.

Prenant en compte le fait que le code LaTeX est compliqué pour des élèves du lycée, dans une première étape nous pouvons ajouter au prototype une vue LaTeX pour aider les élèves voyants et les non voyants se familiariser avec ce code. Cette implémentation initiale est possible grâce à l'architecture du logiciel, qui permet de présenter le code LaTeX comme une vue alternative à partir du code MathML (voir tableau 9.3). La conversion sans erreur de syntaxe est assurée car la représentation MathML est toujours valide.

Chapitre 10

Conclusions

Sommaire

10.1 Apports de ce travail

Dans ce travail nous avons présenté une analyse des caractéristiques de représentation et d'interaction souhaitables dans une interface qui puisse servir comme outil de support dans le processus d'enseignement-apprentissage de l'algèbre dans un environnement intégré.

Nous avons essayé de considérer les quatre challenges actuels pour assister des non voyants dans leur travail en mathématiques : l'accès aux contenus, la navigation dans les expressions, la présentation et communication de contenus, et la facilitation des calculs [Miesenberger 2008].

La modélisation des aides à la résolution est un des aspects plus complexes parmi les challenges actuels. Ces fonctionnalités d'aide sont délicates à mettre en place car elles ne doivent pas « faire à la place » des élèves, mais au contraire les aider à comprendre les concepts sous-jacents aux opérations effectuées sur les expressions dans le cadre de calculs. Elles sont nécessaires pour compenser les limitations des modalités non visuelles par rapport aux modalités visuelles qui offrent toute une palette d'outils informels aux utilisateurs, depuis leur utilisation comme mémoire auxiliaire, l'accès immédiat à la structure bidimmensionnelle des expressions, permettant une compréhension de la sémantique mathématique plus rapide et plus efficace, jusqu'au différents graffitis qu'on peut griffoner autour d'une expression lors de la résolution d'un problème (souligner, barrer, entourée, relier, dessiner des flèches, *etc.*). Ce sont ces possibilités étendues qu'offre la vision – et qui sont très utilisées par les voyants et constituent de fait un désavantage pour les non voyants – que nos fonctions d'assistance s'attachent à compenser.

Notre démarche a consisté à faire des propositions de fonctionnalités d'assistance basées sur une analyse des processus de résolution de problèmes algébriques à la fois chez des personnes voyantes et chez des personnes non-voyantes – élèves et enseignants –, ainsi que sur une analyse des processus d'apprentissage des concepts mathématiques, menée avec des enseignants de mathématiques, spécialisés dans l'enseignement aux élèves déficients visuels ou non.

Nous avons évalué les fonctionnalités d'assistance aux mathématiques que nous proposons, par l'intermédiaire d'un prototype d'interface pour la facilitation de l'édition et résolution d'équations algébriques et la communication entre voyants et non voyants.

À partir des expériences avec des élèves et des enseignants de mathématiques, nous pouvons conclure que les intentions des élèves voyants et non voyants concernant la résolution d'équations sont similaires. Les actions requises dépendent de la tâche à réaliser, et la stratégie dépend du niveau de compréhension des élèves. La barrière principale dans la communication entre personnes voyantes et non voyantes qui font des mathématiques est la représentation de contenus. La synchronisation de la représentation et de l'accès visuel et non visuel facilite la communication entre les utilisateurs voyants et non voyants, en permettant la visualisation de contenus sous la forme habituelle pour chacun. Alors que la représentation en MathML permet la représentation bidimensionnelle de contenus, les sorties audio et braille synchronisées permettent l'accès non visuel. Une représentation exclusive en audio n'est pas suffisante pour satisfaire les besoins des utilisateurs non voyants.

Nos résultats montrent qu'une application logicielle contenant les interactions implémentées dans notre prototype pourrait être utilisée dans une salle de classe intégrée comme support dans le processus d'enseignement-apprentissage, et apporterait une assistance jugée appréciable par les enseignants de mathématiques ayant des élèves non voyants en intégration. Bien sûr, il faut noter que l'utilité d'une telle interface, comme pour tous les outils, dépend du cadre didactique dans lequel elle serait utilisée.

Voici les apports principaux de ce travail :

- Modélisation de la résolution d'équations linéaires par des utilisateurs voyants et non voyants.
- Identification des interactions qui facilitent l'accès linéaire non visuel lors d'une visualisation graphique bidimensionnelle.
- Prototype d'éditeur multimodal pour faire des calculs algébriques essentiels.

De plus, quelques propositions de présentation non visuelle sont proposés à partir des résultats de cette recherche.

10.2 Extension de la recherche

Une application implémentant les caractéristiques de notre prototype se révèlerait très utile pour assister dans une certaine mesure le processus d'enseignement-apprentissage dans un environnement scolaire intégré au niveau lycée. Il est important aussi de s'intéresser aux niveaux supérieurs de l'enseignement des mathématiques et des sciences en général. De nos jours, le standard pour travailler avec des documents mathématiques complexes reste LaTeX. Les avantages de LaTeX son nombreux :

- LaTeX est un standard international, donc il peut faciliter le partage des documents parmi des étudiants des régions différents.
- LaTeX permet la mise en forme de documents, l'utilisateur n'a besoin que de donner des informations sémantiques (titre par exemple) et une mise en forme correcte est générée. De plus, une fois compilé, le document répond aux critères de lisibilité des voyants, dans lequel les formules mathématiques sont présentées de la façon habituelle pour ces derniers.
- Un nombre important de logiciels sont capables d'importer du code LaTeX.
- LaTeX offre la possibilité aux voyants de lire et d'éditer les contenus dans un format plus accessible que le braille, ce qui facilite la communication entre voyant et non voyant.

Néanmoins, le code LaTeX est très verbeux, ce qui pose problème pour son traitement dans des modalités non visuelles, aussi bien en braille qu'en audio. Comme on l'a vu, il existe des outils permettant de convertir le LaTeX vers de l'audio ou de codes braille mathématique. L'une des extensions possibles de nos travaux consiste en l'implémentation des fonctionnalités proposées ici pour faciliter le traitement du code LaTeX en combinaison avec le braille mathématique et de l'audio.

Annexe A

Démarches de Résolution

A.1 Équation $7 - \frac{x+3}{x} = 5$

Démarche NL1 :

- Utilise la fonction pour écouter l'expression complète. Réflexion.
- Utilise les fonctions pour étendre et plier par niveau.
- Il a exprimé à l'orale la structure de la fraction.
- Insertion d'une nouvelle ligne
- Saisie de $2-$
- Raccourci pour insérer la structure d'une fraction. Erreur
- Corriger la fraction, saisir $= 0$
- Essayé d'indiquer $u/v = u'$, puis $u/v = u'v - uv'$, mais il a obtenu un message d'erreur puisque les apostrophes ne sont pas inclus parmi les caractères valides.
- Insérer fraction.
- Compléter le résultat.

Démarche NL2 :

- Copier la fraction.
- Insérer nouvelle ligne
- Coller fraction.
- Continuer l'édition.

Démarche C3 : Saisie par la plage braille.

A.2 Équation $x + 2(x + 2(x + 2)) = x + 2$

Démarche NL1 :

- Traitement des parenthèses par l'édition de termes.
- Dans la 3ème ligne il a vérifié 2 fois ce qu'il avait saisit, en utilisant les flèches, la lecture par niveau et la lecture de l'expression complète.
- Puis, après chaque ligne, il vérifie par la lecture complète.
- Après avoir saisi le résultat final, il vérifie les dernières lignes.
- Il a essayé d'insérer des lettres grecques, qui ne sont pas considérés parmi les caractères valides.

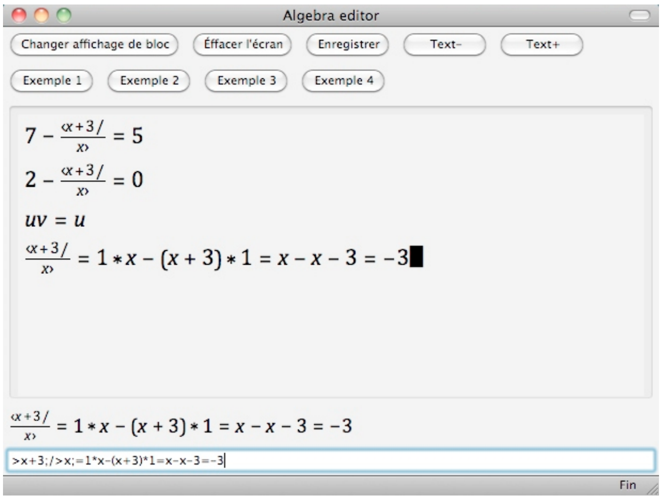


FIGURE A.1 – NL1, Expression 1.

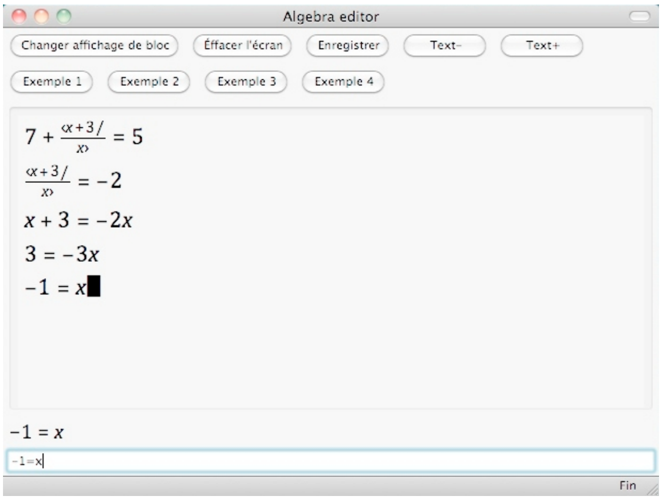


FIGURE A.2 – NL2, Expression 1.

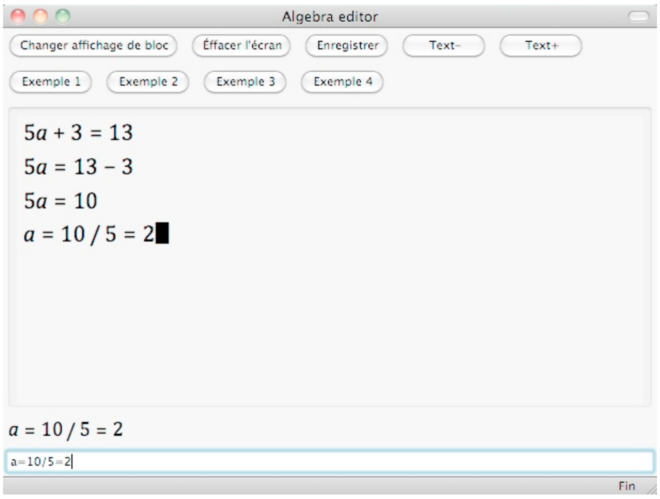


FIGURE A.3 – C3, Expression alternative.

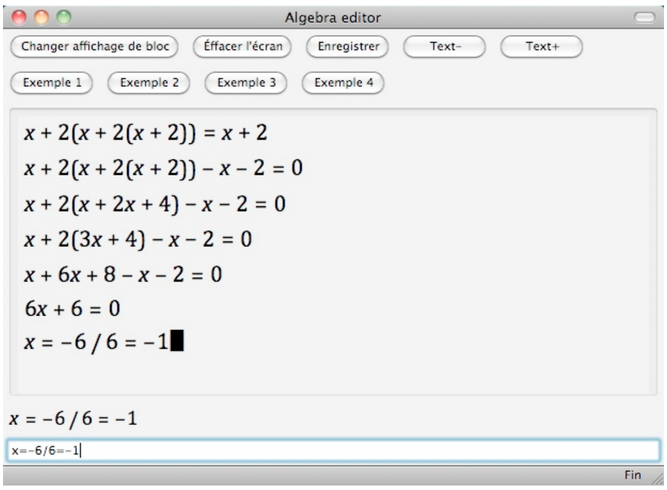


FIGURE A.4 – NL1, Expression 2.

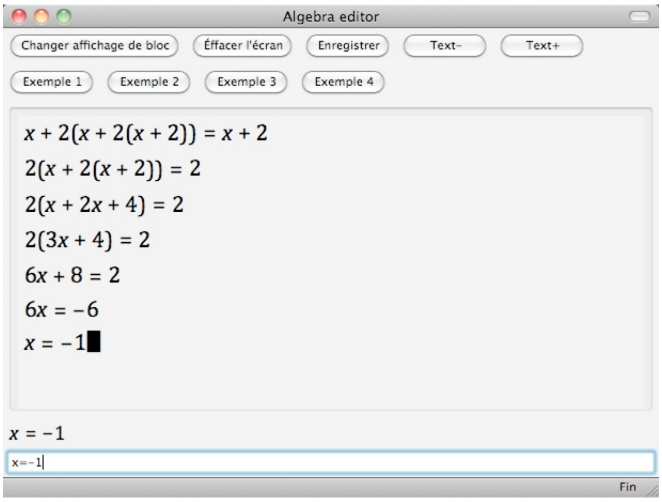


FIGURE A.5 – NL2, Expression 2.

Démarche NL2 : L'élève a identifié et exécuté la simplification initial, puis il a procédé par le traitement des parenthèses :

- Copier la sous expression $2(x + 2(x + 2)) = x + 2$
- Coller dans une nouvelle ligne, puis effacer la x du deuxième membre.
- Saisir $2(x + 2x + 4) = 2$
- Continuer l'édition

A.3 Équation $(3a^2 + 2a + 7)(a + 5a - 4)$

Démarche NL1 :

- Utilise la fonction pour masquer tout, puis la fonction pour afficher un niveau.
- Lecture de chaque facteur, en utilisant la fonction pour lire la sélection.
- Étendre les termes du premier facteur $\rightsquigarrow (3a^2 + 2a + 7)FACTEUR$
- Étendre les termes du deuxième facteur.
- Indique les produits par écrit $3a^2 * a + 3a^2 * 5a...$
- Saisir les résultats des multiplications.
- Utilise la fonction pour écouter le résultat des multiplications, 2 fois.
- Lecture active par les flèches $\longleftrightarrow$
- Saisir $= 16a^3$
- Lecture active
- Saisir $+24a^2$
- Lecture active
- Saisir $34a - 28$
- Il vérifie la simplification et corrige le terme en a^3 : $16a^3 \rightsquigarrow 18a^3$.
- Il a utilisé la recherche de termes semblables après la simplification des termes quadratiques, afin de vérifier qu'il les avait considéré tous dans l'opération de collection.

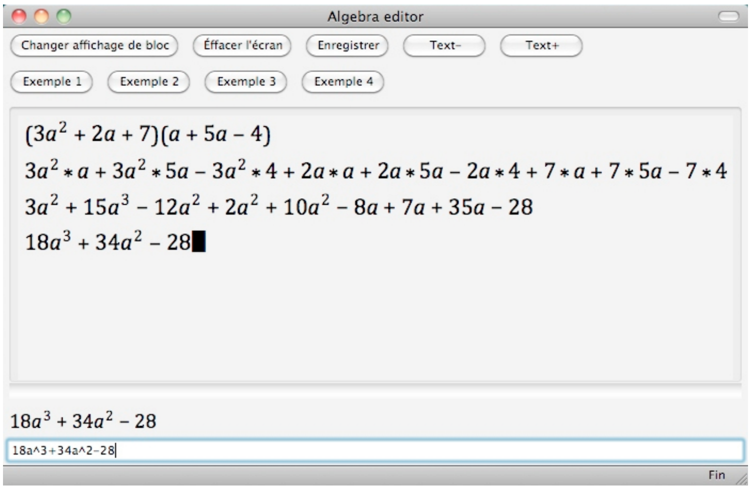


FIGURE A.6 – NL1, Expression 3.

Démarche NL2 : Depuis la première lecture de l'expression, l'élève a détecté qu'il était possible de simplifier le deuxième facteur :
- Copier l'expression complète.
- Coller expression, puis effacer $a + 5a$.
- Saisir $6a$.

Pour développer la distribution, il est passé de la ligne de résultat partiel à la ligne précédente ; il a parcouru la ligne de la distribution puis il a saisit sur la ligne de résultat. Il a fait deux erreurs arithmétiques pendant une multiplication : $3a^2 * 6a \rightsquigarrow 18a^4$, et $3a^2 * -4 \rightsquigarrow -12a^3$.

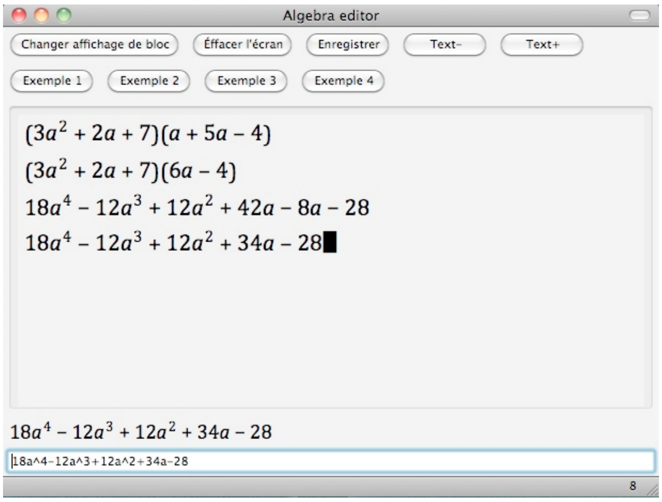


FIGURE A.7 – NL2, Expression 3.

Annexe B

Guide d'évaluation par des spécialistes de l'enseignement des mathématiques aux élèves avec déficience visuelle

Guide d'évaluation par des spécialistes

1) Saisie et visualisation

$3x^2-6=3(x^2-2)$

✓	Type de saisie	Observations
	Raccourcis	
	Séquentiel	
	Linéaire	

$\frac{2x}{x+2}=\frac{4}{x-10}$

✓	Type de saisie	Observations
	Raccourcis	
	Séquentiel	
	Linéaire	

$\sqrt{x+4}$

✓	Type de saisie	Observations
	Raccourcis	
	Séquentiel	
	Linéaire	

Exemple d'importation dans OpenOffice du fichier produit par notre prototype.

2) Visualisation granulaire

$\frac{5+\sqrt{2x}}{8(2y+4)}$ $\frac{a+\frac{b}{c}}{d+e}$ $\frac{\frac{a+b}{c+d}}{x-y}$

3) Résolution

Simplificacion : Exemple depuis le menu

$3a^3+15a^3-12a^2+2a^2+10a^2-8a+7a+35a-28$

- Présenter les recherches, l'affichage de résultats, recherche dans une expression partiellement repliée.
- Présenter le placement de marques.
- Montrer la lecture et la copie de termes marqués.

Distribution :

$(3a^2+2a+7)(6a-4)$

- Présenter la suggestion d'utilisation du placement de marques.

Bibliographie

[Anderson 2005] J. Anderson. *Human Symbol Manipulation Within an Integrated Cognitive Architecture.* Cognitive Science, vol. 29, pages 313–341, 2005. (Cité en pages 9, 15, 16 et 17.)

[Archambault 2004] D. Archambault, D. Fitzpatrick, G. Gupta, A. Karshmer, K. Miesenberger et E. Pontelli. *Towards a Universal Maths Conversion Library.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et D. Burger, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 664–669. Berlin : Springer-Verlag, 2004. (Cité en page 47.)

[Archambault 2005] D. Archambault, M. Batusic, F. Berger, D. Fitzpatrick, K. Miesenberger, V. Moço et B. Stöger. *The Universal Maths Conversion Library : an attempt to build an Open Software Library to Convert Mathematical Contents in various Formats.* In Proceedings of 3nd International Conference on Universal Access in Human-Computer Interaction (joint with HCI International 2005), 2005. (Cité en page 47.)

[Archambault 2006] D. Archambault et V. Moço. *Canonical MathML to Simplify Conversion of MathML to Braille Mathematical Notations.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et A. Karshmer, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 1191–1198. Berlin : Springer-Verlag, 2006. (Cité en pages 35, 36 et 95.)

[Archambault 2007] D. Archambault, B. Stöger, M. Batusic, C. Fahrengruber et K. Miesenberger. *A Software Model to Support Collaborative Mathematical Work Between Braille and Sighted Users.* In Ninth International ACM SIGACCESS Conference on Computers and Accessibility (ASSETS 07), 2007. (Cité en pages 47, 80 et 81.)

[Archambault 2009] D. Archambault. *Non Visual Access to Mathematical Contents : State of the Art and Prospective.* In Proceedings of the WEIMS Conference 2009 (The Workshop on E-Inclusion in Mathematics and Science), pages 43–52, 2009. (Cité en pages 1, 2, 29 et 80.)

[Archambault 2011] D. Archambault et J. Engelen. *odt2daisy : Preparing accessible documents at the dtbook format with openoffice.org.* In Proceedings of the Universal Learning Design Conference 2011, 2011. (Cité en page 45.)

[Artigue 2002] M. Artigue. *Learning Mathematics in a CAS Environment : The Genesis of a Reflection About Instrumentation and the Dialectics Between Technical and Conceptual Work.* International Journal of Computers for Mathematical Learning, vol. 7, pages 245–274, 2002. (Cité en pages 44, 50 et 80.)

[Awde 2008] A. Awde, Y. Bellik et C. Tadj. *Complexity of Mathematical Expressions in Adaptive Multimodal Multimedia System Ensuring Access to Mathematics* *for Visually Impaired Users.* International Journal of Computer and Information Engineering, vol. 2, no. 6, pages 393–405, 2008. (Cité en pages 25 et 28.)

[Balacheff 1993] N. Balacheff. *Artificial Intelligence and Mathematics Education : Expectations and Questions.* In T. Herrington, editeur, Proceedings of the 14th Biennal of the AAMT, pages 1–24, 1993. (Cité en pages 50, 52 et 80.)

[Bates 2010] E. Bates et D. Fitzpatrick. *Spoken Mathematics Using Prosody, Earcons and Spearcons.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et A. Karshmer, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 407–414. Berlin : Springer-Verlag, 2010. (Cité en pages 25 et 26.)

[Bernareggi 2007] C. Bernareggi et D. Archambault. *Mathematics on the Web : Emerging Opportunities for Visually Impaired People.* In W4A '07 : Proceedings of the 2007 international cross-disciplinary conference on Web accessibility (W4A), pages 108–111, New York, NY, USA, 2007. ACM Press. (Cité en page 48.)

[Bernareggi 2010] C. Bernareggi. *Non-sequential Mathematical Notations in the LAMBDA System.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et A. Karshmer, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 389–395. Berlin : Springer-Verlag, 2010. (Cité en page 47.)

[Buchberger 1990] B. Buchberger. *Should Students Learn Integration Rules ?* SCM SIGSAM Bulletin, vol. 24, no. 1, pages 10–17, 1990. (Cité en pages 50 et 51.)

[Bundy 1975] A. Bundy. *Analysing Mathematical Proofs. DAI Research Report No. 2.* Rapport technique, Department of Artificial Intelligence, University of Edinburgh, 1975. (Cité en page 17.)

[Cajori 1993] F. Cajori. A history of mathematical notations. New York : Dover, 1993. (Cité en page 11.)

[Carry 1979] L. Carry, C. Lewis et J. Bernard. *Psychology of Equation Solving : An Information Processing Study.* Rapport technique, The University of Texas at Austin, 1979. (Cité en pages 10, 17, 18, 51, 56, 57, 58, 68, 71, 74, 75 et 79.)

[Corbett 2000] A. Corbett, M. McLaughlin, C. Scarpinatto et W. Hadley. *Analyzing and Generating Mathematical Models : An Algebra II Cognitive Tutor Design Study.* In Gauthier G., C. Frasson et K. VanLehn, editeurs, Intelligent Tutoring Systems 2000, pages 314–323, 2000. (Cité en page 41.)

[Deslauriers 2008] W. A. Deslauriers, G. P. Ouellette, M. Barnes et J. LeFevre. *To See or Not to See : The Visual Component of Mental Arithmetic.* In B. C. Love, K. McRae et V. M. Sloutsky, editeurs, Proceedings of the 30th Annual Conference of the Cognitive Science Society, 2008. (Cité en page 24.)

[Doush 2009] I. Doush et E. Pontelli. *Building a Programmable Architecture for Non-Visual Navigation of Mathematics : Using Rules for Guiding Presentation and Switching Between Modalities.* In C. Stephanidis, editeur, Universal Access in HCI, pages 3–13, 2009. (Cité en pages 27 et 29.)

[Drijvers 2003] P. Drijvers. *Algebra on Screen, on Paper, and in the Mind.* In J. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin et R. Zbiek, editeurs, Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education, pages 241–267. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics., 2003. (Cité en pages 49 et 50.)

[Drijvers 2005] P. Drijvers et K. Gravemeijer. *Computer Algebra as an Instrument : Examples of Algebraic Schemes.* In D. Guin, K. Ruthven et L. Trouche, editeurs, The Didactical Challenge of Symbolic Calculators : Turning a Computational Device Into a Mathematical Instrument. Springer, 2005. (Cité en pages 50, 51 et 80.)

[Edwards 1993] A. Edwards et R. Stevens. *Mathematical Representations : Graphs, Curves and Formulas.* In D. Burger et J. Sperandio, editeurs, Non-Visual Human Computer Interactions : Prospects for the Visually Handicapped, pages 181–193, 1993. (Cité en page 25.)

[Engelen 2011] J. Engelen et B. Simons. *Towards a Common Braille Math Code for Flemish Students.* In Proceedings of the World Congress Braille21, 2011. (Cité en pages 48 et 49.)

[Ernest 1987] P. Ernest. *A Model of the Cognitive Meaning of Mathematical Expressions.* British Journal of Educational Psychology, vol. 57, no. 3, pages 343–370, 1987. (Cité en pages 12, 13, 25 et 130.)

[Fernández del Campo 1986] J. Fernández del Campo. La enseñanza de la matemática a los ciegos. ONCE. Organización Nacional de Ciegos Españoles, 1986. (Cité en pages 2 et 29.)

[Ferreira 2004] H. Ferreira et D. Freitas. *Audio Rendering of Mathematical Formulae Using MathML and AudioMath.* In C. Stary et C. Stephanidis, editeurs, User-Centered Interaction Paradigms for Universal Access in the Information Society, 2004. (Cité en page 46.)

[Fitzpatrick 2006] D. Fitzpatrick. *Mathematics : How and what to Speak.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et A. Karshmer, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 1199–1206. Berlin : Springer-Verlag, 2006. (Cité en page 27.)

[Gardner 2009] J. Gardner. *DotsPlus Braille for the Mainstream Teacher.* `http://www.viewplus.com/about/abstracts/09ahggardnerdots.html`, 2009. (Cité en page 44.)

[Gillan 2004] D. Gillan, P. Barraza, A. Karshmer et S. Pazuchanics. *Cognitive Analysis of Equation Reading : Application to the Development of the Math Genie.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et D. Burger, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 630–637. Berlin : Springer-Verlag, 2004. (Cité en pages 14, 68 et 80.)

[Heck 2001] A. Heck. *Variables in Computer Algebra, Mathematics and Science.* International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, vol. 8, no. 3, pages 195–221, 2001. (Cité en pages 9, 50 et 80.)

[Heid 2001] M. Kathleen Heid et Michael Todd Edwards. *Computer Algebra Systems : Revolution or Retrofit for Today's Mathematics Classrooms ?* Theory Into Practice, vol. 40, no. 2, pages 128–136, 2001. (Cité en page 42.)

[Irving 2007] A. Irving. *The Latex-access Project.* `http://latex-access.sourceforge.net/`, 2007. (Cité en page 45.)

[Karshmer 2002] A. Karshmer, G. Gupta et D. Gillan. *Architecting an Auditory Browser for Navigating Mathematical Expressions.* In K. Miesenberger, J. Klaus et Zagler, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 477–485. Berlin : Springer-Verlag, 2002. (Cité en pages 28, 46, 80 et 84.)

[Kieran 2007] C. Kieran. *What do Students Struggle with When First Introduced to Algebra Symbols ?* Rapport technique, The National Council of Teachers of Mathematics, 2007. (Cité en page 10.)

[Kirshner 1989] D. Kirshner. *The Visual Syntax of Algebra.* Journal for Research in Mathematics Education, vol. 20, no. 3, pages 274–287, 1989. (Cité en pages 12 et 14.)

[Kirshner 2004] D. Kirshner. *Visual Salience of Algebraic Transformations.* Journal for Research in Mathematics Education, vol. 35, no. 4, pages 224–257, 2004. (Cité en pages 14 et 21.)

[Kohlhase 2006] M. Kohlhase. Omdoc – an open markup format for mathematical documents. Springer, 2006. (Cité en page 36.)

[Lagrange 2007] J. Lagrange. *Didactic Time, Epistemic Gain and Consistent Tool : Taking Care of Teachers' Needs for Classroom Use of CAS.* International Journal for Technology in Mathematics Education, vol. 14, no. 2, pages 87–94, 2007. (Cité en page 50.)

[Mascret 2012] B. Mascret, A. Mille et V. Guillet. *Supporting Braille Learning and Uses by Adapting Transcription to User's Needs.* In Proceedings of the 13th International Conference on Computers Helping People with Special Needs - Volume Part I, ICCHP'12, pages 150–157. Springer-Verlag, 2012. (Cité en page 44.)

[Miesenberger 1998] K. Miesenberger, M. Batusic et B. Stöger. *LABRADOOR : LaTeX-to-Braille-Door.* `http://www.snv.jussieu.fr/inova/publi/ntevh/labradoor.htm`, 1998. (Cité en page 45.)

[Miesenberger 2008] K. Miesenberger. *Doing Mathematics.* `http://www.ascience-thematic.net/en/conferences/paris/Miesenberger`, 2008. (Cité en pages 2, 46, 48, 49, 80, 129 et 139.)

[Monaghan 2007] J. Monaghan. *Computer Algebra, Instrumentation and the Anthropological Approach.* International Journal for Technology in Mathematics Education, vol. 14, no. 2, pages 63–72, 2007. (Cité en pages 44, 50 et 80.)

[Nemeth 1995] A. Nemeth. *MathSpeak.* `http://www.nfbcal.org/nfb-rd/0713.html`, 1995. (Cité en pages 25, 26, 27 et 28.)

[Nicaud 1992] J. F. Nicaud. *A General Model of Algebraic Problem Solving for the Design of Interactive Learning Environments.* In J. et al Ponte, editeur, Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, volume 89 of *NATO ASI Series*, pages 267–285. Springer Berlin Heidelberg, 1992. (Cité en page 41.)

[Nicotra 2010] G. Nicotra, G. Bertoni, E. Bortolazzi et L. Formenti. *Innovative Methods for Accessing Mathematics by Visually Impaired Users.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et A. Karshmer, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 423–430. Berlin : Springer-Verlag, 2010. (Cité en pages 12 et 29.)

[Oksuz 2007] C. Oksuz et J. Middleton. *Middle School Childrenś Understanding of Algebraic Fractions as Quotients.* International Online Journal of Science and Mathematics Education, vol. 7, no. 1, 2007. (Cité en page 10.)

[Özgün Koca 2002] A. Özgün Koca et M. T. Edwards. *Symbolic Math Guide : An Innovative Way of Teaching and Learning Algebra Using TI-89 and TI-92+ Graphing Calculators.* In Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). John Wiley & Sons Inc., 2002. (Cité en pages 42, 44 et 50.)

[Özgün Koca 2010] A. Özgün Koca. *Prospective teachers' Views on the Use of Calculators with Computer Algebra System in Algebra Instruction.* Journal of Mathematics Teacher Education, vol. 13, no. 1, pages 49–71, 2010. (Cité en pages 50 et 51.)

[Perelman 1936] Y. Perelman. Algebra can be fun. Ishi Press, 1936. (Cité en page 10.)

[Pontelli 2004] E. Pontelli et B. Palmer. *Translating Between Formats for Mathematics : Current Approach and Agenda for Future Developments.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et D. Burger, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 620–625. Berlin : Springer-Verlag, 2004. (Cité en pages 35 et 36.)

[Raman 1994] T.V. Raman. *Audio Systems for Technical Reading.* PhD thesis, Department of Computer Science, Cornell University, NY, 1994. (Cité en page 45.)

[Ranney 1987] M. Ranney. *The Role of Structural Context in Perception : Syntax in the Recognition of Algebraic Expressions.* Memory & Cognition, vol. 15, no. 1, pages 29–41, 1987. (Cité en page 12.)

[Raz 2007] N. Raz, E. Striem, G. Pundak, T. Orlov et E. Zohary. *Superior Serial Memory in the Blind : A Case of Cognitive Compensatory Adjustment.* Current Biology, vol. 17, pages 1129–1133, 2007. (Cité en page 71.)

[Ritter 2007] S. Ritter, J. Anderson, K. Koedinger et A. Corbett. *Cognitive Tutor : Applied Research in Mathematics Education.* Psychonomic Bulletin & Review, vol. 14, no. 2, pages 249–255, 2007. (Cité en page 16.)

[Schweikhardt 2006] W. Schweikhardt, C. Bernareggi, N. Jessel, B. Encelle et M. Gut. *LAMBDA : a European System to Access Mathematics with Braille and Audio Synthesis.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et A. Karshmer, editeurs, Proc. ICCHP 2006 (10th International Conference on Computers Helping People with Special Needs), pages 1223–1230. Springer, 2006. (Cité en pages 2 et 47.)

[Sleeman 1982] D. H. Sleeman. *Inferring (Mal) Rules from Pupils' Protocols.* In Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence, pages 160–164, 1982. (Cité en page 41.)

[Smith 2004] A. Smith, J. Francioni, M. Anwar, J. Cook, A. Hossain et M. Rahman. *Nonvisual Tool for Navigating Hierarchical Structures.* In ASSETS '04, pages 133–139, 2004. (Cité en pages 28 et 80.)

[Soiffer 2005] N. Soiffer. *MathPlayer : Web-based Math Accessibility.* In Seventh International ACM SIGACCESS Conference on Computers and Accessibility (ASSETS 05), pages 204–205, 2005. (Cité en page 40.)

[Stanley 2008] P. Stanley. *Accessing the Mathematics Related Communication Requirements of the Blind in Education and Career.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et A. Karshmer, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 888–891. Berlin : Springer-Verlag, 2008. (Cité en pages 1 et 80.)

[Stevens 1994] R. D. Stevens, S. A. Brewster, P. C. Wright et A. D. N. Edwards. *Design and Evaluation of an Auditory Glance at Algebra for Blind Readers.* In Auditory Display : The Proceedings of the Second International Conference on Auditory Display, pages 21–30. Addison-Wesley, 1994. (Cité en pages 25, 28, 68, 80 et 130.)

[Stevens 1996] R. Stevens. *Principles for the Design of Auditory Interfaces to Present Complex Information to Blind People.* PhD thesis, The University of York, 1996. (Cité en pages 14, 26, 27, 28 et 29.)

[Stöger 2004] B. Stöger, K. Miesenberger et M. Batusic. *Mathematical Working Environment for the Blind : Motivation and Basic Ideas.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et D. Burger, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 656–663. Berlin : Springer-Verlag, 2004. (Cité en pages 1, 2, 33, 48, 68 et 80.)

[Stöger 2006] B. Stöger, M. Batusic, K. Miesenberger et P. Haindl. *Supporting Blind Students in Navigation and Manipulation of Mathematical Expressions : Basic Requirements and Strategies.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et A. Karshmer, editeurs, Computers Helping People with Special Needs, pages 1235–1242. Berlin : Springer-Verlag, 2006. (Cité en pages 55, 73 et 80.)

[Suzuki 2004] M. Suzuki, T. Kanahori, N. Ohtake et K. Yamaguchi. *An Integrated OCR Software for Mathematical Documents and its Output with Accessibility.* In K. Miesenberger, J. Klaus, W. Zagler et D. Burger, editeurs, Computers

Helping People with Special Needs, pages 648–655. Berlin : Springer-Verlag, 2004. (Cité en page 46.)

[Vari 2012] S. Vari. *Rapport d'Étape du P.S.L.M (Programme Spécialisé de Lecture Mathématique à l'Usage des Non-Voyants)*. Rapport technique, Baisser les Barrières, 2012. (Cité en page 46.)

Résumé : Les élèves non voyants et malvoyants qui apprennent les mathématiques dans une environnement scolaire intégré font face à des problèmes qui vont au-delà de la difficulté des mathématiques elle-mêmes. La différence de représentation de contenus mathématiques et des outils de support utilisés par les personnes voyantes et les non voyantes rend difficile la communication directe entre eux. L'utilisation d'un ordinateur peut rendre possible la représentation de contenus mathématiques dans des modalités synchronisées qui conviennent à la fois aux voyants et aux non voyants, permettant ainsi la communication entre eux sans intermédiaire. Le but de notre travail consiste à identifier les caractéristiques de représentation et d'interaction visuelle et non visuelle souhaitables dans une interface qui puisse servir comme outil de support dans le processus d'enseignement-apprentissage de l'algèbre dans un environnement intégré. Nous avons développé un prototype d'interface multimodale qui suit les principes de la conception centrée sur l'utilisateur, dans laquelle les élèves et les enseignants de mathématiques, voyants et non voyants, sont impliqués dans les étapes du développement. Le prototype permet l'écriture de contenus mathématiques au clavier et sur la plage braille, ainsi que un mode de lecture active par la navigation granulaire, l'utilisation des commandes de support à la résolution d'équations. Nous avons mené des test d'utilisateur en 2 modalités :

1. Évaluation pratique par des élèves et des enseignants.
2. Évaluation par des enseignants de mathématiques spécialistes des élèves ayant une déficience visuelle.

Les résultats suggèrent que les interactions proposés dans ce travail pourraient être prises en compte dans l'implémentation d'interfaces accessibles pour faire des mathématiques.

Mots clés : Conception de interfaces, interaction, accès non visuel, mathématiques, algèbre, déficience visuelle

Modelling of the non visual interaction of a synchronised visual and non visual mathematical working environment

Abstract : The students with blindness who study mathematics in an integrated environment face problems that go beyond the difficulty of the subject. The difference of content representation and supporting tools makes difficult the direct communication between people with and without blindness. The computer makes possible the synchronised representation of contents in multiple modalities, allowing direct communication between them.

The objective of this work is to identify the characteristics of visual and non visual representation and the interactions that could be useful on an interface to support the teaching and learning process of algebra learning in an integrated environment. We have developed a prototype of a multimodal interface following the principles of user centered design, in which students and mathematics teachers with and without visual disability were involved during the process of development. The prototype allows writing contents using the computer and the braille keyboard ; active reading is possible through different levels of navigation in the semantic tree of the expression ; we also provide some auxiliary functions to facilitate resolution. We conducted 2 types of test of the prototype with potential users :

1. Practical evaluation with students with blindness and mathematics teachers.
2. Cognitive walkthrough with mathematics teachers who are specialists in working with blind students.

The results of the studies suggest that the interactions proposed in this work can be considered in the implementation of accessible interfaces to work with mathematics.

Keywords : Interface design, interaction, non visual access, mathematics, algebra, visual impairment